





Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXXVI. Jahrgang 1906.

München
Verlag der K. B. Akademie der Wissenschaften
1907.

In Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Akademische Buchdruckerei von F. Straub in München.

Übersicht

des Inhaltes der Sitzungsberichte Bd. XXXVI
Jahrgang 1906.

Die mit * bezeichneten Abhandlungen sind in den Sitzungsberichten nicht abgedruckt.

Sitzung vom 13. Januar 1906. Seite

Sitzung vom 3. Februar 1906.

Sitzung vom 3. März 1906.

Sitzung vom 5. Mai 1906.

Sitzung vom 9. Juni 1906.

Sitzung vom 7. Juli 1906.

Öffentliche Sitzung zur Feier des 147. Stiftungstages am 14. März 1906.

Sitzung vom 3. November 1906.

Öffentliche Sitzung zu Ehren Seiner Königlichen Hoheit des Prinzregenten am 17. November 1906.

Sitzung vom 1. Dezember 1906.



Sitzungsberichte

der

Königl. Bayer. Akademie der Wissenschaften.

Mathematisch-physikalische Klasse.

Sitzung vom 13. Januar 1906.

1. Herr Ferd. Lindemann legt zwei (eng miteinander verbundene) Arbeiten des Herrn Prof. Arthur Korn vor:

a) „Untersuchungen zur allgemeinen Theorie der Potentiale von Flächen und Räumen“.

Die Abhandlung enthält die Beweise für eine Reihe von Hilfssätzen, welche in der Elastizitätstheorie von Wichtigkeit sind.

b) „Allgemeine Lösung des elastischen Gleichgewichtsproblems bei gegebenen Verrückungen an der Oberfläche“.

Hier wird die Methode der sukzessiven Näherungen auf die Integration der Differentialgleichungen der Elastizitätstheorie angewandt, und zwar zunächst auf das Problem des Gleichgewichts eines beliebigen elastischen Körpers mit stetig gekrümmter Oberfläche, für den Fall, daß die Verrückungen an der Oberfläche gegeben sind. Die Lösungen werden als unendliche Reihen dargestellt, deren Konvergenz nicht bloß in endlicher Entfernung von der Oberfläche nachgewiesen wird —

dieser Beweis war bereits durch frühere Untersuchungen von Lauricella und Cosserat möglich — sondern auch bei unendlicher Annäherung an die Oberfläche, und dadurch wird zum ersten Male die Existenz der Lösungen dieses elastischen Gleichgewichtsproblems einwandsfrei nachgewiesen.

2. Herr August Rothpletz überreicht eine Abhandlung des Herrn Prof. Dr. Ernst Weinschenk: „Über Mineralbestand und Struktur der kristallinischen Schiefer". Dieselbe ist für die Denkschriften bestimmt.

Untersuchungen zur allgemeinen Theorie der Potentiale von Flächen und Räumen.

Von **A. Korn.**

(*Eingelaufen 13. Januar.*)

I. Abschnitt.

Verallgemeinerung einiger Sätze über Potentiale von Doppelbelegungen.

Die folgenden 3 Sätze bilden eine Verallgemeinerung einiger früherer Sätze,[1]) durch welche der allgemeine Beweis der Neumannschen Methode des arithmetischen Mittels ermöglicht wurde. Der verallgemeinerte Satz II dieser Abhandlung ist bereits von Liapounoff[2]) bewiesen worden; wenn ich auch diesen hier noch einmal beweise, so geschieht dies, um zu zeigen, daß die Hilfsmittel, mit denen der Beweis des ursprünglichen Satzes von mir gegeben wurde, auch für die Verallgemeinerung ausreichen. Die Beweise der Sätze I und III in ihrer neuen allgemeinen Form werden in dieser Abhandlung zum ersten Male gegeben.

Während für den Beweis der Neumannschen Methode des arithmetischen Mittels diese Verallgemeinerungen nicht nötig waren, sondern die ursprünglich von mir gegebenen Sätze[3])

---

[1]) A. Korn, C. r. 130, p. 1238, 1900; Abhandlungen zur Potentialtheorie 1 (Ferd. Dümmlers Verlag, Berlin 1901); Einige Sätze über die Potentiale von Doppelbelegungen (diese Ber. 33, S. 3, 1903).

[2]) Liapounoff, Comm. de la Soc. Math. de Kharkow 1902.

[3]) A. Korn, Abhandlungen zur Potentialtheorie 1, Satz I—III, S. 5—11.

ausreichten, sind diese verallgemeinerten Sätze sehr nützlich für den Beweis einer der Neumannschen analogen Methode in der Theorie des elastischen Gleichgewichts; aus diesem Grunde war ich gezwungen, noch einmal auf diese Sätze zurückzukommen und sie in der Form zurechtzulegen, in der sie für diese neue Methode in der Elastizitätstheorie geeignet sind.

§ 1.

I.[1]) Ist die Funktion $\varkappa$ der Stelle auf einer stetig gekrümmten, geschlossenen Fläche ω derart stetig, daß ihre absoluten Funktionsdifferenzen in zwei Punkten 1 und 2 in genügend kleiner Entfernung r_{12}

$$\overline{<} A \cdot r_{12}^{\lambda}, \quad \left| \begin{array}{l} A \text{ endliche Konstante,} \\ \lambda \text{ irgend ein echter Bruch,} \end{array} \right.$$

und setzen wir:

$$W = \int_\omega \varkappa \frac{\cos(r\nu)}{r^2}\, d\omega, \tag{1}$$

so sind bereits die ersten Ableitungen (sowohl die tangentialen, als auch die normalen) der Funktion:

$$W_1 = \tfrac{1}{2} \int_\omega (W_a + W_i) \frac{\cos(r\nu)}{r^2}\, d\omega \tag{2}$$

an der Oberfläche (sowohl an der Innenseite, als auch an der Außenseite) derart stetig, daß, wenn σ eine beliebige Richtung bedeutet, für zwei Punkte 1 und 2 der Fläche ω in genügend kleiner Entfernung r_{12}:

$$\text{abs.} \left[\left|\frac{\partial W_1}{\partial \sigma}\right|_2 - \left|\frac{\partial W_1}{\partial \sigma}\right|_1 \right] < (c_1 A + c_2 \,\text{abs. Max.}\, \varkappa)\, r_{12}^{\lambda'}, \quad (\lambda' < \lambda)$$

wo c_1 und c_2 zwei endliche Konstanten vorstellen, die lediglich von der Gestalt der Fläche ω und den Zahlen $\lambda\lambda'$ abhängen, λ' einen beliebigen echten Bruch $< \lambda$ (in strengem Sinne).

[1]) Beiläufig sei bemerkt, daß sich der Satz auch für $\lambda' = \lambda$ beweisen läßt, doch genügt die hier gegebene Fassung des Satzes für unsere Zwecke.

Wir beweisen zunächst, daß die ersten tangentialen Ableitungen der Funktion:

3) $$W_\omega = \tfrac{1}{2}\,(W_a + W_i)$$

für zwei Punkte 1 und 2 der Fläche in genügend kleiner Entfernung r_{12} die Eigenschaft haben:

4) $$\text{abs.}\left[\left|\frac{\partial W_\omega}{\partial h}\right|_2 - \left|\frac{\partial W_\omega}{\partial h}\right|_1\right]^{1)} < (a_1 A + a_2\,\text{abs. Max.}\,\varkappa)\, r_{12}^{\lambda''},\quad \lambda'' < \lambda,$$

wo a_1 und a_2 zwei endliche Konstanten vorstellen, die lediglich von der Gestalt der Fläche ω und den Zahlen $\lambda\lambda''$ abhängen, λ'' einen beliebigen echten Bruch $< \lambda$ (in strengem Sinne).

Wir bilden zum Beweise die Ableitung von W_ω nach irgend einer tangentialen Richtung $h_{1(2)}$[1]) in den Punkten 1 und 2:

5) $$\begin{cases} \left|\dfrac{\partial W_\omega}{\partial h}\right|_2 = \displaystyle\int_\omega (\varkappa - \varkappa_2)\,\frac{\cos(\nu h_2) - 3\cos(r h_2)\cos(r\nu)}{r^3}\,d\omega, \\ \left|\dfrac{\partial W_\omega}{\partial h}\right|_1 = \displaystyle\int_\omega (\varkappa - \varkappa_1)\,\frac{\cos(\nu h_1) - 3\cos(r h_1)\cos(r\nu)}{r^3}\,d\omega \end{cases}$$

(eine strenge Begründung dieser Formeln s. diese Berichte 33, S. 13—18).

Wir denken uns um den Mittelpunkt O der die Punkte 1 und 2 verbindenden Graden eine Kugel mit dem Radius

$$r_{12};$$

die Schnittkurve ς dieser Kugelfläche und der Fläche ω zerlegt ω in einen Teil ω_1, der 1 und 2 enthält, und einen Teil $\omega - \omega_1$.

Wir konstruieren ferner um O als Zentrum eine Kugel mit dem Radius R [der größer ist, als eine bestimmte endliche Länge], deren Schnittkurve Σ mit ω die Fläche ω in einen Teil $\omega_1 + \omega_2$, der 1 und 2 enthält, und einen Teil $\omega - \omega_1 - \omega_2$ zerlegt, so daß man für den von $\omega_1 + \omega_2$ herrührenden Teil in den Integralen 5).

[1]) $\cos(h_2 x) = \cos(h_1 x) + \varepsilon_1, \ldots$, wobei $|\varepsilon_1| \overline{\overline{<}}$ endl. Konst. $r_{12}, \ldots$

$$6)\quad \begin{cases} |\varkappa - \varkappa_1| \overline{<} A \cdot r^\lambda, \\ |\varkappa - \varkappa_2| \overline{<} A \cdot r^\lambda, \\ |\cos(\nu h_{1(2)})| \overline{<} r f, \\ |\cos(r\nu)| \overline{<} r F \end{cases}$$

(f und F endlich) setzen kann.

Es folgt dann zunächst für die von ω_1 herrührenden Integrale 5):

$$7)\quad \begin{cases} \int\limits_{\omega_1} (\varkappa - \varkappa_{1(2)}) \frac{\cos(\nu h_{1(2)}) - 3\cos(r h_{1(2)})\cos(r\nu)}{r^3} d\omega \\ \qquad \overline{<} \text{endl. Konst. } A \cdot \int\limits_{\omega_1} \frac{d w}{r^{2-\lambda}}, \\ \qquad \overline{<} \text{endl. Konst. } A \cdot r_{12}^\lambda \text{ [1]}. \end{cases}$$

Andererseits ist:

$$\text{abs.} \left| \int\limits_{\omega_2} (\varkappa - \varkappa_1) \frac{\cos(\nu h_1) - 3\cos(r h_1)\cos(r\nu)}{r^3} d\omega \right|_1^2$$

$$\overline{<} \int\limits_1^2 \int\limits_{\omega_2} \left\{ |\varkappa(\xi\eta\varsigma) - \varkappa(xyz)| + A r_{12}^\lambda \right\} \left| \frac{\partial}{\partial s} \frac{\cos(\nu h_1) - 3\cos(r h_1)\cos(r\nu)}{r^3} \right| d\omega\, ds,$$

wobei das Integral $\int\limits_1^2 (-)\, ds$ über eine zwischen 1 und 2 auf ω_1 beliebig verlaufende Kurve s zu erstrecken ist, deren Abstände von ω_2 kleiner als r_{12} sind. Somit ist:

$$\text{abs.} \left| \int\limits_{\omega_2} (\varkappa - \varkappa_1) \frac{\cos(\nu h_1) - 3\cos(r h_1)\cos(r\nu)}{r^3} d\omega \right|_1^2$$

$$\overline{<} \text{endl. Konst. } A \cdot \int\limits_1^2 \left\{ \int\limits_{\omega_2} \frac{d\omega}{r^{3-\lambda}} + r_{12}^\lambda \int\limits_{\omega_2} \frac{d\omega}{r^3} \right\}^{2)} ds,$$

$$\overline{<} \text{endl. Konst. } A \cdot \left\{ \frac{1}{r_{12}^{1-\lambda}} + \frac{r_{12}^\lambda}{r_{12}} \right\} \int\limits_1^2 ds, \text{[1]}$$

$$< \text{endl. Konst. } A \cdot r_{12}^\lambda,$$

[1] Mit Berücksichtigung der letzten Formel S. 292 meines Lehrbuchs der Potentialtheorie I.

[2] Mit Rücksicht darauf, daß r_{12} kleiner als jedes r.

und wir erhalten weiter:

$$\text{abs.}\ (\varkappa_2 - \varkappa_1)\left|\int\limits_{\omega_2}\frac{\cos(\nu h_1) - 3\cos(r h_1)\cos(r\nu)}{r^3}\,d\omega\right|_2$$

$$\overline{\overline{<}}\ \text{endl. Konst. } A\cdot r_{12}^{\lambda}\left|\int\limits_{\omega_2}\frac{d\omega}{r^2}\right|_2{}^{1)},$$

$$\overline{<}\ \text{endl. Konst. } A\cdot r_{12}^{\lambda''},{}^{1)}\quad(\lambda'' < \lambda).$$

Ferner ist:

$$\text{abs.}\left|\int\limits_{\omega_2}(\varkappa-\varkappa_2)\cdot\left[\frac{\cos(\nu h_2)-3\cos(r h_2)\cos(r\nu)}{r^3}-\frac{\cos(\nu h_1)-3\cos(r h_1)\cos(r\nu)}{r^3}\right]d\omega\right|_2$$

$$\overline{<}\ \text{endl. Konst. } A\cdot r_{12}\left|\int\limits_{\omega_2}\frac{d\omega}{r^{3-\lambda}}\right|_2$$

$$\overline{<}\ \text{endl. Konst. } A\cdot r_{12}^{\lambda},{}^{1)}$$

und es folgt aus den drei letzten Formeln:

$$8)\quad\begin{cases}\text{abs.}\left[\left|\int\limits_{\omega_2}(\varkappa-\varkappa_2)\,\frac{\cos(\nu h_2) - 3\cos(r h_2)\cos(r\nu)}{r^3}\,d\omega\right|_2\right. \\ \left.-\left|\int\limits_{\omega_2}(\varkappa-\varkappa_1)\,\frac{\cos(\nu h_1) - 3\cos(r h_1)\cos(r\nu)}{r^3}\,d\omega\right|_1\right] \\ \qquad\overline{<}\ \text{endl. Konst. } A\cdot r_{12}^{\lambda''}.\end{cases}$$

Schließlich ist, da die Entfernungen des Flächenteiles $\omega - \omega_1 - \omega_2$ von 1 und 2 größer sind, als eine bestimmte, endliche Länge:

$$9)\quad\begin{cases}\text{abs.}\left[\left|\int\limits_{\omega-\omega_1-\omega_2}(\varkappa-\varkappa_1)\,\frac{\cos(\nu h_2) - 3\cos(r h_2)\cos(r\nu)}{r^3}\,d\omega\right|_2\right. \\ \left.-\left|\int\limits_{\omega-\omega_1-\omega_2}(\varkappa-\varkappa_1)\,\frac{\cos(\nu h_1) - 3\cos(r h_1)\cos(r\nu)}{r^3}\,d\omega\right|_1\right] \\ \qquad<\ \text{endl. Konst. abs. Max. } \varkappa\cdot r_{12}, \\ \left|(\varkappa_2-\varkappa_1)\int\limits_{\omega-\omega_1-\omega_2}\frac{\cos(\nu h_2) - 3\cos(r h_2)\cos(r\nu)}{r^3}\,d\omega\right|_2 \\ \qquad\overline{<}\ \text{endl. Konst. } A\cdot r_{12}^{\lambda},\end{cases}$$

[1]) Vgl. Anm. 1 u. 2 auf Seite 6.

und die Addition der Ungleichungen 7), 8), 9) ergibt die behauptete Ungleichung 4).

Um mit Hilfe der Ungleichung 4), die wir jetzt bewiesen haben, die eigentliche Behauptung unseres Satzes zu beweisen, müssen wir uns noch zwei Hilfssätze zurecht legen:

Hilfssatz I.[1]) Das Flächenpotential:

$$V = \int_{\omega} H \frac{d\omega}{r}, \tag{10}$$

in dem H lediglich als eine endliche[2]) Funktion der Stelle auf der Fläche vorausgesetzt wird, hat die Eigenschaft, daß für zwei Punkte 1 und 2 der Oberfläche in genügend kleiner Entfernung r_{12}:

$$\text{abs.}\, |V|_1^2 \leqq \cdot A \cdot \text{abs. Max.}\, H \cdot r_{12}^{\Lambda}, \tag{11}$$

wo Λ einen beliebigen echten Bruch, und A eine endliche Konstante vorstellt, die lediglich von der Gestalt der Fläche ω und der Wahl des echten Bruches Λ abhängt.

Hilfssatz 2.[3]) Die ersten Ableitungen des Flächenpotentials:

$$V = \int_{\omega} H \frac{d\omega}{r},$$

in dem H als eine derart stetige Funktion der Stelle auf der Fläche ω vorausgesetzt wird, daß für zwei Punkte 1 und 2 der Fläche in genügend kleiner Entfernung r_{12}:

$$\text{abs.}\, (H_2 - H_1) < A \cdot r_{12}^{\lambda}, \quad \left|\begin{array}{l} \Lambda \text{ endlich,} \\ \lambda \text{ ein echter Bruch,} \end{array}\right. \tag{12}$$

[1]) Allgemeinere Fassung eines bereits früher von mir bewiesenen Satzes (Lehrbuch der Potentialtheorie I, S. 388).

[2]) Endlich im Sinne von „endlich und integrabel".

[3]) Erweiterung eines Satzes von Hölder (Beiträge zur Potentialtheorie, Stuttgart 1882). Beiläufig sei bemerkt, daß sich der Satz auch für $\lambda' = \lambda$ beweisen läßt, doch genügt die hier gegebene weniger allgemeine Fassung für unsere Zwecke.

sind selbst auf der Fläche derart stetig, daß für zwei Punkte 1 und 2 der Innen(Außen)seite von ω in genügend kleiner Entfernung r_{12}:

$$13)\quad \text{abs.}\left(\left|\frac{\partial V}{\partial \sigma}\right|_2 - \left|\frac{\partial V}{\partial \sigma}\right|_1\right) \overline{<} (BA + C \text{ abs. Max. } H)\, r_{12}^{\lambda'}, \quad (\lambda' < \lambda)$$

wenn σ eine ganz beliebige (tangentiale oder normale oder irgend eine andere) Richtung vorstellt, B, C endliche Konstanten, die lediglich von der Gestalt der Fläche ω und den Zahlen $\lambda\lambda'$ abhängen.

Zum Beweise des Hilfssatzes 1 denken wir uns um den Mittelpunkt O der Graden 1, 2 eine Kugel mit dem Radius r_{12}, die ω in der Kurve ς schneidet und in einen 1 und 2 enthaltenden Teil ω_1 und einen Teil $\omega - \omega_1$ zerlegt. Dann ist der von ω_1 herrührende Teil der Differenz $| V_2 - V_1 |$

$$\text{abs.}\ | V_{\omega_1} |_1^2 \overline{<} 2\int_{\omega_1} H \frac{d\omega}{r},$$

$$\overline{<} 2 \text{ abs. Max. } H. \int_{\omega_1} \frac{d\omega}{r},$$

$$\overline{<} 2 \text{ abs. Max. } H \cdot r_{12}\ ^{1})$$

der von $\omega - \omega_1$ herrührende Teil der Differenz $| V_2 - V_1 |$

$$\text{abs.}\ | V_{\omega - \omega_1} |_1^2 \overline{<} \text{endl. Konst. abs. Max. } H \cdot r_{12} \cdot \text{Max.} \int_{\omega_1} \frac{d\omega}{r^2}$$

auf der Graden 1, 2,

$$\overline{<} \text{endl. Konst. abs. Max. } H \cdot r_{12} \cdot \frac{1}{r_{12}^{1-A}},\ ^{2})$$

wo A einen beliebigen echten Bruch vorstellt. Durch Addition der beiden Ungleichungen ergibt sich aber die Behauptung des Hilfssatzes 1.

Zum Beweise des Hilfssatzes 2 bedenken wir zunächst, daß, wenn x eine beliebige Richtung vorstellt:

---

[1]) Formel 46) oder 47) S. 38 u. 39 meines Lehrbuchs der Potentialtheorie I.

[2]) Mit Rücksicht auf die letzte Formel S. 392 dieses Lehrbuchs.

[1]) $\frac{\partial}{\partial x}\left(\int\limits_\omega \frac{d\omega}{r}\right) = -\int\limits_\omega \cos(\nu x) \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega - \int\limits_\omega \frac{K\cos(\nu x)}{r} d\omega,$

K Krümmungsmaß von $d\omega$,

daß somit, da

$$-\int\limits_\omega \cos(\nu x) \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega = \pm 2\pi \cos(\nu x) - \left|\int\limits_\omega \cos(\nu x) \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega\right|_\omega$$

mit Rücksicht auf die Ungleichung 4) sogar stetige erste Ableitungen auf ω hat, und nach dem Hilfssatz 1:

$$\text{abs.} \int\limits_\omega \frac{K\cos(\nu x)}{r} d\omega \Big|_1^2 \overline{<} a r_{12}^{A} \quad \Big|\ \begin{array}{l}\text{bei genügend kleinem } r_{12},\\ A \text{ beliebiger echter Bruch, } a \text{ endlich}\end{array}$$

auch:

$$14) \qquad \text{abs.} \left|\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_\omega \frac{d\omega}{r}\right|_1^2 < \text{endl. Konst. } r_{12}^{A}, \quad \Big|\ A \text{ beliebiger echter Bruch.}$$

Zum Beweise des Hilfssatzes 2 haben wir daher nur die Ungleichung:

$$15) \ \text{abs.} \ \Psi_1^2 \overline{<} (\text{endl. Konst. } A + \text{endl. Konst. abs. Max. } H) r_{12}^{\lambda'}, (\lambda' < \lambda)$$

nachzuweisen, wenn wir

$$16) \qquad \Psi_{1(2)} = \int\limits_\omega \{H(\xi\eta\zeta) - H(xyz)\} \frac{\cos(rx)}{r^2} d\omega \Big|_{1(2)}$$

setzen.

Wir teilen die Fläche ω in drei Teile: Wir denken uns, ähnlich wie wir dies schon einmal gehabt haben, um den Mittelpunkt O der die Punkte 1 und 2 verbindenden Graden eine Kugel mit dem Radius r_{12}; die Schnittkurve ς dieser Kugelfläche und der Fläche ω zerlegt ω in einen Teil ω_1, der 1 und 2 enthält, und einen Teil $\omega - \omega_1$. Wir konstruieren ferner um O als Zentrum eine Kugel mit dem Radius R (der größer ist als eine bestimmte, endliche Länge), deren Schnittkurve Σ mit ω die Fläche ω in einen Teil $\omega_1 + \omega_2$, der 1 und 2 enthält, und einen Teil $\omega - \omega_1 - \omega_2$ zerlegt, so daß

---

[1]) Mit Rücksicht auf Formel 54) S. 42 dieses Lehrbuchs.

[2]) Anm. 2 S. 9.

man für den von $\omega_1 + \omega_2$ herrührenden Teil in den Integralen 16):

$$| H - H_{1\,(2)} | \overline{<} A \cdot r^{\lambda}$$

setzen kann.

Es folgt dann zunächst für den von ω_1 herrührenden Teil der Differenz $| \Psi |_1^2$.

$$17) \quad \begin{cases} \text{abs.} \; \Psi_{\omega_1} |_1^2 \overline{<} \text{endl. Konst. } A \left\{ \left| \int\limits_{\omega_1} \frac{d\omega}{r^{2-\lambda}} \right|_1 + \left| \int\limits_{\omega_1} \frac{d\omega}{r^{2-\lambda}} \right|_2 \right\} \\ \qquad \overline{<} \text{endl. Konst. } A \cdot r_{12}^{\lambda}, \end{cases}$$

für den von ω_2 herrührenden Teil der Differenz $| \Psi |_1^2$

$$18) \begin{cases} \text{abs.} \, | \Psi_{\omega_2} |_1^2 \\ \overline{<} \text{abs.} \left| \int\limits_{\omega_2} (H - H_1) \frac{\cos(rx)}{r^2} d\omega \right|_1^2 + \text{abs.} (H_2 - H_1) \left| \int\limits_{\omega_2} \frac{\cos(rx)}{r^2} d\omega \right|_1^2 \\ \overline{<} \text{endl. Konst. } A \left[r_{12} \left\{ \frac{1}{r_{12}^{1-\lambda}} + \frac{r_{12}^{\lambda}}{r_{12}} \right\} + r_{12}^{\lambda'} \right], \; (\lambda' < \lambda)\,^{1)} \\ \overline{<} \text{endl. Konst. } A \, r_{12}^{\lambda'}. \end{cases}$$

schließlich für den von $\omega - \omega_1 - \omega_2$ herrührenden Teil der Differenz $| \Psi |_1^2$, da die Entfernungen der Fläche $\omega - \omega_1 - \omega_2$ von den Punkten der Graden 1, 2 größer als eine bestimmte, endliche Länge sind:

$$19) \begin{cases} \text{abs.} \left[\left. \int\limits_{\omega - \omega_1 - \omega_2} (H - H_1) \frac{\cos(rx)}{r^2} d\omega \right|_2 - \left| \int\limits_{\omega - \omega_1 - \omega_2} (H - H_1) \frac{\cos(rx)}{r^2} d\omega \right|_1 \right] \\ \qquad \overline{<} \text{endl. Konst. abs. Max. } H \cdot r_{12} \\ \text{abs.} (H_2 - H_1) \int\limits_{\omega - \omega_1 - \omega_2} \frac{\cos(rx)}{r^2} d\omega < \text{endl. Konst. } A \cdot r_{12}^{\lambda}, \end{cases}$$

und die Addition der Formeln 17), 18), 19) ergibt die Ungleichung 15) und damit auch die Behauptung des Hilfssatzes 2.

---

[1]) Man vergleiche die analoge Untersuchung S. 7.

Wir werden nunmehr leicht zeigen können, daß die Ungleichung 4) die Behauptung unseres eigentlichen Satzes I nach sich zieht, daß die ersten Ableitungen der Funktion:

$$20)\qquad W_1 = \int_\omega W_\omega \frac{\cos(r\nu)}{r^2}\, d\omega$$

auf der Oberfläche ω derart stetig sind, daß, wenn σ eine ganz beliebige Richtung vorstellt, für zwei Punkte 1 und 2 der Fläche ω in genügend kleiner Entfernung r_{12}:

$$21)\qquad \text{abs.}\left[\left|\frac{\partial W_1}{\partial \sigma}\right|_2 - \left|\frac{\partial W_1}{\partial \sigma}\right|_1\right] < (c_1 A + c_2 \,\text{abs. Max.}\, \varkappa)\, r_{12}^{\lambda'}$$

wo c_1 und c_2 zwei endliche Konstanten vorstellen, die lediglich von der Gestalt der Fläche ω abhängen und von den Zahlen $\lambda\lambda'$, λ' einen beliebigen echten Bruch $< \lambda$ in strengem Sinne.

Es ist in der Tat:

$$22)^{1)}\quad \begin{cases} \dfrac{\partial W_1}{\partial \sigma} = \displaystyle\int_\omega \frac{\partial W_\omega}{\partial \sigma} \frac{\cos(r\nu)}{r^2}\, d\omega \\ -\displaystyle\int_\omega \cos(\nu\sigma) \left\{ \frac{\partial W_\omega}{\partial \xi} \frac{\cos(rx)}{r^2} + \frac{\partial W_\omega}{\partial \eta} \frac{\cos(ry)}{r^2} + \frac{\partial W_\omega}{\partial \varsigma} \frac{\cos(rz)}{r^2} \right\} d\omega \end{cases}$$

d. h. es setzt sich $\frac{\partial W_1}{\partial \sigma}$ aus ersten Ableitungen von Flächenpotentialen

$$\int_\omega H \frac{d\omega}{r}$$

additiv zusammen, in denen die Funktion H die Voraussetzung des Hilfssatzes 2 erfüllt. Der Hilfssatz 2 beweist somit unmittelbar die Behauptung unseres eigentlichen Satzes I.

---

[1]) Formel 59 S. 46 meines Lehrbuchs der Potentionltheorie I., wenn wir allgemein durch Überstreichung einer Richtung h die tangentiale Richtung mit den Richtungskosinussen:

$$\cos(\bar{h}x) = \cos(hx) - \cos(h\nu)\cos(\nu x),\quad \cos(\bar{h}y) = \cos(hy) - \cos(h\nu)\cos(\nu y),$$
$$\cos(\bar{h}z) = \cos(hz) - \cos(h\nu)\cos(\nu z),$$

andeuten.

§ 2.

II. Die Werte des über eine stetig gekrümmte, geschlossene Fläche ω zu erstreckenden Integrales:

23) $$W = \int\limits_{\omega} \varkappa \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega,$$

in dem $\varkappa$ eine (abteilungsweise) stetige Funktion der Stelle auf ω vorstellt, auf der Fläche selbst:

24) $$W_\omega = \frac{1}{2}(W_a + W_i)$$

sind selbst auf der Fläche ω derart stetig, daß für 2 Punkte 1 und 2 in genügend kleiner Entfernung r_{12}:

25) $$\text{abs.} \mid W_\omega \mid_1^2 \overline{<} a \text{ abs. Max. } \varkappa \cdot r_{12}^{\Lambda},$$

wo Λ einen beliebigen echten Bruch darstellt und a eine endliche Konstante, die lediglich von der Gestalt der Fläche und der Wahl des echten Bruches Λ abhängt.

Der Beweis ist dem Beweise des Hilfssatzes 1 des § 1 einigermaßen analog. Wir teilen die Fläche ω in drei Teile: Wir denken uns, ähnlich wie wir dies bereits getan haben, um den Mittelpunkt O der die Punkte 1 und 2 verbindenden Graden eine Kugel mit dem Radius r_{12}; die Schnittkurve ς dieser Kugelfläche und der Fläche ω zerlegt die Fläche ω in einen Teil ω_1, der 1 und 2 enthält, und einen Teil $\omega - \omega_1$. Wir konstruieren ferner um O als Zentrum eine Kugel mit dem Radius R (der größer ist als eine bestimmte, endliche Länge), deren Schnittkurve Σ mit ω die Fläche ω in einen Teil $\omega_1 + \omega_2$, der 1 und 2 enthält, und einen Teil $\omega - \omega_1 - \omega_2$ zerlegt, so daß man für den von $\omega_1 + \omega_2$ herrührenden Teil in den Integralen:

$$W_{\omega, 1(2)} = \left| \int\limits_{\omega} \varkappa \cdot \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega \right|_{\omega, 1(2)}$$

den Werten von W_ω in 1 und 2 auf der Fläche

26) $$|\cos(r\nu)| \overline{<} \text{endl. Größe} \cdot r_{12}$$

setzen kann.

Es folgt dann zunächst für den von ω_1 herrührenden Teil der Differenz $|W_\omega|_1^2$:

27) $$\begin{cases} \text{abs. } |W_{\omega_1}|_1^2 \overline{<} \text{endl. Konst. abs. Max. } \varkappa \left\{ \left| \int\limits_{\omega_1} \frac{d\omega}{r} \right|_1 + \left| \int\limits_{\omega_1} \frac{d\omega}{r} \right|_2 \right\}, \\ \qquad < \text{endl. Konst. abs. Max. } \varkappa \cdot r_{12} \text{ (Vgl. Anm. }^{1}\text{) S. 9),} \end{cases}$$

für den von ω_2 herrührenden Teil der Differenz $|W_\omega|_1^2$:

28) $$\begin{cases} \text{abs. } |W_{\omega_2}|_1^2 < \text{endl. Konst. abs. Max. } \varkappa \cdot r_{12} \cdot \text{Max. } \int\limits_{\omega_2} \frac{d\omega}{r^2} \\ \qquad \text{auf der Graden 1, 2,} \\ \overline{<} \text{endl. Konst. abs. Max. } \varkappa \cdot r_{12}^{A}, \text{ (}A\text{ beliebiger echter Bruch, vgl. S. 9);} \end{cases}$$

schließlich für den von $\omega - \omega_1 - \omega_2$ herrührenden Teil der Differenz $|W_\omega|_1^2$, da die Entfernungen des Gebietes $\omega - \omega_1 - \omega_2$ von der Graden 1, 2 größer sind, als eine bestimmte, endliche Länge:

29) $$\text{abs. } |W_{\omega - \omega_1 - \omega_2}|_1^2 \overline{<} \text{endl. Konst. abs. Max. } \varkappa \cdot r_{12},$$

und die Addition der Formeln 27), 28), 29) ergibt die Behauptung 25). Wir wollen diesem Satze den folgenden als Zusatz anfügen, obgleich er eigentlich bereits in die Theorie der Raumpotentiale gehört:

Zusatz zu II. Das Raumpotential:

30) $$V = \int\limits_i \frac{d\tau}{r} \text{ über den Innenraum von } \omega$$

hat an der Oberfläche ω zweite Ableitungen, die an der Innen(Außen)seite von ω derart stetig sind, daß für zwei Punkte 1 und 2 in genügend kleiner Entfernung r_{12}:

31) $$\text{abs. } \left| \frac{\partial^2 V}{\partial h_1 \partial h_2} \right|_1^2 \overline{<} \text{endl. Konst. } r_{12}^{A}$$

wo $h_1 h_2$ zwei beliebige Richtungen vorstellen, Λ einen ganz beliebigen echten Bruch und b eine endliche Konstante, die lediglich von der Gestalt der Fläche ω und der Wahl des echten Bruches Λ abhängig ist.

Wir bedenken, daß infolge einer einfachen Greenschen Umformung:

32)[1] $$\frac{\partial V}{\partial h_1} = \int_\omega \frac{\cos(\nu h_1)}{r} d\omega,$$

daraus folgt unmittelbar die Behauptung unseres Zusatzes mit Hilfe des Hilfssatzes 2 des § 1.

Man kann den Zusatz auch direkt aus dem Satze II herleiten, aus diesem Grunde füge ich denselben in diesem § hinzu, für uns war aber die Herleitung mit Hilfe des bereits bewiesenen Hilfssatzes 2 des vorigen § einfacher.

§ 3.

III. Ist θ die Lösung des Dirichletschen Problems für den Innenraum einer stetig gekrümmten, geschlossenen Fläche ω mit den gegebenen Randwerten $\bar{\theta}$, welche auf der Fläche derart stetig vorausgesetzt werden, daß für zwei Punkte 1 und 2 der Fläche in genügend kleiner Entfernung r_{12}

33) $$\text{abs.}\left|\bar{\theta}\right|_1^2 < A\, r_{12}^\lambda, \quad \left|\begin{array}{l} A \text{ endlich,} \\ \lambda \text{ echter Bruch,} \end{array}\right.$$

dann ist allgemein für zwei Punkte 1 und 2 des Innenraumes in genügend kleiner Entfernung r_{12}:

34) $$\text{abs.}\left|\theta\right|_1^2 \overline{\overline{<}} (a\, A + b \text{ abs. Max. } \bar{\theta})\, r_{12}^\lambda$$

wo a, b endliche Konstanten vorstellen, die lediglich von der Gestalt der Fläche und der Zahl λ abhängen.

---

[1]) Vgl. z. B. Formeln 88, S. 62 meines Lehrbuchs der Potentialtheorie I.

Wir beweisen zunächst, daß das Potential der Doppelbelegung:

$$35)\qquad W = \int_\omega \bar{\theta}\, \frac{\cos(r\nu)}{r^2}\, d\omega$$

im Innenraume derart stetig ist, daß für zwei Punkte 1 und 2 in genügend kleiner Entfernung r_{12}

$$36)\quad \text{abs.}\, | W |_1^2 \overline{<} (\text{endl. Konst. } A + \text{endl. Konst. abs. Max. } \bar{\theta})\, r_{12}^\lambda .$$

Sobald die Entfernung der beiden Punkte 1 und 2 von der Fläche größer ist, als eine bestimmte, endliche Länge, sind ja alle Ableitungen von W stetig, wir haben daher nur zu beweisen, daß man um jeden Punkt der Oberfläche einen Raum abgrenzen kann, in dem die größte Entfernung zweier Punkte kleiner (gleich) ist, als eine bestimmte, endliche Länge, und in dem für zwei Punkte 1 und 2 in genügend kleiner Entfernung r_{12}:

$$37)\quad \text{abs.}\, | W |_1^2 \overline{<} (\alpha A + \beta \text{ abs. Max. } \bar{\theta})\, r_{12}^\lambda, \quad | \alpha, \beta \text{ endlich.}$$

Die Voraussetzung 33) bestehe für

$$r_{12} < \sigma ,$$

wo σ größer sein soll, als eine bestimmte, endliche Länge; wir schlagen um den Mittelpunkt O der Graden 1, 2 eine Kugel mit dem Radius $\frac{\mathfrak{c}\sigma}{2}$, wo $\mathfrak{c}$ einen echten Bruch vorstellen soll und bezeichnen mit 3 den Punkt der Fläche ω, der von der Verbindungsgraden 1, 2 die kürzeste Entfernung hat. Zerlegen wir den Teil von ω, dessen Entfernungen von 0 kleiner sind als $\frac{\sigma}{2}$ noch in zwei Teile ω_1 und ω_2 so, daß ω_2 alle Punkte enthalte, deren Entfernungen von den Punkten 1 und 2 größer sind, als r_{12} — ω_1 kann sich auch auf null reduzieren —, dann ist der von ω_1 herrührende Teil der Differenz

$$| W - W_3 |_1^2 = \left| \int_\omega (\theta - \theta_3)\, \frac{\cos(r\nu)}{r^2}\, d\omega \right|_1^2 :$$

$$
38)\left\{\begin{aligned}
&\text{abs. } \left|W - W_3\right|_{\omega_1}{}_1^2 \\
&< \text{endl. Konst. } A r_{12}^{\lambda} \left[\left|\int_{\omega_1} \frac{|\cos(r\nu)|}{r^2} d\omega\right|_1 + \left|\int_{\omega_1} \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega\right|_2 \right], \\
&< \text{endl. Konst. } A r_{12}^{\lambda},
\end{aligned}\right.
$$

der von ω_2 herrührende Teil der Differenz $\left|W - W_3\right|_1^2$

$$
39)\left\{\begin{aligned}
&\text{abs. } \left|W - W_3\right|_{\omega_2}{}_1^2 \\
&\overline{<} \int_1^2 \int_{\omega_2} (\bar{\theta}(\xi\eta\varsigma) - \bar{\theta}_3) \frac{2}{r^3} d\omega\, ds\ ^{1)}, \\
&< \int_1^2 \int_{\omega_2} \text{endl. Konst. } \frac{r^{\lambda}}{r^3} d\omega\, ds < \text{endl. Konst. } \frac{A r_{12}}{r_{12}^{1-\lambda}},\ ^{2)}
\end{aligned}\right.
$$

endlich, da alle Punkte der Fläche $\omega - \omega_1 - \omega_2$ von den Punkten der Verbindungsgrade 1, 2 größer sind, als eine bestimmte, endliche Länge, der von $\omega - \omega_1 - \omega_2$ herrührende Teil der Differenz $\left|W - W_3\right|_1^2$:

$$
40)\quad \text{abs. } \left|W - W_3\right|_{\omega - \omega_1 - \omega_2}{}_1^2 \overline{<} \text{endl. Konst. abs. Max. } \bar{\theta} \cdot r_{12},
$$

und es folgt die Formel 37) durch Addition der Ungleichungen 38), 39), 40).

Damit ist aber auch die Behauptung 36) für irgend zwei Punkte des Innenraumes von ω in genügend kleiner Entfernung r_{12} bewiesen.

Nach der Methode des arithmetischen Mittels ist nun

$$
41)\qquad \theta = + \frac{1}{2\pi} \int_{\omega} \bar{\theta} \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega + w,
$$

wo w das Potential einer Doppelbelegung darstellt, deren erste Ableitungen nach dem Satze I bereits im ganzen Innenraume stetig sind. Durch die Formel 36) ist daher die Behauptung des Satzes III mitbewiesen.

---

[1]) Das Integral $\int_1^2 (-) ds$, analog früheren Betrachtungen, über die Verbindungsgrade 1, 2 zu erstrecken.

[2]) Man vgl. S. 6.

Zusatz 1 zu III. Ein jedes Flächenpotential

$$V = \int_\omega H \frac{d\omega}{r} \tag{42}$$

ist, wenn man über die Funktion H lediglich voraussetzt, daß sie endlich[1]) ist, im ganzen Innenraume und Außenraume derart stetig, daß für zwei Punkte 1 und 2 in genügend kleiner Entfernung r_{12}:

$$\text{abs. } \left| V \right|_1^2 < \text{endl. Konst. abs Max. } H \cdot r_{12}^{\Lambda} \quad \Big| \; \Lambda \text{ beliebiger echter Bruch.} \tag{43}$$

Der Zusatz folgt unmittelbar nach dem Hilfssatz 1 des § 1 und dem Satze III.

Zusatz 2 zu III. Das Raumpotential[2])

$$V = \int_\tau \frac{d\tau}{r} \tag{44}$$

besitzt zweite Ableitungen, welche im ganzen Innen-(Außen)raume derart stetig sind, daß für zwei Punkte des Innen(Außen)raumes 1 und 2 in genügend kleiner Entfernung r_{12}:

$$\text{abs. } \left| \frac{\partial^2 V}{\partial h_1 \partial h_2} \right|_1^2 < a\, r_{12}^{\Lambda} \tag{45}$$

wenn h_1 und h_2 zwei ganz beliebige Richtungen vorstellen, Λ einen beliebigen echten Bruch und a eine endliche Konstante, die lediglich von der Gestalt der Fläche ω und der Wahl des echten Bruches Λ abhängt.

Der Zusatz folgt unmittelbar aus dem Zusatz zu dem Satze II und dem Satze III.

Zusatz 3 zu III. Besteht die Voraussetzung des Satzes III:

$$\text{abs. } \left| \theta \right|_1^2 < A\, r_{12}^{\lambda} \tag{46}$$

---

[1]) Im Sinne von „endlich und integrabel“.

[2]) Eine Verallgemeinerung dieses Satzes findet man im zweiten Abschnitt.

für

$$r_{12} < \sigma, \tag{47}$$

wo σ größer ist als eine bestimmte, endliche Länge, und konstruieren wir um irgend einen Punkt der Oberfläche als Zentrum eine Kugel mit dem Radius

$$(1 - \Delta)\frac{\sigma}{2}$$

wo Δ eine beliebig kleine Zahl vorstellt, so ist für zwei Punkte 1 und 2 des Raumes T, den diese Kugel und der Innenraum von ω gemeinsam haben:

$$\text{abs.}\ \theta\,\Big|_1^2 \overline{<} \left(\text{endl. Konst.}\ A + \frac{\text{endl. Konst.}}{\Delta \cdot \sigma}\ \text{abs. Max.}\ \theta\right) r_{12}^{\lambda}. \tag{48}$$

Wir haben in dem Beweise von III nur den echten Bruch $c = 1 - \Delta$ zu setzen; die beiden Ungleichungen 38) und 39) bleiben ungeändert, die Ungleichung 40) schreiben wir:

$$\text{abs.}\ \Big| W - W_3 \Big|_{\omega - \omega_1 - \omega_2}\Big|_1^2 \overline{<} \text{endl. Konst. abs. Max.}\ \bar{\theta} \cdot r_{12}\ \text{Max.} \int_{\omega - \omega_1 - \omega_2} \frac{d\omega}{r^3}$$

auf der Strecke 1, 2,

und es folgt die Behauptung, wenn wir noch bedenken, daß das Integral rechts

$$\overline{<} \frac{\text{endl. Konst.}^{1)}}{\text{kleinste Entfernung der Fläche}\ \omega - \omega_1 - \omega_2\ \text{von 1 und 2}}$$

$$< \frac{\text{endl. Konst.}}{\Delta \cdot \sigma}$$

also

$$\text{abs.}\ \Big| W - W_3 \Big|_{\omega - \omega_1 - \omega_2}\Big|_1^2 \overline{<} \frac{\text{endl. Konst.}}{\Delta \cdot \sigma}\ \text{abs. Max.}\ \bar{\theta} \cdot r_{12}, \tag{49}$$

durch Addition von 38), 39) und 49).

Zusatz 4 zu III. Sind außer $\bar{\theta}$ die ersten tangentialen Ableitungen von $\bar{\theta}$ auf der Fläche ω derart stetig, daß für zwei Punkte 1 und 2 der Fläche ω in genügend kleiner Entfernung r_{12}:

---

[1]) Vgl. Anmerkung [1]) S. 6.

$$50)\qquad \text{abs.} \left|\frac{\partial \theta}{\partial h}\right|_1^2 < A \cdot r_{12}^{\lambda}, \quad \left|\begin{array}{l}\lambda \text{ echter Bruch,}\\ A \text{ endliche Konstante,}\end{array}\right.$$

wo h[1]) eine beliebige tangentiale Richtung vorstellt, so sind die ersten Ableitungen der Potentialfunktion θ im ganzen Raume i derart stetig, daß für zwei Punkte 1 und 2 des Raumes i in genügend kleiner Entfernung r_{12}:

$$51)\qquad \text{abs.} \left|\frac{\partial \theta}{\partial \sigma}\right|_1^2 < (a A + b \text{ abs. Max. } \theta)\, r_{12}^{\lambda'}, \quad (\lambda' < \lambda)$$

wo σ eine ganz beliebige Richtung vorstellt, a, b endliche Konstanten, die lediglich von der Gestalt der Fläche ω und den Zahlen $\lambda \lambda'$ abhängen.

Es folgt zunächst die behauptete Stetigkeit der ersten Ableitungen von W von der Art 51) genau in derselben Weise, wie die Behauptung des Satzes I aus der Ungleichung 4) S. 5. Schließlich ist nach der Methode des arithmetischen Mittels:

$$52)\qquad \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial W}{\partial \sigma} + \frac{\partial w_1}{\partial \sigma},$$

wo w_1 das Potential einer Doppelbelegung darstellt, deren erste Ableitungen bereits im ganzen Raume i nach Satz I von der Art 51) eindeutig und stetig sind. Damit ist auch der Zusatz 4 bewiesen.

---

[1]) $\cos(h_2 x) = \cos(h_1 x) + \varepsilon_1 \ldots$, wobei $|\varepsilon_1| <$ endl. Konst. r_{12}.

II. Abschnitt.

Einige Sätze über Raumpotentiale.

Ein bekannter Satz von Hölder[1]) sagt aus, daß die zweiten Ableitungen des Raumpotentials:

$$V = \int_\tau E \frac{d\tau}{r} \tag{1}$$

eindeutig und stetig sind, im ganzen Innenraume sowohl, als auch im ganzen Außenraume, falls die absoluten Funktionsdifferenzen von E in zwei Punkten 1 und 2 des Raumes τ

$$\overline{\overline{<}} A \cdot r_{12}^\lambda$$

sind, bei genügend kleiner Entfernung r_{12} der beiden Punkte, wo A eine endliche Konstante, λ eine positive, von null verschiedene Zahl vorstellt.

Er sagt ferner aus, daß die Sprünge der zweiten Ableitungen bei dem Durchgange durch die Oberfläche des Gebietes τ dieselben sind, wie bei der Voraussetzung endlicher erster Ableitungen von E, und daß schließlich auch die obige Bedingung für E für die Gültigkeit der Formel:

$$\Delta V = -4\pi E$$

in jedem Punkte des Innenraumes hinreichend ist.

Ich werde in diesem zweiten Abschnitt vier Sätze beweisen, von denen der erste eine Erweiterung des Hölderschen Satzes ist; die drei anderen Sätze beziehen sich auf ein diesem Satze verwandtes Gebiet der Potentialtheorie, und es sei hervorgehoben, daß dieselben in meinen Abhandlungen zur Elastizitätstheorie eine ganz außerordentlich wichtige Rolle spielen werden.

---

[1]) Hölder, Beiträge zur Potentialtheorie, Tübingen 1882.

§ 1.

I. Erfüllt die Funktion E der Stelle des Raumes τ die Bedingung, daß die absoluten Funktionsdifferenzen für zwei Punkte 1 und 2 in genügend kleiner Entfernung r_{12}:

$$\overline{\overline{<}}\, A \cdot r_{12}^{\lambda}$$

sind, wo A eine endliche Konstante, λ einen echten Bruch vorstellt, so sind auch die zweiten Ableitungen des Raumpotentiales:

$$V = \int_{\tau} E \frac{d\tau}{r}$$

sowohl im Innenraume, als auch im Außenraume derart stetig, daß die absoluten Funktionsdifferenzen für zwei Punkte 1 und 2 des Innen(Außen)raumes in genügend kleiner Entfernung r_{12}

$$< (a A + b \text{ abs. Max. } E)\, r_{12}^{\lambda}$$

sind, wo a und b endliche Konstanten vorstellen, die lediglich von der Gestalt des Gebietes τ abhängig sind und von der Zahl λ.

Es seien 1 und 2 zwei Punkte des Innenraumes in der Entfernung r_{12}, wir beschränken uns auf die Betrachtung im Innenraume, die Betrachtung im Außenraume ist Schritt für Schritt dieselbe. Wir denken uns um den Mittelpunkt O der Graden 1, 2 eine Kugel mit dem Radius r_{12} und nennen das Gebiet, welches τ und diese Kugel gemein haben, τ_1, dann ist, wenn wir

$$2)\left\{\begin{aligned} V &= \underbrace{\overbrace{\int_{\tau} [E(\xi\eta\varsigma) - E(xyz)] \frac{d\tau}{r}}^{V''} + \int_{\tau} (E(xyz) - E_1) \frac{d\tau}{r}}_{V'} + \int_{\tau} E_1 \frac{d\tau}{r}, \\ V' &= V - \int_{\tau} E_1 \frac{d\tau}{r}, \\ V'' &= \int_{\tau} [E(\xi\eta\varsigma) - E(xyz)] \frac{d\tau}{r} \end{aligned}\right.$$

setzen, mit D_2 irgend eine zweite Ableitung bezeichnen und r_{12} genügend klein annehmen:

$$\left| D_2 V''_{\tau_1} \right|_1 < 2A \left| \int_{\tau_1} \frac{d\tau}{r^{3-\lambda}} \right|_1, \quad \left| D_2 V''_{\tau_1} \right|_2 < 2A \left| \int_{\tau_1} \frac{d\tau}{r^{3-\lambda}} \right|_2,$$

wobei durch den Index τ_1 angedeutet werden soll, daß das Potential V'' nur über den Raum τ_1 erstreckt werden soll, also:

$$\text{abs.} \left| D_2 V''_{\tau_1} \right|_1^2 \overline{\overline{<}} 2A \left[\left| \int_{\tau_1} \frac{d\tau}{r^{3-\lambda}} \right|_1 + \left| \int_{\tau_1} \frac{d\tau}{r^{3-\lambda}} \right|_2 \right].$$

Aus der durch eine einfache Green'sche Umformung folgenden Formel:

$$3) \quad \int_{\tau_1} \frac{d\tau}{r^{3-\lambda}} = \frac{1}{\lambda} \int_{\omega_1} \frac{\cos(r\nu)}{r^{2-\lambda}} d\omega, \quad \left| \begin{array}{l} \omega_1 \text{ Oberfläche von } \tau_1, \\ \nu \text{ innere Normale von } d\omega, \end{array} \right.$$

ergibt sich:

$$\left| \int_{\tau_1} \frac{d\tau}{r^{3-\lambda}} \right|_1 < \frac{1}{\lambda} r_{12}^{\lambda} \left| \int_{\omega_1} \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega \right|_1, \quad \left| \int_{\tau_1} \frac{d\tau}{r^{3-\lambda}} \right|_2 \overline{\overline{<}} \frac{1}{\lambda} r_{12}^{\lambda} \left| \int_{\omega_1} \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega \right|_2,$$

somit:

$$\text{abs.} \left| D_2 V''_{\tau_1} \right|_1^2 \overline{\overline{<}} \frac{16\pi}{\lambda} A r_{12}^{\lambda}, \quad \text{abs.} \left| D_2 V'_{\tau_1} \right|_1^2 < \text{endl. Konst. } A \cdot r_{12}^{\lambda} \text{ [1]}$$

und:

$$4) \quad \begin{array}{c} \text{abs.} \left| D_2 (V - V') \right|_1^2 + \text{abs.} \left| D_2 V'_{\tau_1} \right|_1^2 \\ \overline{\overline{<}} \text{ endl. Konst. } A \cdot r_{12}^{\lambda} + \text{endl. Konst. abs. Max. } E \cdot r_{12}^{\lambda} \text{ [2]}. \end{array}$$

Wir schlagen jetzt um O eine zweite Kugel mit dem Radius R; wir können denselben so wählen, daß derselbe größer

---

[1]) Da $D_2 \int_{\tau_1} \frac{d\tau}{r}$ stets endlich ist.

[2]) Da stets bei genügend kleinem r_{12}: abs. $\left| D_2 \int_{\tau} \frac{d\tau}{r} \right|_1^2 \overline{\overline{<}}$ endl. Konst. r_{12}^{Λ}, wo Λ einen beliebigen echten Bruch darstellt. (Zusatz 2 zu Satz III des I. Abschnitts.)

ist, als eine bestimmte, endliche Länge, aber dennoch genügend klein so, daß die Oberfläche ω_2 dieser Kugel den Raum $\tau - \tau_1$ in zwei Teile τ_2 und $\tau - \tau_1 - \tau_2$ zerlegt, und daß für je zwei Punkte 1 und 2 des Raumes $\tau_1 + \tau_2$:

$$\text{abs.}\left| E \right|_1^2 < A \cdot r_{12}^{\lambda}.$$

Es ist dann:

$$\text{abs.}\left| D_2 V'_{\tau_2} \right|_1^2 < \int_1^2 \int_{\tau_2} \left[\left| E(\xi\eta\varsigma) - E(xyz) \right| + A \cdot r_{12}^{\lambda} \right] \left| \frac{\partial D_2 \frac{1}{r}}{\partial s} \right| d\tau \, ds,$$

wobei wir durch den Index τ_2 andeuten, daß das Potential V' nur über den Raum τ_2 erstreckt werden soll, und unter ds ein Element der Graden 1, 2 [1]) verstehen, und es ist auf der Graden 1, 2:

$$\int_{\tau_2} \left[\left| E(\xi\eta\varsigma) - E(xyz) \right| + A r_{12}^{\lambda} \right] \left| \frac{\partial D_2 \frac{1}{r}}{\partial s} \right| d\tau < 6 A \int_{\tau_2} \frac{d\tau}{r^{4-\lambda}} + 6 A r_{12}^{\lambda} \int_{\tau_2} \frac{d\tau}{r^4}$$

oder, da entsprechend der Formel 3):

$$\int_{\tau_2} \frac{d\tau}{r^{4-\lambda}} = \frac{1}{\lambda - 1} \int_{\omega_1 + \omega_2} \frac{\cos(r\nu)}{r^{3-\lambda}} d\omega,$$ ν die in das Gebiet τ_2 hineingehende Normale von $d\omega$,

$$< \frac{12 A}{1 - \lambda} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{2} r_{12}\right)^{1-\lambda}} \cdot 4\pi + \frac{12 A}{1} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2} r_{12}} r_{12}^{\lambda} \cdot 4\pi$$

daraus folgt:

$$\int_{\tau_2} \left[\left| E(\xi\eta\varsigma) - E(xyz) \right| + A r_{12}^{\lambda} \right] \left| \frac{\partial D_2 \frac{1}{r}}{\partial s} \right| d\tau < 4\pi \frac{48(2-\lambda)}{1-\lambda} A \cdot r_{12}^{\lambda}$$

somit:

$$\text{5)} \qquad \text{abs.}\left| D_2 V'_{\tau_2} \right|_1^2 < 4\pi \frac{48(2-\lambda)}{1-\lambda} A r_{12}^{\lambda}.$$

Schließlich ist, da R größer ist als eine gegebene endliche Länge:

---

[1]) Falls die Verbindungsgrade 1, 2 nicht ganz im Innenraume verlaufen sollte, kann dieselbe durch eine andere zwischen 1 und 2 verlaufende, ganz im Innenraume liegende Kurve s ersetzt werden.

6) $\quad \text{abs.} \,|\, D_2 V'_{\tau-\tau_1-\tau_2} \,|_1^2 \overline{<} b' \text{ abs. Max. } E \cdot r_{12}, \quad (b' \text{ endlich}),$

und es folgt durch Addition von 4), 5), 6) die Behauptung:

7) $$\text{abs.} \,|\, D_2 V \,|_1^2 \overline{<} (a A + b \text{ abs. Max. } E)\, r_{12}^{\lambda}.$$

§ 2.

II. Die ersten Ableitungen des Raumpotentiales:

$$V = \int_\tau E \frac{d\tau}{r}$$

in dem E lediglich als endlich[1]) vorausgesetzt wird, sind im ganzen Raume derartig stetig, daß ihre absoluten Funktionsdifferenzen für zwei Punkte 1 und 2 in genügend kleiner Entfernung r_{12}

$$\overline{<} A \text{ abs. Max. } E \cdot r_{12}^{\lambda}$$

sind, wo man für λ einen beliebigen echten Bruch setzen kann und A eine endliche Konstante vorstellt, die lediglich von der Gestalt des Gebietes τ und der Wahl des echten Bruches λ abhängt.

Es seien 1 und 2 zwei Punkte des Raumes in der Entfernung r_{12}; wir denken uns um den Mittelpunkt O der Graden 1, 2 eine Kugel mit dem Radius r_{12} und nennen wieder das Gebiet, welches τ und diese Kugel gemein haben, τ_1, dann ist, wenn wir mit $D_1 V$ irgend eine erste Ableitung von V bezeichnen und r_{12} genügend klein annehmen:

$$|\, D_1 V_{\tau_1} \,|_1 \overline{<} 4\pi \text{ abs. Max. } E \cdot r_{12}^{\lambda}, \quad |\, D_1 V_{\tau_1} \,|_2 \overline{<} 4\pi \text{ abs. Max. } E \cdot r_{12}^{\lambda}$$

somit:

8) $$\text{abs.} \,|\, D_1 V_{\tau_1} \,|_1^2 \overline{<} 8\pi \text{ abs. Max. } E \cdot r_{12}^{\lambda}.$$

Es ist ferner:

$$\text{abs.} \,|\, D_1 V_{\tau-\tau_1} \,|_1^2 < \int_1^2 \left| \frac{\partial D_1 V_{\tau-\tau_1}}{\partial s} \right| ds$$

---

[1]) Endlich im Sinne von endlich und integrabel.

wenn wir wieder unter ds ein Element der Graden 1, 2 verstehen, und es ist auf der Graden 1, 2:

$$\left|\frac{\partial D_1 V_{\tau-\tau_1}}{\partial s}\right| < a \text{ abs. Max. } E \int\limits_{\tau-\tau_1} \frac{d\tau}{r^3} < \beta \frac{\text{abs. Max. } E}{r_{12}^{1-\lambda}} \int\limits_{\tau-\tau_1} \frac{d\tau}{r^{2+\lambda}},$$

a, β endliche Konstanten,

oder, da entsprechend der Formel 3):

$$\int\limits_{\tau-\tau_1} \frac{d\tau}{r^{2+\lambda}} = \frac{1}{1-\lambda} \int\limits_{\omega+\omega_1} \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega,$$

$\omega\omega_1$ Oberflächen von τ, τ_1, ν die in das Innere von $\tau-\tau_1$ gehenden Normalen,

auch:

$$< \frac{8}{1-\lambda} \text{ abs. Max. } E \frac{1}{r_{12}^{1-\lambda}},$$

daraus folgt:

$$\int\limits_1^2 \left|\frac{\partial D_1 V_{\tau-\tau_1}}{\partial s}\right| ds < \frac{8}{1-\lambda} \text{ abs. Max. } E \cdot r_{12}^{\lambda},$$

und:

$$\text{9)} \qquad \text{abs. } \left| D_1 V_{\tau-\tau_1} \right|_1^2 < \frac{8}{1-\lambda} \text{ abs. Max. } E \cdot r_{12}^{\lambda},$$

somit, durch Addition von 8) und 9) die Behauptung:

$$\text{10)} \qquad \text{abs. } \left| D_1 V \right|_1^2 \overline{<} A \text{ abs. Max. } E \cdot r_{12}^{\lambda}.$$

§ 3.

III. Verstehen wir unter θ eine Funktion der Stelle auf einer Kugelfläche vom Radius R, die derart[1]) stetig ist, daß die absolute Funktionsdifferenz für zwei Punkte 1 und 2 der Kugelfläche in genügend kleiner Entfernung r_{12}

$$\overline{<} A \cdot r_{12}^{\lambda},$$

[1]) Es ist möglich, daß man die Voraussetzung des Satzes:

$$\text{abs. } \left| \theta \right|_1^2 < A \cdot r_{12}^{\lambda}$$

entbehren kann, und daß die Stetigkeit von θ auf der Kugelfläche hinreichend ist; doch ist der Satz in der obigen Form für die Zwecke, für die wir ihn brauchen werden, ausreichend.

wo A eine endliche Konstante, λ einen echten Bruch vorstellt, und ist θ die Lösung des Dirichletschen Problems für den Innenraum der Kugel bei den Randwerten θ, so sind die zweimal nach der Normalen genommenen Ableitungen des Raumpotentials:

$$V = \int_i \theta \frac{d\tau}{r} \tag{11}$$

an der inneren (äußeren) Seite der Kugelfläche in folgender Weise darstellbar:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial \nu^2} &= 2\pi\bar{\theta} + \tfrac{1}{2}\int_\omega \bar{\theta}\cdot\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega - \frac{1}{2R}\frac{\partial}{\partial\nu}\int_i \theta\frac{d\tau}{r}, \text{ außen,} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \nu^2} &= -4\pi\bar{\theta} + \tfrac{1}{2}\int_\omega \bar{\theta}\cdot\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega - \frac{1}{2R}\frac{\partial}{\partial\nu}\int_i \theta\frac{d\tau}{r}, \text{ innen,} \\ &\nu \text{ innere Normale.} \end{aligned}\right. \tag{12}$$

Wir denken uns zum Beweise die Funktion $\bar{\theta}$ auf der Kugelfläche nach Kugelfunktionen entwickelt, was ja bei der Voraussetzung des Satzes gestattet ist:

$$\bar{\theta} = \sum_0^\infty {}_j\, Y_j(\mu, \varphi), \tag{13}$$

dann ist:

$$\theta = \sum_0^\infty {}_j \left(\frac{r_1}{R}\right)^j Y_j(\mu_1 \varphi_1) \text{ für jeden Punkt } (r_1 \mu_1 \varphi_1) \text{ in der Kugel,}$$

und:

$$V = \int_i \theta \frac{d\tau}{r} = 4\pi \sum_0^\infty {}_j \frac{1}{(2j+1)(2j+3)} \frac{R^{j+3}}{\varrho^{j+1}} Y_j(\mu, \varphi)$$

für jeden Punkt $(\varrho\,\mu\,\varphi)$ des Außenraums,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \nu^2} = 4\pi \sum_0^\infty {}_j \frac{(j+1)(j+2)}{(2j+1)(2j+3)} Y_j(\mu, \varphi) \tag{14}$$

außen an der Kugelfläche.

Da ferner:

$$\frac{1}{R}\cdot\frac{\partial V}{\partial \nu} = -4\pi \sum_0^\infty {}_j \frac{j+1}{(2j+1)(2j+3)} Y_j(\mu, \varphi) \tag{15}$$

und:

$$16)\qquad \int\limits_{\omega} \theta \frac{\cos(r\nu)}{r^2}\, d\omega = -4\pi \sum_0^\infty{}_j \frac{j}{2j+1}\, Y_j(\mu, \varphi)$$

außen an der Kugelfläche,

so folgt die erste Formel 12) unmittelbar aus 13), 14), 15) und 16).

Die zweite Formel 12) ergiebt sich, wenn man bedenkt, daß:

$$\left|\frac{\partial^2 V}{\partial \nu^2}\right|_a = 4\pi\theta + \left|\frac{\partial^2 V}{\partial \nu^2}\right|_i,$$

$$\left|\int\limits_{\omega} \theta \frac{\cos(r\nu)}{r^2}\, d\omega\right|_a = -4\pi\theta + \left|\int\limits_{\omega} \theta \frac{\cos(r\nu)}{r^2}\, d\omega\right|_i.$$

§ 4.

IV. Verstehen wir unter $\bar{\theta}$ eine Funktion der Stelle auf einer beliebigen, geschlossenen, stetig gekrümmten Fläche ω, und zwar eine derart stetige Funktion, daß die absoluten Funktionsdifferenzen für zwei Punkte 1 und 2 der Fläche in genügend kleiner Entfernung r_{12}

$$\overline{<} A\, r_{12}^{\lambda}, \quad (r_{12} \overline{<} \sigma),$$

wo A eine endliche Konstante, λ einen echten Bruch vorstellt, und ist θ die Lösung des Dirichletschen Problems für den Innenraum von ω bei den Randwerten $\bar{\theta}$, so ist die Funktion:

$$17)\qquad f = \bar{\theta} - \frac{1}{\pi}\left|\frac{\partial^2}{\partial \nu^2}\int\limits_i \theta \frac{d\tau}{r}\right|_a$$

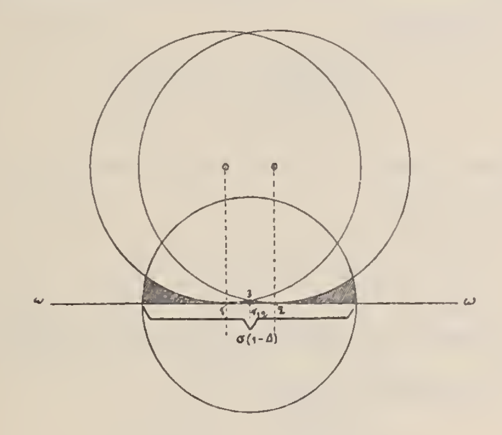
der Stelle an der Außenseite der Oberfläche ω derart stetig, daß die Funktionsdifferenzen für zwei Punkte 1 und 2 der Oberfläche in genügend kleiner Entfernung r_{12}

$$\overline{<}\left[\varepsilon_\sigma A + \left(c_1 + \frac{c_2}{\varepsilon_\delta \sigma}\right) \text{abs. Max. } \theta\right] r_{12}^{\lambda}, \quad (r_{12} \overline{<} (1-\delta)\sigma),$$

wo c_1 und c_2 zwei endliche Konstanten vorstellen, die lediglich von der Gestalt der Fläche ω und der Zahl λ

abhängen, δ eine Zahl, die beliebig klein gewählt werden kann, ε_σ und ε_δ zwei Konstanten, die mit abnehmendem σ bezw. δ zu null konvergieren, aber stets bestimmte, von null verschiedene positive Werte haben, sobald σ und δ von null verschiedene positive Werte besitzen.

Zum Beweise seien 1 und 2 zwei Punkte der Oberfläche ω in der Entfernung r_{12}, und wir denken uns zwei Kugeln mit einem Radius R, der größer ist als eine bestimmte, endliche Länge, aber doch klein genug, daß die beiden Kugeln, welche bezw. die Fläche ω in 1 und 2 berühren sollen, ganz in dem Innenraume von ω liegen. Auf dem Schnittkreise der beiden Kugeln, die wir in der Folge als erste und zweite Kugel be-



zeichnen wollen, markieren wir den Punkt 3, der von der Graden 1, 2 den kürzesten Abstand hat, und wir konstruieren um diesen Punkt 3 als Zentrum eine Kugel mit dem Durchmesser

$$\sigma (1 - \varDelta),$$

wo $\varDelta$ eine beliebig klein gewählte Zahl sein mag. Den Teil der Kugel, der im Innenraume von ω, aber außerhalb der beiden zuerst konstruierten Kugeln liegt, wollen wir mit T bezeichnen. T ist in der Figur schraffiert. Der Gang unseres Beweises wird nun folgender sein:

Wir werden zeigen, daß die Funktion:

$$18)\begin{cases} F = \theta - \dfrac{1}{\pi} \left| \dfrac{\partial^2}{\partial \nu^2} \displaystyle\int_{i-T} (\theta - \theta_1) \dfrac{d\tau}{r} \right|_a & \nu \text{ nach Belieben eine der 4 Richtungen:} \\ \text{innere Normale von } \omega \text{ in 1 oder 2,} \\ \text{innere Normale der beiden zuerst konstruierten Kugelflächen in 3,} \end{cases}$$

die Ungleichungen erfüllt:

$$19\text{a)}\ \text{abs.}\ F\Big|_1^3 < \left\{ \varepsilon_\sigma A + \left(b + \frac{c}{\varepsilon_\delta \sigma} \right) \text{abs. Max.}\ \theta \right\} r_{12}^\lambda, \quad r_{12} < (1-\delta)\sigma,$$

$$19\text{b)}\ \text{abs.}\ F\Big|_2^3 < \left\{ \varepsilon_\sigma A + \left(\beta + \frac{\gamma}{\varepsilon_\delta \sigma} \right) \text{abs. Max.}\ \theta \right\} r_{12}^\lambda, \quad b, c, \beta, \gamma \text{ endl. Konstanten,}$$

und daß die Funktion:

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial \nu^2} \int_T (\theta - \theta_1) \frac{d\tau}{r} \right|_a$$

in den beiden Punkten 1 und 2 Werte besitzt, deren absolute Differenz

$$< \left(\varepsilon_\sigma A + \left(B + \frac{C}{\Delta} \right) \text{abs. Max.}\ \theta \right) r_{12}^\lambda, \quad (B, C \text{ endl. Konstanten}),$$

und daraus wird sehr leicht die Behauptung folgen.

Wir wollen zuerst zeigen, daß

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial \nu^2} \int_T (\theta - \theta_1) \frac{d\tau}{r} \right|_a$$

die zuletzt behauptete Eigenschaft besitzt.

Wir bemerken hierzu zunächst, daß bei der Voraussetzung unseres Satzes über θ:

$$20)[1] \quad \text{abs.}\ \theta\Big|_1^2 < \text{endl. Konst.}\ \varrho_{12}^\lambda \quad \left| \begin{array}{l} \text{für zwei beliebige Punkte} \\ \text{des Innenraumes in genügend} \\ \text{kleinem Abstand } \varrho_{12}, \end{array} \right.$$

[1] Satz III des I. Abschnitts.

und im Besonderen in dem Raume T:

$$21)^{1)}\quad \text{abs.}\,|\theta|_1^2 \overline{<} \left(\text{endl. Konst. } A + \frac{\text{endl. Konst.}}{\Delta \cdot \sigma}\,\text{abs. Max. } \theta\right) \varrho_{12}^{\lambda}.$$

Wir teilen ferner das Gebiet T noch in zwei Teile (1) und (2), so daß (2) alle Punkte von T enthält, deren Abstand von den Punkten der Verbindungsgraden 1, 2 größer als r_{12} ist — das Gebiet (2) kann sich auch auf Null reduzieren. Dann ist:

$$\frac{\partial^2}{\partial \nu^2}\int\limits_{(1)} [\theta(\xi\,\eta\,\zeta) - \theta(x\,y\,z)]\,\frac{d\tau}{r}$$

$$\overline{<} \left(\text{endl. Konst. } A + \frac{\text{endl. Konst.}}{\Delta \cdot \sigma}\,\text{abs. Max. } \theta\right) \int\limits_{(1)} \frac{d\tau}{r^{3-\lambda}},$$

oder, da entsprechend der Formel 3) dieses Abschnittes:

$$\int\limits_{(1)} \frac{d\tau}{r^{3-\lambda}} = \frac{2}{\lambda}\int\limits_{\omega_1} \frac{\cos(r\nu)}{r^{2-\lambda}}\,d\omega$$

auch:

$$\overline{<} \left(\text{endl. Konst. } A + \frac{\text{endl. Konst.}}{\Delta \cdot \sigma}\,\text{abs. Max. } \theta\right) \int\limits_{\omega_1} \frac{\cos(r\nu)}{r^{2-\lambda}}\,d\omega$$

wenn wir mit ω_1 die Oberfläche von (1) bezeichnen. Nun ist für die Teile von ω_1, welche der Fläche ω und den beiden zuerst konstruierten Kugelflächen angehören:

$$\cos(r\nu) \overline{<} \text{endl. Konst. } r_{12}$$

für den übrigen Teil ist:

$$\int \frac{\cos(r\nu)}{r^{2-\lambda}} < r_{12}^{\lambda} \int \frac{|\cos(r\nu)|}{r^2}\,d\omega$$

und gleichfalls:

$$\int \frac{|\cos(r\nu)|}{r^2}\,d\omega \overline{<} \text{endl. Konst. } r_{12}.$$

---

[1]) Zusatz 3 zu III des I. Abschnitts.

Es ist somit jedenfalls:

$$\int\limits_{\omega_1} \frac{\cos (r \nu)}{r^{2-\lambda}} \, d\omega < \text{endl. Konst. } r_{12}^{1+\lambda}$$

und folglich:

$$\text{abs.} \left. \frac{\partial^2}{\partial \nu^2} \int\limits_{(1)} [\theta (\xi \eta \zeta) - \theta (x y z)] \frac{d\tau}{r} \right|_a$$

$$\overline{<} \left[\varepsilon_\sigma A + \frac{\text{endl. Konst.}}{\Delta} \text{abs. Max. } \bar{\theta} \right] r_{12}^{\lambda}, \quad \left| \begin{array}{l} \text{sowohl in 1,} \\ \text{als auch in 2.} \end{array} \right.$$

Da wieder infolge einer einfachen Greenschen Transformation:

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial \nu^2} \int\limits_{(1)} \frac{d\tau}{r} \right|_a = \left| \int\limits_{\omega_1} \cos (\nu \nu') \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu'} d\omega' \right|_a,$$

man vgl. z. B. Formel 88) S. 62 meines Lehrbuchs der Potentialtheorie I.,

ferner wiederum für die Teile von ω_1, welche der Fläche ω und den beiden zuerst konstruierten Kugelflächen angehören:

$$\cos (\nu \nu') = 1 + \varepsilon, \qquad |\varepsilon| \overline{<} \text{endl. Konst. } r_{12},$$

für den übrigen Teil:

$$\int \frac{|\cos (r \nu')|}{r^2} \, d\omega \overline{<} \text{endl. Konst. } r_{12},$$

so ist sowohl in 1, als auch in 2:

$$\text{abs.} \left. \frac{\partial^2}{\partial \nu^2} \int\limits_{(1)} \frac{d\tau}{r} \right|_a \overline{<} \text{endl. Konst. } r_{12},$$

somit:

$$(\bar{\theta}_2 - \bar{\theta}_1) \left| \frac{\partial^2}{\partial \nu^2} \int\limits_{(1)} \frac{d\tau}{r} \right|_a < \text{endl. Konst. abs. Max. } \bar{\theta} \cdot r_{12},$$

und es folgt:

$$22) \left\{ \begin{array}{c} \text{abs.} \left| \frac{\partial^2}{\partial \nu^2} \int\limits_{(1)} [\theta (\xi \eta \zeta) - \bar{\theta}_1] \frac{d\tau}{r} \right|_a \\ \overline{<} \left(\varepsilon_\sigma A + \left(\text{endl. Konst.} + \frac{\text{endl. Konst.}}{\Delta} \right) \text{abs. Max. } \theta \right) r_{12}^{\lambda}, \\ \text{(sowohl in 1, als auch in 2).} \end{array} \right.$$

Andererseits ist:

$$\text{abs.}\left|\frac{\partial^2}{\partial \nu^2}\int\limits_{(2)}(\theta-\theta_1)\frac{d\tau}{r}\right|_1^2$$

$$\overline{<}\int\limits_1^2\int\limits_{(2)}\left\{\theta(\xi\eta\zeta)-\theta(xyz)\right|+\left(\text{endl.K.}A+\frac{\text{endl.K.}}{\varDelta\cdot\sigma}\text{abs.M.}\theta\right)r_{12}^{\lambda}\Big\}\frac{\partial^3\frac{1}{r}}{\partial\nu^2\,\partial s}d\tau\,ds,$$

wenn wir mit ds ein Element der Verbindungsgraden 1, 2 [1]) bezeichnen, somit:

$$\overline{<}\left(\text{endl.Konst.}A+\frac{\text{endl.Konst.}}{\varDelta\cdot\sigma}\text{abs.Max.}\theta\right)\int\limits_1^2\left\{\int\limits_{(2)}\frac{d\tau}{r^{4-\lambda}}+r_{12}^{\lambda}\int\limits_{(2)}\frac{d\tau}{r^4}\right\}ds;$$

da entsprechend der Formel 3) dieses Abschnitts:

$$\int\limits_{(2)}\frac{d\tau}{r^{4-\lambda}}=\frac{1}{\lambda-1}\int\limits_{\omega_2}\frac{\cos(r\nu)}{r^{3-\lambda}}\,d\omega,$$

ω_2 Oberfläche von (2),
ν die in das Innere von (2) hineingehenden Normalen,

auch:

$$\overline{<}\left(\text{endl. Konst. }A+\frac{\text{endl. Konst.}}{\varDelta\cdot\sigma}\text{abs. Max. }\theta\right)$$

$$\int\limits_1^2\left\{\int\limits_{\omega_2}\frac{\cos(r\nu)}{r^{3-\lambda}}\,d\omega+r_{12}^{\lambda}\int\limits_{\omega_2}\frac{\cos(r\nu)}{r^3}\,d\omega\right\}ds.$$

Wieder ist für die Teile der Fläche ω_2, welche der Fläche ω und den zuerst konstruierten Kugelflächen angehören:

$$\cos(r\nu)\ \overline{<}\ \text{endl. Konst. }\sigma.$$

Für den übrigen Teil ist:

$$\int\frac{|\cos(r\nu)|}{r^2}\,d\omega<\text{endl. Konst. }\sigma,$$

es folgt somit:

$$\int\limits_{\omega_2}\frac{\cos(r\nu)}{r^{3-\lambda}}\,d\omega+r_{12}^{\lambda}\int\limits_{\omega_2}\frac{\cos(r\nu)}{r^3}\,d\omega<\text{endl. Konst. }\sigma\,\frac{r_{12}^{\lambda}}{r_{12}}$$

[1]) Vgl. Anmerkung [1]) S. 24.

und:

$$23)\quad \text{abs.}\left|\frac{\partial^2}{\partial \nu^2}\int\limits_{(2)}(\theta-\bar\theta_1)\frac{d\tau}{r}\right|_1^2 < \left(\varepsilon_\sigma A + \frac{\text{endl. Konst.}}{\Delta}\,\text{abs. Max.}\,\bar\theta\right) r_{12}^\lambda.$$

Durch Addition von 22) und 23) ergibt sich:

$$24)\quad \begin{cases} \text{abs.}\left|\dfrac{\partial^2}{\partial \nu^2}\displaystyle\int\limits_T(\theta-\theta_1)\frac{d\tau}{r}\right|_{a\,1}^2 \\ \overline{<}\left(\varepsilon_\sigma A + \left(\text{endl. Konst.} + \dfrac{\text{endl. Konst.}}{\Delta}\right)\text{abs. Max.}\,\bar\theta\right) r_{12}^\lambda. \end{cases}$$

Wir gehen jetzt zum Beweise der Formel 19 a) über. Wir teilen zum Beweise derselben das Gebiet $i-T$ in vier Teile, 1. in die Kugel T_1, deren Oberfläche ω in 1 berührt, 2. in den Teil T_2 von $i-T-T_1$, welcher außerhalb der Kugel mit dem Radius $\frac{\sigma}{2}(1-\Delta)$ um den Punkt 3 als Zentrum liegt, drittens in den Teil T_3 von $i-T-T_1-T_2$, dessen Abstände von den Punkten der Verbindungsgraden 1, 3 größer sind, als r_{12}, und viertens in den übrig bleibenden Teil T_4 von $i-T$.

Dann ist zunächst analog 22) und 23):

$$25)\quad \begin{cases} \text{abs.}\left|\dfrac{\partial^2}{\partial \nu^2}\displaystyle\int\limits_{T_4}(\theta-\bar\theta_1)\frac{d\tau}{r}\right|_{1\,a}^3 \\ \overline{<}\left(\varepsilon_\sigma A + \left(\text{endl. Konst.} + \dfrac{\text{endl. Konst.}}{\Delta}\right)\text{abs. Max.}\,\bar\theta\right) r_{12}^\lambda, \end{cases}$$

$$26)\quad \begin{cases} \text{abs.}\left|\dfrac{\partial^2}{\partial \nu^2}\displaystyle\int\limits_{T_3}(\theta-\theta_1)\frac{d\tau}{r}\right|_1^3 \\ \overline{<}\left(\varepsilon_\sigma A + \dfrac{\text{endl. Konst.}}{\Delta}\,\text{abs. Max.}\,\bar\theta\right) r_{12}^\lambda; \end{cases}$$

es ist ferner:

$$27)\quad \begin{cases} \text{abs.}\left|\theta - \dfrac{1}{\pi}\dfrac{\partial^2}{\partial \nu^2}\displaystyle\int\limits_{T_1}(\theta-\bar\theta_1)\frac{d\tau}{r}\Big|_a\right|_1^3 \\ \overline{<}\ \text{endl. Konst. abs. Max.}\,\bar\theta\cdot r_{12}^\lambda\ {}^{1)} \end{cases}$$

nach dem Satze III dieser Abhandlung.

[1]) Mit Rücksicht auf Satz II dieses Abschnitts und Satz II des I. Abschnitts.

Schließlich ist:

$$28)\quad \begin{cases} \text{abs.}\left|\dfrac{\partial^2}{\partial \nu^2}\displaystyle\int_{T_2}(\theta-\bar{\theta}_1)\frac{d\tau}{r}\right|_1^3 \\ < \text{endl. Konst. abs. Max. } \bar{\theta}\cdot\dfrac{1}{\frac{1}{2}\sigma(1-\varDelta)-\frac{1}{2}r_{12}}\cdot r_{12},\text{[1]} \\ \leqq \dfrac{\text{endl. Konst.}}{D\cdot\sigma(1-\varDelta)}\text{ abs. Max. } \bar{\theta}\cdot r_{12}, \quad (r_{12}<\sigma(1-\varDelta)(1-D)). \end{cases}$$

Aus 25), 26), 27), 28) folgt nunmehr unmittelbar die Formel 19a), und analog die Formel 19b).

Berücksichtigt man, daß nach Zusatz 2 zu Satz II des I. Abschnitts:

$$29)\qquad \text{abs. } \bar{\theta}_1\left|\frac{\partial^2}{\partial \nu^2}\int_{\tau}\frac{d\tau}{r}\right|_1^2 \leqq \text{endl. Konst. abs. Max. } \bar{\theta}\cdot r_{12}^{\varDelta}$$

bei genügend kleinem r_{12}, $\varDelta$ ein ganz beliebiger echter Bruch, so ergibt sich aus 19a), 19b) und 24) unmittelbar die Behauptung unseres Satzes, wenn wir noch zeigen können, daß tatsächlich die Formeln 19a), 19b) bestehen, welche Richtung von den 4 Richtungen

innere Normale von ω in 1 oder 2,

innere Normalen der beiden ersten Kugelflächen in 3

wir auch wählen mögen.

Wir bemerken hierzu, daß die Fehler, welche wir machen, wenn wir eine dieser Richtungen durch eine andere derselben ersetzen,

$$\leqq \mathfrak{A}\cdot\text{endl. Konst. } r_{12}$$

sind, wenn $\mathfrak{A}$ den absolut größten Wert bezeichnet, den irgend eine der zweiten Ableitungen von

$$\int \theta\,\frac{d\tau}{r}\ \Big|\ \text{(hinerstreckt über eine der beiden zuerst konstruierten Kugeln)}$$

haben kann, da nur in 27) ein Fehler entstehen kann.

---

[1] Da $\displaystyle\int_{T_2}\frac{d\tau}{r^4}$ auf der Verbindungslinie 1, 3 kleiner als $\dfrac{\text{endl. Konst.}}{\text{kürzester Abstand von } T_2 \text{ nach dieser Verbindungslinie}}$.

Nun ist, wie bereits aus den Hölderschen Untersuchungen hervorgeht:

$$\mathfrak{A} < \varepsilon_\sigma A + \frac{\text{endl. Konst.}}{\sigma^{\lambda'}} \text{ abs. Max. } \theta, \quad \left| \begin{array}{l} \lambda' \text{ ein beliebiger,} \\ \text{echter Bruch,} \end{array} \right.$$

somit auch der gemachte Fehler

$$< \left(\varepsilon_\sigma A + \frac{\text{endl. Konst.}}{\sigma} \text{ abs. Max. } \bar{\theta}\right) r_{12},$$

und damit ist unser Satz vollständig bewiesen.

Abhandlungen zur Elastizitätstheorie.

I.

Allgemeine Lösung des elastischen Gleichgewichtsproblems bei gegebenen Verrückungen an der Oberfläche.

Von **A. Korn.**

(*Eingelaufen 13. Januar.*)

Die Methode der successiven Annäherungen ist im Anschluß an die bekannten, grundlegenden Arbeiten von Schwarz, Picard, Poincaré mit größtem Erfolge zur Lösung einer Reihe der wichtigsten Probleme der mathematischen Physik herangezogen worden.

Versuche, diese Methode auch zur Lösung der in der Elastizitätstheorie auftretenden Differentialgleichungen, und zwar zunächst der statischen Gleichungen:

$$1)\qquad \begin{cases} \Delta u + k\dfrac{\partial \theta}{\partial x} = -X, \\ \Delta v + k\dfrac{\partial \theta}{\partial y} = -Y, \quad \theta = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z} \\ \Delta w + k\dfrac{\partial \theta}{\partial z} = -Z, \end{cases}$$

anzuwenden, sind von Lauricella[1]) und E. und F. Cosserat[2]) gemacht worden, aber sie hatten bisher noch zu keinem be-

[1]) Lauricella, Ann. della R. Scuola Norm. Sup. di Pisa 1894; N. C. (4) 9, S. 97, 10, S. 5. Während der Drucklegung meiner Abhandlung erhielt ich Kenntnis von einer neuen, interessanten Untersuchung Herrn Lauricellas (Ann. di Mat. 1905), auf die ich hier noch hinweisen will; dieselbe beschränkt sich auf eine überall konvexe Grenzfläche.

[2]) E. und F. Cosserat, C. r. 126, S. 1089, 1898; 133, S. 145, 1901.

friedigenden Resultate geführt. Die Konvergenz der Reihen, welche die Lösungen darstellen sollen, ließ sich bei den Methoden von Lauricella und E. und F. Cosserat zwar beweisen, so lange man sich in endlicher Entfernung von der Oberfläche hält, bei unendlicher Annäherung an die Oberfläche lassen uns diese Untersuchungen aber vollständig im Stich, und es bleibt durchaus unsicher, ob die aufgestellten Reihen wirklich an der Grenze die geforderten Grenzbedingungen erfüllen, ja, ob dieselben überhaupt konvergent sind.

Um durch die Methode der successiven Annäherungen das elastische Gleichgewichtsproblem bei gegebenen Verrückungen an der Oberfläche in seiner ganzen Allgemeinheit zu lösen, ist ein von den früheren etwas verschiedener Ansatz nützlich. Mit Hilfe desselben gelingt es, wie in der vorliegenden Abhandlung gezeigt werden soll, nicht bloß, die Konvergenz der für die Lösungen aufgestellten Reihen in endlicher Entfernung von der Oberfläche zu beweisen, — wozu der Cosseratsche Grundgedanke hinreichend ist — sondern auch die Hauptschwierigkeit zu überwinden, nämlich zu zeigen, daß die aufgestellten Reihen auch bei unendlicher Annäherung an die Oberfläche konvergent bleiben und die geforderten Grenzbedingungen erfüllen.

Es wird in dieser Abhandlung gezeigt, daß die elastischen Gleichungen 1) bei gegebenen Grenzwerten von u, v, w an der Oberfläche ein und nur ein System von Lösungen u, v, w zulassen, für jeden beliebigen Wert von k, der der Ungleichung entspricht:

$$-1 < k < +\infty,$$

und diese Lösungen werden in Gestalt von unendlichen, stets konvergenten Reihen gegeben, bei gewissen Stetigkeitsvoraussetzungen über die Funktionen X, Y, Z, die Grenzwerte von u, v, w und ihre Ableitungen.

Damit ist das elastische Gleichgewichtsproblem bei gegebenen Verrückungen an der Oberfläche in seiner allgemeinsten Form gelöst.

§ 1.

Wir suchen drei in einem Gebiete τ eindeutige und stetige Funktionen u, v, w mit endlichen[1]) ersten Ableitungen, welche in dem Gebiete τ den Differentialgleichungen 1) genügen und an der Oberfläche ω von τ gegebene Grenzwerte

$$2) \qquad \begin{cases} u = \bar{u}, \\ v = \bar{v}, \\ w = \bar{w} \end{cases}$$

annehmen.

Über die als gegeben vorauszusetzenden Funktionen X, Y, Z der Stelle in τ wollen wir annehmen, daß sie (abteilungsweise) eindeutig und stetig sind, und zwar so, daß für je zwei Punkte 1 und 2 (eines Teilgebietes) die absoluten Funktionsdifferenzen

$$\overline{<} A\, r_{12}^{\lambda}$$

sind, bei genügend kleiner Entfernung r_{12} der beiden Punkte, wo A eine endliche Konstante, λ eine von null verschiedene positive Zahl vorstellt.[2])

Über die als gegeben vorauszusetzenden Funktionen

$$\bar{u},\ \bar{v},\ \bar{w}$$

der Stelle an ω wollen wir annehmen, daß sie mit ihren ersten Ableitungen eindeutig und stetig sind, und zwar sollen die ersten Ableitungen derart stetig sein, daß für je zwei Punkte 1 und 2 der Fläche ω die absoluten Funktionsdifferenzen (der ersten Ableitungen)

$$\overline{<} A'\, r_{12}^{\lambda'}$$

sind, bei genügend kleiner Entfernung r_{12} der beiden Punkte, wo A' eine endliche Konstante, λ' eine von Null verschiedene positive Zahl vorstellt.[3])

---

[1]) Endlich im Sinne von „endlich und integrabel".

[2]) Diese Bedingung ist im Besonderen erfüllt, wenn die ersten Ableitungen von X, Y, Z in τ endlich sind.

[3]) Diese Bedingung ist im Besonderen erfüllt, wenn die zweiten Ableitungen von $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ an ω endlich sind.

Bezeichnen wir mit U, V, W die Potentialfunktionen des Gebietes τ, welche bezw. die Grenzwerte $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$ an ω besitzen, so ergeben sich für die Funktionen:

$$3)\quad \begin{cases} u' = u - U, \\ v' = v - V, \\ w' = w - W \end{cases}$$

die Differentialgleichungen:

$$4)\quad \begin{cases} \Delta u' + k\dfrac{\partial \theta'}{\partial x} = -X - k\dfrac{\partial \Theta}{\partial x}, \\ \Delta v' + k\dfrac{\partial \theta'}{\partial y} = -Y - k\dfrac{\partial \Theta}{\partial y}, \\ \Delta w' + k\dfrac{\partial \theta'}{\partial z} = -Z - k\dfrac{\partial \Theta}{\partial z}, \end{cases}$$

wo wir noch:

$$5)\quad \begin{cases} \theta' = \dfrac{\partial u'}{\partial x} + \dfrac{\partial v'}{\partial y} + \dfrac{\partial w'}{\partial z}, \\ \Theta = \dfrac{\partial U}{\partial x} + \dfrac{\partial V}{\partial y} + \dfrac{\partial W}{\partial z} \end{cases}$$

gesetzt haben. Dazu kommen noch die Grenzbedingungen:

$$6)\quad \left.\begin{cases} u' = 0, \\ v' = 0, \\ w' = 0 \end{cases}\right\} \text{ an } \omega.$$

§ 2.

Das allgemeine Problem läßt sich somit auf das folgende zurückführen, das wir als das Hauptproblem des elastischen Gleichgewichts bezeichnen wollen:

Wir suchen drei in einem Gebiete τ eindeutige und stetige Funktionen u, v, w mit endlichen ersten Ableitungen, welche in dem Gebiete τ den Differentialgleichungen genügen:

$$7)\quad \begin{cases} \Delta u + k\dfrac{\partial \theta}{\partial x} = -f_1, \\ \Delta v + k\dfrac{\partial \theta}{\partial y} = -f_2, \\ \Delta w + k\dfrac{\partial \theta}{\partial z} = -f_3, \end{cases}$$

oder, was dasselbe ist, den Differentialgleichungen:

$$8)\quad \begin{cases} \Delta u - \mathfrak{k}\left(\Delta u - 2\dfrac{\partial \theta}{\partial x}\right) = -F_1, & & F_1 = (1-\mathfrak{k})f_1, \\ \Delta v - \mathfrak{k}\left(\Delta v - 2\dfrac{\partial \theta}{\partial y}\right) = -F_2, & k = \dfrac{2\mathfrak{k}}{1-\mathfrak{k}}, & F_2 = (1-\mathfrak{k})f_2, \\ \Delta w - \mathfrak{k}\left(\Delta w - 2\dfrac{\partial \theta}{\partial z}\right) = -F_3, & & F_3 = (1-\mathfrak{k})f_3, \end{cases}$$

und an der Oberfläche ω von τ die Grenzwerte:

$$8')\quad \begin{cases} u = 0, \\ v = 0, \\ w = 0 \end{cases}$$

annehmen.

Über die als gegeben vorauszusetzenden Funktionen $f_1\, f_2\, f_3$ der Stelle in τ wollen wir annehmen, daß sie in τ derart stetig sind,[1]) daß für zwei Punkte 1 und 2 in genügend kleiner Entfernung r_{12} die absoluten Funktionsdifferenzen

$$\overline{\overline{<}}\, A\, r_{12}^{\lambda}$$

sind, wo A eine endliche Konstante, λ eine von Null verschiedene, positive Zahl vorstellt, und überdies im Innenraume

$$8'')\quad \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} = 0$$

vorausgesetzt werden soll.

---

[1]) Diese Bedingung ist im besonderen erfüllt, wenn die ersten Ableitungen von $f_1\, f_2\, f_3$ in τ endlich sind.

Nach Lösung dieses Problems werden wir im § 7 zeigen, daß man in der Tat auch für $f_1\ f_2\ f_3$ drei Funktionen von der folgenden Form wählen darf:

$$f_1 = X + \frac{\partial \Theta}{\partial x},$$

$$f_2 = Y + \frac{\partial \Theta}{\partial y},$$

$$f_3 = Z + \frac{\partial \Theta}{\partial z}$$

wo X, Y, Z drei ganz beliebige Funktionen der Stelle in τ sind, die in τ nur derart stetig sind, daß für zwei Punkte 1 und 2 des Gebietes in genügend kleiner Entfernung r_{12} ihre absoluten Funktionsdifferenzen, sowie die von $\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$

$\overline{<} A\, r_{12}^{\lambda}$, | A endlich, λ positive, von Null verschiedene Zahl,

sind, und Θ eine allgemeine, stetige Potentialfunktion,[1]) deren Stetigkeit in τ dieselbe Bedingung erfüllt, wie die Stetigkeit der Funktionen X, Y, Z.

Wir werden die Lösung des Problems geben für jeden beliebigen Wert von k in den Grenzen

$$-1 < k < \infty$$

d. h. für jeden Wert von $\mathfrak{k}$ in den Grenzen:

$$-1 < \mathfrak{k} < +1 \quad \text{(in strengem Sinne)},$$

wenn also $\mathfrak{k}$ einen beliebigen positiven oder negativen echten Bruch vorstellt.

§ 3.

Daß für

$$-1 < k < \infty$$

nur ein System von Lösungen vorhanden ist, wenn man von vornherein die Existenz eines Systems von Lösungen voraus-

---

[1]) D. i. die Lösung des Dirichletschen Problems für den Innenraum τ bei gegebenen stetigen Randwerten $\overline{\Theta}$ an ω.

setzt, ist bekannt, ich füge den Beweis hier nur der Vollständigkeit halber hinzu.

Gäbe es zwei Systeme von Lösungen $u_1\, v_1\, w_1$ und $u_2\, v_2\, w_2$, dann wäre:

$$9)\quad \left\{\begin{aligned} &\Delta(u_1-u_2)+k\frac{\partial(\theta_1-\theta_2)}{\partial x}=0,\\ &\Delta(v_1-v_2)+k\frac{\partial(\theta_1-\theta_2)}{\partial y}=0,\\ &\Delta(w_1-w_2)+k\frac{\partial(\theta_1-\theta_2)}{\partial z}=0\end{aligned}\right| \quad \text{in } \tau,$$

und:

$$10)\quad \left\{\begin{aligned} &u_1-u_2=0,\\ &v_1-v_2=0,\\ &w_1-w_2=0\end{aligned}\right| \quad \text{an } \omega.$$

Wir multiplizieren die erste der Gleichungen 9) mit u_1-u_2, die zweite mit v_1-v_2, die dritte mit w_1-w_2, addieren und integrieren über τ, dann folgt:

$$\int_\tau \Big[(u_1-u_2)\,\Delta(u_1-u_2)+(v_1-v_2)\,\Delta(v_1-v_2)+(w_1-w_2)\,\Delta(w_1-w_2)$$
$$+k\left\{(u_1-u_2)\frac{\partial(\theta_1-\theta_2)}{\partial x}+(v_1-v_2)\frac{\partial(\theta_1-\theta_2)}{\partial y}+(w_1-w_2)\frac{\partial(\theta_1-\theta_2)}{\partial z}\right\}\Big]d\tau=0,$$

oder mit Rücksicht darauf, daß:

$$11)\quad \left\{\begin{aligned} &\Delta u=\frac{\partial\theta}{\partial x}-\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right],\\ &\Delta v=\frac{\partial\theta}{\partial y}-\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right],\\ &\Delta w=\frac{\partial\theta}{\partial z}-\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)\right],\end{aligned}\right.$$

auch:

$$\int_\tau \Big[(1+k)\left\{(u_1-u_2)\frac{\partial(\theta_1-\theta_2)}{\partial x}+(v_1-v_2)\frac{\partial(\theta_1-\theta_2)}{\partial y}+(w_1-w_2)\frac{\partial(\theta_1-\theta_2)}{\partial z}\right\}$$
$$-(u_1-u_2)\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial(v_1-v_2)}{\partial x}-\frac{\partial(u_1-u_2)}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial(u_1-u_2)}{\partial z}-\frac{\partial(w_1-w_2)}{\partial x}\right)\right]$$
$$-(v_1-v_2)\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial(w_1-w_2)}{\partial y}-\frac{\partial(v_1-v_2)}{\partial z}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial(v_1-v_2)}{\partial x}-\frac{\partial(u_1-u_2)}{\partial y}\right)\right]$$
$$-(w_1-w_2)\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial(u_1-u_2)}{\partial z}-\frac{\partial(w_1-w_2)}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial(w_1-w_2)}{\partial y}-\frac{\partial(v_1-v_2)}{\partial z}\right)\right]\Big]d\tau=0$$

oder nach einer einfachen Greenschen Umformung:

$$\text{12)}\quad \int_\tau \Big[(1+k)(\theta_1-\theta_2)^2 + \left\{\frac{\partial(w_1-w_2)}{\partial y} - \frac{\partial(v_1-v_2)}{\partial z}\right\}^2$$
$$+ \left\{\frac{\partial(u_1-u_2)}{\partial z} - \frac{\partial(w_1-w_2)}{\partial x}\right\}^2 + \left\{\frac{\partial(v_1-v_2)}{\partial x} - \frac{\partial(u_1-u_2)}{\partial y}\right\}^2\Big] d\tau = 0,$$

sobald somit $k+1$ positiv ist, solange also:

$$\text{13)}\qquad -1 < k < \infty$$

folgt:

$$\text{14)}\qquad \begin{cases} u_1 - u_2 = 0, \\ v_1 - v_2 = 0, \\ w_1 - w_2 = 0 \end{cases}$$

im ganzen Innenraume von ω: damit ist die Eindeutigkeit bewiesen.

§ 4.

Wir gehen nun zur Lösung der gestellten Aufgabe mit Hilfe der Methode der successiven Annäherungen über, und zwar gehen wir von den Gleichungen 8) aus. Wir bilden successive die folgenden Funktionen:

$$\text{15)}\quad \begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_\tau F_1 \frac{d\tau}{r} - U_0, \\ v_0 = \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_\tau F_2 \frac{d\tau}{r} - V_0, \\ w_0 = \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_\tau F_3 \frac{d\tau}{r} - W_0, \\ \left.\begin{aligned} u_j &= \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_\tau \theta_{j-1}\frac{d\tau}{r} - U_j + u_{j-1}, \\ v_j &= \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_\tau \theta_{j-1}\frac{d\tau}{r} - V_j + v_{j-1}, \\ w_j &= \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int_\tau \theta_{j-1}\frac{d\tau}{r} - W_j + w_{j-1}, \end{aligned}\right\} j = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

wo die $U_j\,V_j\,W_j$ die Lösungen des Dirichletschen Problems bei den Randwerten:

$$
16)\quad \left\{
\begin{aligned}
U_0 &= \frac{1}{4\pi}\int\limits_\tau F_1\frac{d\tau}{r}, & U_j &= \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_\tau \theta_{j-1}\frac{d\tau}{r}, \\
V_0 &= \frac{1}{4\pi}\int\limits_\tau F_2\frac{d\tau}{r}, & V_j &= \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_\tau \theta_{j-1}\frac{d\tau}{r}, \quad j = 1, 2 \ldots \\
W_0 &= \frac{1}{4\pi}\int\limits_\tau F_3\frac{d\tau}{r}, & W_j &= \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int\limits_\tau \theta_{j-1}\frac{d\tau}{r},
\end{aligned}
\right\} \text{an } \omega
$$

vorstellen.[1]) Können wir beweisen, daß:

$$
\begin{aligned}
&\lim_{j=\infty} \cdot\, \mathfrak{k}^j\left(\Delta u_j - 2\,\frac{\partial\theta}{\partial x}\right) = 0, \\
&\lim_{j=\infty} \cdot\, \mathfrak{k}^j\left(\Delta v_j - 2\,\frac{\partial\theta_j}{\partial y}\right) = 0, \\
&\lim_{j=\infty} \cdot\, \mathfrak{k}^j\left(\Delta w_j - 2\,\frac{\partial\theta_j}{\partial z}\right) = 0
\end{aligned}
$$

in τ in irgend welcher, im übrigen beliebig kleiner Entfernung von der Oberfläche, und daß die Reihen:

$$
\sum_0^\infty{}_j\, \mathfrak{k}^j u_j, \qquad \sum_0^\infty{}_j\, \mathfrak{k}^j v_j, \qquad \sum_0^\infty{}_j\, \mathfrak{k}^j w_j
$$

Funktionen darstellen, die in τ eindeutig und stetig sind und endliche erste Ableitungen besitzen, dann werden diese Funk-

---

[1]) Die Existenz dieser Funktionen $U_j\,V_j\,W_j$, ihre für uns in Betracht kommenden Stetigkeitseigenschaften, sowie die Formeln:

$$
15')\quad \left\{
\begin{aligned}
\Delta\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_\tau \theta_{j-1}\frac{d\tau}{r} &= -4\pi\frac{\partial\theta_{j-1}}{\partial x}, \\
\Delta\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_\tau \theta_{j-1}\frac{d\tau}{r} &= -4\pi\frac{\partial\theta_{j-1}}{\partial y}, \\
\Delta\frac{\partial}{\partial z}\int\limits_\tau \theta_{j-1}\frac{d\tau}{r} &= -4\pi\frac{\partial\theta_{j-1}}{\partial z}
\end{aligned}
\right.
$$

werden wir noch in diesem § beweisen.

tionen offenbar die Lösungen der gestellten Aufgabe darstellen. Wir werden zunächst zeigen, daß die Integrale:

$$J_j = \int_\tau \theta_j^2 \, d\tau \tag{17}$$

die Ungleichungen erfüllen:

$$\mathfrak{k}^{2j} \cdot J_j \leqq a \cdot \mathfrak{k}^{2j}, \tag{18}$$

wo $\mathfrak{k}$ ein beliebiger echter Bruch ist, a eine endliche Konstante.

Es ist in der Tat, wenn wir die Abkürzungen:

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{u}_j &= \frac{\partial w_j}{\partial y} - \frac{\partial v_j}{\partial z}, \\ \mathfrak{v}_j &= \frac{\partial u_j}{\partial z} - \frac{\partial w_j}{\partial x}, \\ \mathfrak{w}_j &= \frac{\partial v_j}{\partial x} - \frac{\partial u_j}{\partial y} \end{aligned}\right. \tag{19}$$

gebrauchen:

$$\int_\tau [\theta_j^2 + \mathfrak{u}_j^2 + \mathfrak{v}_j^2 + \mathfrak{w}_j^2] \, d\tau$$

$$= - \int_\tau \Bigg[u_j \left\{ \frac{\partial \theta_j}{\partial x} - \left(\frac{\partial \mathfrak{w}_j}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{v}_j}{\partial z} \right) \right\} + v_j \left\{ \frac{\partial \theta_j}{\partial y} - \left(\frac{\partial \mathfrak{u}_j}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{w}_j}{\partial x} \right) \right\}$$

$$+ w_j \left\{ \frac{\partial \theta_j}{\partial z} - \left(\frac{\partial \mathfrak{v}_j}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{u}_j}{\partial y} \right) \right\} \Bigg] d\tau.$$

$$= - \int_\tau (u_j \Delta u_j + v_j \Delta v_j + w_j \Delta w_j) \, d\tau,$$

$$= - \int_\tau \Bigg[u_j \left(\Delta u_{j-1} - 2 \frac{\partial \theta_{j-1}}{\partial x} \right) + v_j \left(\Delta v_{j-1} - 2 \frac{\partial \theta_{j-1}}{\partial y} \right)$$

$$+ w_j \left(\Delta w_j - 2 \frac{\partial \theta_{j-1}}{\partial z} \right) \Bigg] d\tau,$$

$$= \int_\tau [\theta_j \theta_{j-1} + \mathfrak{u}_j \mathfrak{u}_{j-1} + \mathfrak{v}_j \mathfrak{v}_{j-1} + \mathfrak{w}_j \mathfrak{w}_{j-1} - 2\, \theta_j \theta_{j-1}] \, d\tau,$$

somit:

$$\left\{\begin{aligned} \int_\tau [\theta_j^2 + \mathfrak{u}_j^2 + \mathfrak{v}_j^2 + \mathfrak{w}_j^2] \, d\tau = \int_\tau [&- \theta_j \theta_{j-1} + \mathfrak{u}_j \mathfrak{u}_{j-1} \\ &+ \mathfrak{v}_j \mathfrak{v}_{j-1} + \mathfrak{w}_j \mathfrak{w}_{j-1}] \, d\tau. \end{aligned}\right. \tag{20}$$

und hieraus folgt:

21)[1] $\int\limits_\tau [\theta_j^2 + \mathfrak{u}_j^2 + \mathfrak{v}_j^2 + \mathfrak{w}_j^2]\, d\tau < \int\limits_\tau (\theta_{j-1}^2 + \mathfrak{u}_{j-1}^2 + \mathfrak{v}_{j-1}^2 + \mathfrak{w}_{j-1}^2)\, d\tau$

also:

22) $$\begin{cases} \mathfrak{k}^{2j} J_j \leqq \mathfrak{k}^{2j} \int\limits_\tau [\theta_j^2 + \mathfrak{u}_j^2 + \mathfrak{v}_j^2 + \mathfrak{w}_j^2]\, d\tau \\ \leqq \mathfrak{k}^{2j} \int [\theta_0^2 + \mathfrak{u}_0^2 + \mathfrak{v}_0^2 + \mathfrak{w}_0^2]\, d\tau \leqq a\, \mathfrak{k}^{2j}, \end{cases}$$

wo $\mathfrak{k}$ einen echten Bruch und a eine endliche Konstante vorstellt.

Wir haben für die Gültigkeit dieser Ableitung nur noch zu begründen, daß bei unseren Voraussetzungen die in der Ableitung benützten Integrale einen Sinn haben, und daß die Greenschen Umformungen berechtigt sind.

Wir bedenken hierzu, daß nach Voraussetzung die Funktionen $F_1\, F_2\, F_3$ in τ derart stetig sind, daß für zwei Punkte 1 und 2 in genügend kleiner Entfernung ihre absoluten Funktionsdifferenzen

$$\leqq A \cdot r_{12}^\lambda$$

sind, wo λ einen ganz bestimmten echten Bruch, A eine endliche Konstante bezeichnen möge. Es sind aus diesem Grunde (Satz I des zweiten Abschnitts der vorangehenden Abhandlung) die zweiten Ableitungen der Raumpotentiale

$$\int\limits_\tau F_1 \frac{d\tau}{r},$$

$$\int\limits_\tau F_2 \frac{d\tau}{r},$$

$$\int\limits_\tau F_3 \frac{d\tau}{r}$$

[1] Nach der bekannten Schwarzschen Ungleichung ergibt sich ja aus 21):

$$\left[\int\limits_\tau (\theta_j^2 + \mathfrak{u}_j^2 + \mathfrak{v}_j^2 + \mathfrak{w}_j^2)\, d\tau\right]^2$$
$$< \int\limits_\tau (\theta_j^2 + \mathfrak{u}_j^2 + \mathfrak{v}_j^2 + \mathfrak{w}_j^2)\, d\tau \int (\theta_{j-1}^2 + \mathfrak{u}_{j-1}^2 + \mathfrak{v}_{j-1}^2 + \mathfrak{w}_{j-1}^2)\, d\tau.$$

in τ in ähnlicher Weise stetig, somit die zweiten Ableitungen von $u_0\, v_0\, w_0$ ebenfalls, solange man sich in endlicher, im übrigen beliebig kleinen Entfernung von der Oberfläche ω hält, und Gleiches folgt successive nach den Formeln 15) für die zweiten Ableitungen von $u_j\ v_j\ w_j$, wenn die θ_j stetige, allgemeine Potentialfunktionen sind.[1])

Die Gleichung 20), auf die es uns ankommt, wird durch einen strengen Grenzübergang erhalten, wenn wir zeigen können, daß die ersten Ableitungen der $u_j\, v_j\, w_j$ im ganzen Raume eindeutig und stetig sind.

Wir haben also noch zu beweisen, daß die θ_j infolge der Definitionen 15) stetige, allgemeine Potentialfunktionen[1]) des Innenraumes τ und daß alle ersten Ableitungen von $u_j\, v_j\, w_j$ im ganzen Innenraume eindeutig und stetig sind.

Wir werden nun in der Tat zeigen, daß die θ_j bei unseren Voraussetzungen stetige, allgemeine Potentialfunktionen und in τ derart stetig sind, daß für zwei Punkte 1 und 2 des Innenraumes in genügend kleiner Entfernung r_{12}

$$\text{abs.}\,|\,\theta_j\,|_1^2 \leqq C_j\, r_{12}^{\lambda_j}, \quad (0 < \lambda_j < 1),$$

wo C_j bei endlichem j eine endliche, von j abhängige Konstante vorstellt, die natürlich, worauf es uns vorläufig nicht ankommt, möglicherweise mit j unendlich wachsen könnte.[2])

Die Funktionen $U_0\, V_0\, W_0$ haben Randwerte, deren erste Ableitungen (Satz II des II. Abschnittes der vorstehenden Abhandlung) derart stetig sind, daß für zwei Punkte 1 und 2 der Fläche ω in genügend kleiner Entfernung r_{12} ihre absoluten Funktionsdifferenzen:

$$\leqq a \cdot \text{abs. Max.}\,(F_1,\, F_2.\, F_3) \cdot r_{12}^{\varLambda}$$

sind, wo $\varLambda$ einen ganz beliebigen echten Bruch und a eine endliche Konstante vorstellt, die lediglich von der Gestalt der

[1]) D. h. Lösungen eines Dirichletschen Problems mit stetigen Randwerten θ_j.

[2]) Diese Frage werden wir im späteren Verlauf der Abhandlung noch diskutieren.

Fläche ω und der Wahl der Zahl Λ abhängt. Die Funktionen $U_0\, V_0\, W_0$ sind somit[1]) Potentialfunktionen des Raumes τ, die im ganzen Innenraum derart stetig sind, daß für zwei Punkte 1 und 2 desselben in genügend kleiner Entfernung r_{12}:

$$\text{abs.} \left| \frac{\partial U_0}{\partial \sigma} \right|_1^2 \overline{\overline{<}} \text{ endl. Konst. } r_{12}^{\lambda},$$

wenn σ eine ganz beliebige Richtung vorstellt, da ja λ ein ganz bestimmter echter Bruch ist und wir Λ größer als λ wählen können. Außerdem ist:

$$\Delta u_0 = -F_1,$$
$$\Delta v_0 = -F_2,$$
$$\Delta w_0 = -F_3,$$

somit:

24) $$\Delta \theta_0 = 0, \text{ mit Rücksicht auf } 8'');$$

es ist also θ_0 eine stetige, allgemeine Potentialfunktion des Raumes τ, deren Stetigkeit in der ganzen Ausdehnung des Raumes τ derart ist, daß für zwei Punkte 1 und 2 des Raumes τ in genügend kleiner Entfernung r_{12}:

25) $$\text{abs.} \left| \theta_0 \right|_1^2 \overline{\overline{<}} \text{ endl. Konst. } r_{12}^{\lambda} \overline{\overline{<}} C_0\, r_{12}^{\lambda_0}, \quad \begin{array}{l} 0 < \lambda_0 < 1, \\ C_0 \text{ endlich.} \end{array}$$

Es ist nun weiter:

26) $$\begin{cases} u_1 = u_0 + \dfrac{1}{2\pi} \dfrac{\partial}{\partial x} \displaystyle\int_\tau \theta_0 \frac{d\tau}{r} - U_1, \\ v_1 = v_0 + \dfrac{1}{2\pi} \dfrac{\partial}{\partial y} \displaystyle\int_\tau \theta_0 \frac{d\tau}{r} - V_1, \\ w_1 = w_0 + \dfrac{1}{2\pi} \dfrac{\partial}{\partial z} \displaystyle\int_\tau \theta_0 \frac{d\tau}{r} - W_1, \end{cases}$$

und die ersten Ableitungen der Randwerte der Potentialfunktionen $U_1\, V_1\, W_1$:

---

[1]) Zusatz 4 zu Satz III des I. Abschnitts der vorstehenden Abhandlung.

$$27)\quad \left\{ \begin{aligned} U_1 &= \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_\tau \theta_0 \frac{d\tau}{r}, \\ V_1 &= \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_\tau \theta_0 \frac{d\tau}{r}, \\ W_1 &= \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int_\tau \theta_0 \frac{d\tau}{r} \end{aligned} \right\} \text{ an } \omega$$

sind an der Oberfläche ω derart stetig, daß:

$$28)\qquad \text{abs.} \left| \frac{\partial U_1}{\partial h} \right|_1^2 \overline{\overline{<}} (a\, C_0 + b \text{ abs. Max. } \theta_0)\, r_{12}^{\lambda_0},$$

wo h eine beliebige tangentiale Richtung,[1] a b endliche Konstanten vorstellen, die lediglich von der Gestalt der Fläche ω und der Zahl λ_0 abhängen (Satz II des zweiten Abschnitts der vorstehenden Abhandlung). Mit Rücksicht auf den Zusatz 4 zu Satz III des I. Abschnitts der vorstehenden Abhandlung folgt somit, daß die ersten Ableitungen von u_1 v_1 w_1 in dem Raume derart stetig sind, daß für zwei Punkte 1 und 2 in genügend kleiner Entfernung r_{12}:

$$29)\quad \text{abs.} \left| \frac{\partial u_1}{\partial \sigma} \right|_1^2 < \text{endl. Konst. } r_{12}^{\lambda_1} \overline{\overline{<}} C_1\, r_{12}^{\lambda_1}, \quad \left| \begin{array}{l} 0 < \lambda_1 < \lambda_0, \\ C_1 \text{ endlich}, \end{array} \right.$$

wo σ eine beliebige Richtung, C_1 eine endliche Konstante vorstellt.

Außerdem ist:

$$\Delta u_1 = -2\frac{\partial \theta_0}{\partial x} + \Delta u_0,$$

$$\Delta v_1 = -2\frac{\partial \theta_0}{\partial y} + \Delta v_0,$$

$$\Delta w_1 = -2\frac{\partial \theta_0}{\partial z} + \Delta w_0$$

somit:

$$30)\qquad \Delta \theta_1 = 0;$$

---

[1] $\cos(h_2 x) = \cos(h_1 x) + \varepsilon_1, \ldots$ wo $|\varepsilon_1| \overline{\overline{<}}$ endl. Konst. $r_{12}, \ldots$

es ist also θ_1 eine stetige allgemeine Potentialfunktion des Raumes τ, deren Stetigkeit in der ganzen Ausdehnung des Raumes τ derart ist, daß für zwei Punkte 1 und 2 des Raumes τ in genügend kleiner Entfernung r:

31) $$\text{abs. } \theta_2 \Big|_1^2 \overline{\overline{<}} C_1 r_{12}^{\lambda_1}, \quad \left| \begin{array}{l} 0 < \lambda_1 < 1, \\ C_1 \text{ endlich.} \end{array} \right.$$

In dieser Weise können wir nun weiter gehen und sehen, daß für jedes beliebige endliche j die θ_j stetige, allgemeine Potentialfunktionen sind, deren Stetigkeit in τ die Bedingung 23) erfüllt.

Es folgt auf diese Weise auch die Gültigkeit der Formeln 15') S. 45 für jeden Punkt des Raumes τ in irgendwelcher, im übrigen beliebig kleiner Entfernung von ω. Es folgt schließlich auch successive die Stetigkeit der ersten Ableitungen von $u_j\, v_j\, w_j$ in ganzer Erstreckung des Raumes τ für jedes beliebige endliche j.

Damit sind nun aber alle Schlüsse dieses § streng begründet, und wir können bisher das folgende Resultat aussprechen:

Die durch die Formeln 15) definierten successiven Funktionen $u_j\, v_j\, w_j$ sind mit ihren ersten Ableitungen für jedes beliebige endliche j in ganzer Erstreckung des Raumes τ eindeutig und stetig; die Stetigkeit ihrer ersten Ableitungen, im besonderen die Stetigkeit der stetigen, allgemeinen Potentialfunktionen θ_j in τ ist derart, daß für zwei Punkte 1 und 2 in genügend kleiner Entfernung r_{12}:

$$\text{abs. } \theta_j \Big|_1^2 \overline{\overline{<}} C_j r_{12}^{\lambda_j},$$

wo λ_j einen echten Bruch, C_j eine endliche Konstante vorstellt.

Die Formeln:

$$\varDelta \frac{\partial}{\partial x} \int_\tau \theta_j \frac{d\tau}{r} = -4\pi \frac{\partial \theta_j}{\partial x},$$

$$\varDelta \frac{\partial}{\partial y} \int_\tau \theta_j \frac{d\tau}{r} = -4\pi \frac{\partial \theta_j}{\partial y},$$

$$\varDelta \frac{\partial}{\partial z} \int_\tau \theta_j \frac{d\tau}{r} = -4\pi \frac{\partial \theta_j}{\partial z}.$$

bestehen für jedes beliebige endliche j in irgend welcher, im übrigen beliebig kleiner Entfernung von der Fläche ω.

Es besteht ferner die Ungleichung:

$$\mathfrak{k}^{2j} \int_\tau \theta_j^2 \, d\tau \overline{\overline{<}} \alpha \cdot \mathfrak{k}^{2j},$$

wo α eine von j unabhängige endliche Konstante vorstellt.

§ 5.

Wir suchen jetzt zu beweisen, daß die Funktion θ eine stetige allgemeine Potentialfunktion des Raumes τ darstellt, deren Stetigkeit die Bedingung erfüllt:

32) $$\text{abs. } \theta \Big|_1^2 \overline{\overline{<}} C \cdot r_{12}^{\lambda}, \quad C \text{ endlich},$$

wenn wir:

33) $$\theta = \theta_0 + \mathfrak{k}\,\theta_1 + \mathfrak{k}^2\,\theta_2 + \cdots$$

setzen. Daß diese Reihe innerhalb τ, d. h. in endlicher Entfernung von der Oberfläche ω stets konvergent ist und mit allen Ableitungen innerhalb ω eindeutig und stetig ist, folgt leicht aus der Ungleichung:

$$\mathfrak{k}^{2j} \int_\tau \theta_j^2 \, d\tau \overline{\overline{<}} \alpha\, \mathfrak{k}^{2j}.$$

Denn denken wir uns um einen Punkt $(x\,y\,z)$ innerhalb ω eine Kugel vom Radius R, der nur klein genug gewählt ist, daß die Kugel ganz in dem Gebiete τ liegt, so ist:

$$\theta_j(x, y, z) = \frac{3}{4\pi R^3} \int \theta_j \, d\tau,$$

wo das Integral rechts über die Kugel zu erstrecken ist, somit:

$$\mathfrak{k}^j \, |\theta_j(x,y,z)| \overline{\overline{<}} \frac{3\,\mathfrak{k}^j}{4\pi R^3} \sqrt{\int \theta_j^2 \, d\tau \int d\tau} \overline{\overline{<}} \frac{3\,\mathfrak{k}^j}{4\pi R^3} \sqrt{\int_\tau \theta_j^2 d\tau \frac{4\pi R^3}{3}}$$

$$< \sqrt{\frac{3a}{4\pi R^3}} \, \mathfrak{k}^j$$

oder:

$$34) \qquad |\theta_j| \, \mathfrak{k}^j < \frac{\beta}{\mathfrak{r}^{\frac{3}{2}}} \mathfrak{k}^j, \qquad \Big| \; \beta \text{ endliche Konstante},$$

wenn $\mathfrak{r}$ die kleinste Entfernung von der Oberfläche ω darstellt.

Analoge Formeln kann man sofort auch für die ersten, zweiten etc. Ableitungen von θ_j innerhalb ω ableiten.

Für uns ist es aber erforderlich, die Stetigkeit von θ und zwar die Stetigkeit von der Art 32) in ganzer Erstreckung des Gebietes τ zu erweisen, und zu diesem Zwecke müssen wir, ausgehend von der Formel:

$$35) \quad \text{abs.} \, |\theta_j|_1^2 \overline{\overline{<}} C_0 r_{12}^{\lambda}, \; (0 < r_{12} < \sigma), \qquad \Big| \; \begin{array}{l} \lambda_0 \text{ echter Bruch}, \\ C_0 \text{ endliche Konstante}, \end{array}$$

in den successiven Formeln:

$$36) \qquad \text{abs.} \, \theta_j|_1^2 \overline{\overline{<}} C_j r_{12}, \quad (0 \overline{\overline{<}} r_{12} \overline{\overline{<}} \sigma_j)$$

die Abhängigkeit der Größen $C_j \, \lambda_j \, \sigma_j$ von j näher erforschen.

Wir gehen aus von den Definitionsformeln:

$$37) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_j = u_{j-1} + \dfrac{1}{2\pi} \dfrac{\partial}{\partial x} \displaystyle\int_\tau \theta_{j-1} \frac{d\tau}{r} - U_j, \\ v_j = v_{j-1} + \dfrac{1}{2\pi} \dfrac{\partial}{\partial y} \displaystyle\int_\tau \theta_{j-1} \frac{d\tau}{r} - V_j, \quad j = 1, 2, \cdots \\ w_j = w_{j-1} + \dfrac{1}{2\pi} \dfrac{\partial}{\partial z} \displaystyle\int_\tau \theta_{j-1} \frac{d\tau}{r} - W_j \end{array} \right.$$

$U_j\, V_j\, W_j$ sind die Potentialfunktionen des Innenraumes mit den Randwerten:

$$\text{38)} \quad \left.\begin{aligned} U_j &= \frac{\partial \Psi_{j-1}}{\partial x}, \\ V_j &= \frac{\partial \Psi_{j-1}}{\partial y}, \\ W_j &= \frac{\partial \Psi_{j-1}}{\partial z}, \end{aligned}\right\} \text{ an } \omega,$$

wo wir zur Abkürzung:

$$\text{39)} \quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial \Psi_{j-1}}{\partial x} &= \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_\tau \theta_{j-1} \frac{d\tau}{r}, \\ \frac{\partial \Psi_{j-1}}{\partial y} &= \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_\tau \theta_{j-1} \frac{d\tau}{r}, \\ \frac{\partial \Psi_{j-1}}{\partial z} &= \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_\tau \theta_{j-1} \frac{d\tau}{r}, \end{aligned}\right.$$

gesetzt haben, es ist somit nach der Methode des arithmetischen Mittels[1]):

$$\text{40)} \quad \left\{\begin{aligned} U_j &= \frac{1}{2\pi} \int_\omega \frac{\partial \Psi_{j-1}}{\partial \xi} \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega + X_{j,1} \\ V_j &= \frac{1}{2\pi} \int_\omega \frac{\partial \Psi_{j-1}}{\partial \eta} \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega + X_{j,2} \\ W &= \frac{1}{2\pi} \int_\omega \frac{\delta \Psi_{j-1}}{\partial \zeta} \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega + X_{j,3} \end{aligned}\right.$$

---

[1]) Es hat in der Tat jedes $\frac{\partial \Psi_{j-1}}{\partial \xi}, \ldots$ nach Satz II des II. Abschnitts der vorstehenden Abhandlung die Eigenschaft:

$$\text{abs.} \left| \frac{\partial \Psi_{j-1}}{\partial \xi} \right|_1^2 < \alpha \text{ abs. Max. } \theta_{j-1}\, r_{12}^{A_1}, \; (0 < r_{12} < \sigma)$$

wo A_1 einen beliebigen echten Bruch vorstellt, α eine endliche Konstante, σ eine Länge, die gar nicht von der Funktion θ_{j-1} abhängig sind, und hierauf ergibt sich in der Tat 41) mit Hilfe des Satzes I des I. Abschnitts der vorstehenden Abhandlung, wenn nur $A < A_1$, also überhaupt ein beliebiger echter Bruch ist.

wo $X_{j,1}$, $X_{j,2}$, $X_{j,3}$ Potentiale von Doppelbelegungen sind, deren erste Ableitungen nach dem Satze I des I. Abschnitts der vorstehenden Abhandlung S. 1 im ganzen Raume derart stetig sind, daß für zwei Punkte 1 und 2 in genügend kleiner Entfernung r_{12}:

$$41)\quad \text{abs.} \left| \frac{\partial X_{j,1}}{\partial \sigma} \right|_1^2 \overline{<} A \cdot \text{abs. Max.}\, \theta_{j-1}\, r_{12}^{\Lambda}, \ldots \quad (0 \overline{<} r_{12} \overline{<} \sigma),$$

wo σ eine beliebige Richtung, Λ einen echten Bruch, A eine endliche Konstante, σ eine Länge vorstellt, die in keiner Weise von j abhängig sind, und man kann, wenn man will:

$$42)\qquad \Lambda = \lambda$$

setzen.

Es sind andererseits $\frac{\partial \Psi_{j-1}}{\partial x}$, $\frac{\partial \Psi_{j-1}}{\partial y}$, $\frac{\partial \Psi_{j-1}}{\partial z}$ die Potentialfunktionen des Aussenraumes mit den Randwerten $\frac{\partial \Psi_{j-1}}{\partial x}$, $\frac{\partial \Psi_{j-1}}{\partial y}$, $\frac{\partial \Psi_{j-1}}{\partial z}$ an ω, es ist daher wieder nach der Methode des arithmetischen Mittels:

$$43)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \Psi_{j-1}}{\partial x} &= -\frac{1}{2\pi} \int_\omega \frac{\partial \Psi_{j-1}}{\partial \xi} \frac{\cos(r\nu)}{r^2}\, d\omega + \Phi_{j,1}, \\ \frac{\partial \Psi_{j-1}}{\partial y} &= -\frac{1}{2\pi} \int_\omega \frac{\partial \Psi_{j-1}}{\partial \eta} \frac{\cos(r\nu)}{r^2}\, d\omega + \Phi_{j,2}, \\ \frac{\partial \Psi_{j-1}}{\partial z} &= -\frac{1}{2\pi} \int_\omega \frac{\partial \Psi_{j-1}}{\partial \zeta} \frac{\cos(r\nu)}{r^2}\, d\omega + \Phi_{j,3}, \end{aligned} \right| \text{ im Außenraume,}$$

wo die $\Phi_{j,1}$ $\Phi_{j,2}$ $\Phi_{j,2}$ Potentiale von Doppelbelegungen mit denselben Stetigkeitseigenschaften wie $X_{j,1}$, $X_{j,2}$, $X_{,3}$, im besonderen an der Fläche ω, sind.

Da mit Rücksicht auf den Satz I des II. Abschnitts der vorstehenden Abhandlung die Funktionen $\frac{\partial \Psi_{j-1}}{\partial \xi}$, $\frac{\partial \Psi_{j-1}}{\partial \eta}$, $\frac{\partial \Psi_{j-1}}{\partial \zeta}$ auf der Fläche ω erste tangentiale Ableitungen haben, von solcher

Stetigkeit, das für zwei Punkte 1 und 2 der Fläche in genügend kleiner Entfernung r_{12}:

$$\text{abs.} \left| \frac{\partial^2 \Psi_{j-1}}{\partial \xi \, \partial h} \right|_1^2 < C_j r_{12}^{\lambda j}, \ldots (0 < r_{12} \overline{<} \sigma_j),$$

so ist an der Fläche ω nach einem bekannten Satze (Lehrbuch der Potentialtheorie I S. 394):

$$\left| \frac{\partial}{\partial \nu} \int\limits_\omega \frac{\partial \Psi_{j-1}}{\partial \xi} \frac{\cos(r \nu)}{r^2} d\omega \right|_i = \left| \frac{\partial}{\partial \nu} \int\limits_\omega \frac{\partial \Psi_{j-1}}{\partial \xi} \frac{\cos(r \nu)}{r^2} d\omega \right|_a, \ldots$$

somit folgt:

$$\text{44)} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial U_j}{\partial \nu} = - \left| \dfrac{\partial^2 \Psi_{j-1}}{\partial x \, \partial \nu} \right|_a + \Xi_j, \\ \dfrac{\partial V_j}{\partial \nu} = - \left| \dfrac{\partial^2 \Psi_{j-1}}{\partial y \, \partial \nu} \right|_i + H_j, \\ \dfrac{\partial W_j}{\partial \nu} = - \left| \dfrac{\partial^2 \Psi_{j-1}}{\partial z \, \partial \nu} \right|_a + Z_j, \end{cases}$$

wobei die $\Xi_j \; H_j \; Z_j$ Funktionen vorstellen, deren erste Ableitungen an der Oberfläche ω derart stetig sind, daß für zwei Punkte 1 und 2 der Fläche in genügend kleiner Entfernung r_{12}:

$$\text{45)} \quad \text{abs.} \left| \frac{\partial \Xi_j}{\partial h} \right|_1^2 \overline{<} B \,\text{abs. Max.}\, \theta_{j-1} \, r_{12}^{A}, \ldots (0 \overline{<} r_{12} \overline{<} \sigma).$$

wo h eine beliebige tangentiale Richtung, A einen echten Bruch, σ eine endliche Konstante, σ eine Länge vorstellen, die in keiner Weise von j abhängen, und man kann, wenn man will:

$$A = \lambda$$

setzen.

Da $u_j \; v_j \; w_j$ an der Fläche ω verschwinden, ist:

$$\left.\begin{aligned} \theta_j &= \frac{\partial u_j}{\partial \nu} \cos(\nu x) + \frac{\partial v_j}{\partial \nu} \cos(\nu y) + \frac{\partial w_j}{\partial \nu} \cos(\nu z), \\ \theta_{j-1} &= \frac{\partial u_{j-1}}{\partial x} \cos(\nu x) + \frac{\partial v_{j-1}}{\partial \nu} \cos(\nu y) + \frac{\partial w_{j-1}}{\partial \nu} \cos(\nu z) \end{aligned}\right\} \text{an } \omega,$$

und es folgt aus den Formeln 37):

$$\theta_j = \theta_{j-1} + \left|\frac{1}{2\pi}\frac{\partial^2}{\partial\nu^2}\int_\tau \theta_{j-1}\frac{d\tau}{r}\right|_i - \left\{\frac{\partial U_j}{\partial\nu}\cos(\nu x) + \frac{\partial V_j}{\partial\nu}\cos(\nu y) + \frac{\partial W_j}{\partial\nu}\cos(\nu z)\right\},$$

$$= \theta_{j-1} + \frac{1}{2\pi}\left|\frac{\partial^2}{\partial\nu^2}\int_\tau \theta_{j-1}\frac{d\tau}{r}\right|_i + \frac{1}{2\pi}\left|\frac{\partial^2}{\partial\nu^2}\int_\tau \theta_{j-1}\frac{d\tau}{r}\right|_a + H_j,$$

oder:

$$46)\qquad \theta_j = -\left\{\theta_{j-1} - \frac{1}{\pi}\left|\frac{\partial^2}{\partial\nu^2}\int_\tau \theta_{j-1}\frac{d\tau}{r}\right|_a\right\} + H_j,$$

wo H_j eine Funktion der Stelle an ω darstellt, die derart stetig ist, daß für zwei Punkte 1 und 2 der Fläche im Abstand r_{12}:

$$47)\qquad \text{abs.}\,|H_j|_1^2 < \Gamma\cdot \text{abs. Max.}\,\theta_{j-1}\cdot r_{12}^\lambda, \quad (0 \overline{\overline{<}} r_{12} \overline{\overline{<}} \sigma)$$

Γ eine endliche Konstante, σ eine Länge, die größer ist als eine bestimmte endliche Länge; Γ, σ gänzlich unabhängig von j.

Wir bringen jetzt den Satz IV des II. Abschnitts der vorangehenden Abhandlung über Raumpotentiale, den eigentlichen Schlüsselpunkt für die Lösung der gestellten Aufgabe, zur Anwendung. Besteht für zwei Punkte 1 und 2 des Raumes τ in der Entfernung r_{12} die Ungleichung:

$$48)\qquad \text{abs.}\,|\theta_{j-1}|_1^2 \overline{\overline{<}} C_{j-1}\, r_{12}^{\lambda_{j-1}}, \quad (0 \overline{\overline{<}} r_{12} < \sigma_{j-1}),$$

so ergibt sich nach dem genannten Satze, den Formeln 46) und 47):

$$49)^{1)}\ \text{abs.}\,|\theta_j|_1^2 \overline{\overline{<}} \left[\varepsilon_{\sigma_{j-1}} C_{j-1} + \left(c_1 + \frac{c_2}{\varepsilon_\delta \sigma_{j-1}}\right)\text{abs. Max.}\,\theta_{j-1}\right] r_{12}^{\lambda_{j-1}},$$
$$(0 \overline{\overline{<}} r_{12} \overline{\overline{<}} \sigma_{j-1}(1-\delta)),$$

wo δ eine beliebig kleine Zahl, $\varepsilon_{\sigma_{j-1}}$ und δ zwei Konstanten vorstellen, die bezw. mit σ_{j-1} und δ zu Null konvergieren, aber stets von Null verschiedene, bestimmte Werte haben, sobald bezw. σ_{j-1} und δ von Null verschieden sind, ε_δ von j unabhängig.

[1]) c_1 c_2 endliche Konstanten, die von j unabhängig sind.

Wir können hieraus sofort die folgenden Schlüsse ziehen: Wir können

$$50)\qquad \begin{cases} \lambda_j = \lambda, \\ \sigma_j = \sigma \cdot (1-\delta)^j \end{cases}$$

setzen, wo δ eine beliebig kleine Zahl sein kann, und:

$$51)\qquad \text{abs.}\left|\,\theta_j\right|_1^2 < \left(\varepsilon_j C_{j-1} + \frac{c}{\varepsilon_\delta\,\sigma(1-\delta)^{j-1}}\,\text{abs. Max. }\theta_{j-1}\right) r_{12}^{\lambda},$$
$$(0 \overline{<} r_{12} \overline{<} \sigma(1-\delta)^j),$$

wo die Konstanten c und ε_δ von j ganz unabhängig sind und ε_j eine mit j zu Null konvergierende Zahl vorstellt. Wir können jedenfalls, indem wir σ von vornherein genügend klein wählen

$$\varepsilon_j < 1$$

machen und die Ungleichung 51) auch so schreiben:

$$52)\qquad \text{abs.}\left|\,\theta_j\right|_1^2 < \left(C_{j-1} + \frac{1}{E_\delta(1-\delta)^j}\,\text{abs. Max. }\theta_{j-1}\right) r_{12}^{\lambda},$$
$$(0 \overline{<} r_{12} \overline{<} \sigma(1-\delta)^j),$$

wo E_δ eine Konstante vorstellt, die zwar um so größer ist, je kleiner δ gewählt wird, aber für jedes $\delta \neq 0$ einen bestimmten, von Null verschiedenen, von j unabhängigen Wert hat; wir können dabei δ im übrigen von vornherein beliebig klein wählen.

Diese Formel wird sogleich eine sehr wichtige Rolle spielen. Wir errichten in einem Punkte 0 der Fläche die innere Normale und markieren auf derselben in dem Abstande $\mathfrak{r}_j$ den Punkt 0'. Dann ist:

$$\left|\,\theta_j\right|_0 = \left|\,\theta_j\right|_{0'} + \left|\,\theta_j\right|_{0'}^{0}$$

und mit Rücksicht auf 34) und 52):

$$53)\qquad \begin{cases} \text{abs. }\theta_j < \dfrac{\beta}{\mathfrak{r}_j^{\frac{3}{2}}} + \left(C_{j-1} + \dfrac{1}{E_\delta(1-\delta)^j}\,\text{abs. Max. }\theta_{j-1}\right)\mathfrak{r}_j^{\lambda}, \\ \qquad (0 \overline{<} \mathfrak{r}_j \overline{<} \sigma(1-\delta)^j), \end{cases}$$

oder, wenn wir mit $\mathfrak{K}$ einen echten Bruch

54) $$\mathfrak{k} < \mathfrak{K} < 1$$

bezeichnen und

55) $$\begin{cases} \mathfrak{K}^j \text{ abs. Max. } \theta_j = A_j, \\ \qquad \mathfrak{K}^j \cdot C_j = B_j \end{cases}$$

setzen, so daß:

56) $$\begin{cases} \text{abs. Max. } \theta_j \mathfrak{K}^j \overline{<} A_j \\ \text{abs. } | \mathfrak{K}^j \theta_j |_1^2 < B_j r_{12}^\lambda, \quad (0 \overline{<} r_{12} \overline{<} \sigma (1-\delta)^j), \end{cases}$$

so erhalten wir die Formeln:

57) $$\begin{cases} A < \dfrac{\beta \mathfrak{K}^j}{\mathfrak{r}_j^{\frac{3}{2}}} + \left(B_{j-1} + \dfrac{1}{E_\delta (1-\delta)^j} A_{j-1} \right) \mathfrak{r}_j^\lambda, \quad (0 \overline{<} \mathfrak{r}_j \overline{<} \sigma (1-\delta)^j), \\ B_j < B_{j-1} + \dfrac{1}{E_\delta (1-\delta)^j} A_{j-1}. \end{cases}$$

Wir wählen nun δ und einen echten Bruch L so, daß:

58) $$\mathfrak{K} < L < (1-\delta)^{\frac{3}{2\lambda}} < 1$$

und setzen:

59) $$\mathfrak{r}_j = \left(\frac{\mathfrak{K}^{\frac{2}{3}} (1-\delta)^{\frac{1}{\lambda}}}{L^{\frac{2}{3}}} \right)^j,$$

was ja gestattet ist, da ja:

$$\frac{\mathfrak{K}^{\frac{2}{3}} (1-\delta)^{\frac{1}{\lambda}}}{L^{\frac{2}{3}}} < 1-\delta;$$

wir können dann die beiden Ungleichungen 57) so schreiben:

60) $$\begin{cases} A_j < \beta \left(\dfrac{L}{(1-\delta)^{\frac{3}{2\lambda}}} \right)^j + \dfrac{1}{E_\delta} (B_{j-1} (1-\delta)^{j-1} E_\delta + A_{j-1}) \left(\dfrac{\mathfrak{K}}{L} \right)^{\frac{2}{3}\lambda j}, \\ B_j \overline{<} B_{j-1} + \dfrac{1}{E_\delta (1-\delta)^j} A_{j-1}, \end{cases}$$

oder, wenn wir mit μ den größeren der beiden echten Brüche

$$\left(\frac{\mathfrak{K}}{L} \right)^{\frac{2}{3}}, \quad \frac{L}{(1-\delta)^{\frac{3}{2\lambda}}}$$

bezeichnen:

$$61)\quad \begin{cases} A_i \overline{<} \left[\beta + \dfrac{1}{E_\delta}\left(A_{i-1} + E_\delta (1-\delta)^{i-1} B_{i-1}\right)\right]\mu^i, \\ B_i \overline{<} B_{i-1} + \dfrac{1}{E_\delta (1-\delta)^i} A_{i-1}. \end{cases}$$

Wir multiplizieren die zweite dieser Ungleichungen mit $E_\delta (1-\delta)^i$ und addieren, dann folgt:

$$62)\quad \begin{cases} A_i + E_\delta (1-\delta)^i B_i \overline{<} A_{i-1} + E_\delta (1-\delta)^{i-1} B_{i-1} \\ \qquad + \left[\beta + \dfrac{1}{E_\delta}\left(A_{i-1} + E_\delta (1-\delta)^{i-1} B_{i-1}\right)\right]\mu^i, \end{cases}$$

oder, wenn wir:

$$63)\quad \Gamma_i = A_i + E_\delta (1-\delta)^i B_i$$

setzen:

$$64)\quad \Gamma_i \overline{<} \Gamma_{i-1} + \left[\beta + \frac{\Gamma_{i-1}}{E_\delta}\right]\mu^i.$$

Wir wenden jetzt den Kunstgriff an, der bereits von Liapounoff[1]) bei einer anderen Gelegenheit mit Erfolg benützt worden ist. Wir schreiben die Ungleichung in der Form:

$$\Gamma_i + \beta \cdot E_\delta \overline{<} (\Gamma_{i-1} + \beta E_\delta)\left(1 + \frac{\mu^i}{E_\delta}\right),$$

dann folgt:

$$\Gamma_i + \beta \cdot E_\delta \overline{<} (\Gamma_0 + \beta E_\delta)\left(1 + \frac{\mu}{E_\delta}\right)\left(1 + \frac{\mu^2}{E_\delta}\right)\cdots\left(1 + \frac{\mu^i}{E_\delta}\right).$$

Das Produkt:

$$65)\quad Q = \left(1 + \frac{\mu}{E_\delta}\right)\left(1 + \frac{\mu^2}{E_\delta}\right)\cdots$$

ist konvergent, da $\mu < 1$, und es wird somit:

$$66)\quad \Gamma_i + \beta \cdot E_\delta \overline{<} (\Gamma_0 + \beta E_\delta)\, Q,$$

---

[1]) Liapounoff, Sur certaines questions qui se rattachent au problème de Dirichlet (Journ. de math. 1898, S. 278).

so daß:

67) $$\Gamma_i \overline{\overline{<}} A,$$

wo A eine bestimmte, endliche, von j unabhängige Konstante vorstellt. Nun ist:

$$\text{abs. Max. } \mathfrak{k}^i \cdot \theta_i = \left(\frac{\mathfrak{k}}{\mathfrak{K}}\right)^i \cdot A_i,$$

$$\mathfrak{k}^i \cdot C_i = \left(\frac{\mathfrak{k}}{\mathfrak{K}}\right)^i \cdot B_i,$$

so daß, wenn wir wieder mit m einen echten Bruch bezeichnen:

68) $$\begin{cases} \text{abs. Max. } \mathfrak{k}^i\, \theta_i \overline{\overline{<}} a \cdot m^i, \\ \mathfrak{k}^i C_i \overline{\overline{<}} b \cdot m^i, \end{cases} \quad m = \frac{\mathfrak{k}}{\mathfrak{K}(1-\delta)}$$

und wir erhalten das wichtige Resultat:

69) $$\begin{cases} |\mathfrak{k}^i \theta_i| \overline{\overline{<}} a \cdot m^i, \\ \text{abs. } |\mathfrak{k}^i \theta_i|_1^2 \overline{\overline{<}} b \cdot m^i r_{12}^\lambda, \quad (0 \overline{\overline{<}} r_{12} < \sigma(1-\delta)^i), \end{cases}$$

wo m einen echten Bruch vorstellt, a, b endliche, von j unabhängige Konstanten.

Durch die erste Formel 69) wird uns die gleichmäßige Konvergenz der Reihe:

70) $$\theta = \theta_0 + \mathfrak{k}\theta_1 + \mathfrak{k}^2\theta_2 + \cdots$$

gewährleistet, und sicher gestellt, daß θ eine in dem ganzen Gebiet τ eindeutige und stetige Funktion der Stelle vorstellt.

Wir verlangen von der Stetigkeit der Funktion θ aber noch mehr, und wir wollen mit Hilfe der zweiten Formel 69) die Behauptung 32) nachweisen.

Wir teilen die Reihe 70) in 2 Teile:

71) $$\theta = \sum_0^\nu{}^i\, \mathfrak{k}^i\, \theta_i + \sum_{\nu+1}^\infty{}^i\, \mathfrak{k}^i\, \theta_i$$

und wählen die Zahl ν genügend groß, so daß:

$$\left| \sum_{\nu+1}^\infty{}^j\, \mathfrak{k}^j\, \theta_j \right| \overline{\overline{<}} \text{endl. Konst. } r_{12},$$

wenn r_{12} die Entfernung zweier Punkte 1 und 2 des Raumes τ vorstellt. Eine solche Zahl ν läßt sich stets finden, da:

$$\sum_{\nu+1}^{\infty} j\, \mathfrak{k}^j \theta_j \leqq \text{endl. Konst. } m^\nu;$$

man hat eben nur ν so groß zu machen, daß

72) $$m^\nu \leqq \text{endl. Konst. } r_{12};$$

dann ist:

73 a) $$\text{abs.} \left| \sum_{\nu+1}^{\infty} j\, \mathfrak{k}^j \theta_j \right|_1^2 \leqq \text{endl. Konst. } r_{12},$$

und:

73 b) $$\text{abs.} \left| \sum_{0}^{\nu} j\, \mathfrak{k}^j \theta_i \right|_1^2 < \text{endl. Konst. } r_{12}^\lambda, \quad (0 < r_{12} \leqq \sigma (1-\delta)^\nu)$$

mit Rücksicht auf die zweite Formel 69), und die Bedingung

$$0 < r_{12} \leqq \sigma (1-\delta)^\nu$$

kann noch fortgelassen werden; sie ist, wenn nur

$$1 - \delta > m$$

ist, was ja stets dadurch erreicht werden kann, daß man von vornherein δ klein genug annimmt, bei der Festsetzung 72) von selbst erfüllt, wenn $r_{12} <$ bestimmte, endliche Konstante $\sigma' (< \sigma)$.

Durch Addition der Formeln 73 a) und 73 b) folgt aber für irgend zwei Punkte 1 und 2 des Raumes τ:

74) $$\text{abs.} \left| \theta \right|_1^2 \leqq \text{endl. Konst. } r_{12}^\lambda,$$

und das wollen wir in diesem § beweisen.

Wir haben also das Resultat erhalten:

Die Reihe:

75) $$\theta = \theta_0 + \mathfrak{k}\theta_1 + \mathfrak{k}^2 \theta_2 + \cdots \quad (-1 \leqq \mathfrak{k} < +1)$$

stellt eine in der ganzen Erstreckung des Raumes τ eindeutige und stetige Funktion dar, und es gelten für zwei Punkte 1 und 2 des Raumes τ die Formeln:

76) $$\text{abs.} \left| \theta \right|_1^2 < \text{endl. Konst. } r_{12}^\lambda.$$

Die einzelnen Glieder der Reihe haben die Eigenschaft:

$$77)\quad \begin{cases} \text{abs. Max. } \mathfrak{k}^j\,\theta_j \overline{<} a\cdot m^j, \\ \text{abs. } |\,\mathfrak{k}^j\,\theta_j\,|_1^2 < b\cdot m^j\cdot r_{12}^\lambda,\ (0 < r_{12} < \sigma\,(1-\delta)^j), \end{cases}$$

wo die a, b endliche, von j unabhängige Konstanten, m einen echten Bruch darstellt.

§ 6.

Wir gehen nunmehr zu der Untersuchung der Funktionen $u_i\ v_i\ w_i$ über, die successive durch die Gleichungen 15) definiert sind.

Es ergiebt sich zunächst wieder aus den Ungleichungen 77) für die Potentialfunktionen $U_j\ V_j\ W_j$ mit den Randwerten 16) an ω mit Rücksicht auf Satz II und Satz I des I. Abschnitts der vorangehenden Abhandlung, daß die Reihen:

$$78)\qquad U = \sum_0^\infty{}^j\, \mathfrak{k}^j\, U_j \qquad (-1 < \mathfrak{k} < +1),$$

und

$$79)\qquad \frac{\partial U}{\partial s} = \sum_0^\infty{}^j\, \mathfrak{k}^j\, \frac{\partial U_j}{ds} \qquad (-1 < \mathfrak{k} < +1).$$

wenn s eine beliebige Richtung vorstellt, für jeden Punkt des Gebietes τ konvergieren, und daß die Reihen U und $\frac{dU}{ds}$ im ganzen Gebiete τ eindeutige und stetige Funktionen der Stelle vorstellen.

Wir multiplizieren jede der Formeln 15) bezw. mit $\mathfrak{k}'^j$ $(0 < \mathfrak{k} < \mathfrak{k}' < 1)$ und summieren von 1 bis j, dann folgt:

$$80)\quad \begin{cases} \mathfrak{k}'^j u_j = \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\partial}{\partial x}\displaystyle\int_\tau \sum_1^{j-1}{}^i\, \mathfrak{k}'^i\,\theta_i\,\frac{d\tau}{r} + \frac{1}{4\pi}\int_\tau F_1\,\frac{d\tau}{r} - \sum_1^j{}^i\, \mathfrak{k}'^i\, U_i, \\ \mathfrak{k}'^j v_j = \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\partial}{\partial x}\displaystyle\int_\tau \sum_1^{j-1}{}^i\, \mathfrak{k}'^i\,\theta_i\,\frac{d\tau}{r} + \frac{1}{4\pi}\int_\tau F_2\,\frac{d\tau}{r} - \sum_1^j{}^i\, \mathfrak{k}'^i\, V_i, \\ \mathfrak{k}'^j w_j = \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\partial}{\partial x}\displaystyle\int_\tau \sum_1^{j-1}{}^i\, \mathfrak{k}'^i\,\theta_i\,\frac{d\tau}{r} + \frac{1}{4\pi}\int_\tau F_3\,\frac{d\tau}{r} - \sum_1^j{}^i\, \mathfrak{k}'^i\, W_i, \end{cases}$$

dann folgt, da auch:

$$81)\quad \begin{cases} \text{abs. Max. } \mathfrak{k}'^i\, \theta_i \overline{\overline{<}}\, a'\, m'^i \\ \text{abs. } |\mathfrak{k}'^i\, \theta_i|_1^2 < b'\, m'^i\, r_{12}^{\lambda}, \quad (0 \overline{\overline{<}}\, r_{12} \overline{\overline{<}}\, \sigma\,(1-\delta')^{i-1}) \end{cases}$$

wo m' einen echten Bruch bedeutet:

$$82)\quad \begin{cases} |\mathfrak{k}'^j\, u_j| \overline{\overline{<}} \text{ endl. Konst.}, \\ |\mathfrak{k}'^j\, v_j| \overline{\overline{<}} \text{ endl. Konst.}, \\ |\mathfrak{k}'^j\, w_j| \overline{\overline{<}} \text{ endl. Konst.}, \end{cases}$$

und auch:

$$83)\quad \begin{cases} \left|\mathfrak{k}'^j \frac{\partial u_j}{\partial s}\right| \overline{\overline{<}} \text{ endl. Konst.}, \\ \left|\mathfrak{k}'^j \frac{\partial v_j}{\partial s}\right| \overline{\overline{<}} \text{ endl. Konst.}, \\ \left|\mathfrak{k}'^j \frac{\partial w_j}{\partial s}\right| \overline{\overline{<}} \text{ endl. Konst.}, \end{cases}$$

wo s eine ganz beliebige Richtung vorstellt.

Setzen wir jetzt:

$$84)\quad n = \frac{\mathfrak{k}}{\mathfrak{k}'}$$

so folgt:

$$85)\quad \begin{cases} |\mathfrak{k}^j\, u_j| \overline{\overline{<}} \text{ endl. Konst. } n^j, \\ |\mathfrak{k}^j\, v_j| \overline{\overline{<}} \text{ endl. Konst. } n^j, \\ |\mathfrak{k}^j\, w_j| \overline{\overline{<}} \text{ endl. Konst. } n^j, \end{cases}$$

und:

$$86)\quad \begin{cases} \left|\mathfrak{k}^j \frac{\partial u_j}{\partial s}\right| \overline{\overline{<}} \text{ endl. Konst. } n^j, \\ \left|\mathfrak{k}^j \frac{\partial v_j}{\partial s}\right| \overline{\overline{<}} \text{ endl. Konst. } n^j, \\ \left|\mathfrak{k}^j \frac{\partial w_j}{\partial s}\right| \overline{\overline{<}} \text{ endl. Konst. } n^j, \end{cases}$$

wo n einen echten Bruch bedeutet, und wir sehen, daß auch die Reihen:

$$87)\qquad \begin{aligned} u &= \sum_0^\infty{}_j\, \mathfrak{k}^j\, u_j\,, \\ v &= \sum_0^\infty{}_j\, \mathfrak{k}^j\, v_j\,, \\ w &= \sum_0^\infty{}_j\, \mathfrak{k}^j\, w_j \end{aligned}$$

und:

$$88)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial s} &= \sum_0^\infty{}_j\, \mathfrak{k}^j\, \frac{\partial u_j}{\partial s}\,, \\ \frac{\partial v}{\partial s} &= \sum_0^\infty{}_j\, \mathfrak{k}^j\, \frac{\partial v_j}{\partial s}\,. \\ \frac{\partial w}{\partial s} &= \sum_0^\infty{}_j\, \mathfrak{k}^j\, \frac{\partial w_j}{\partial s} \end{aligned}$$

in ganzer Erstreckung des Raumes τ konvergieren und eindeutige und stetige Funktionen der Stelle darstellen.

Nunmehr können wir das Resultat aussprechen:

Die Reihen 87) stellen, wie behauptet, die Lösungen unserer gestellten Aufgabe dar.

§ 7.

Wir haben bisher über die gegebenen Funktionen $f_1\, f_2\, f_3$ in den Differentialgleichungen 7) vorausgesetzt, daß sie der Differentialgleichung genügen:

$$89)\qquad \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} = 0$$

und daß sie in ganzer Erstreckung des Gebietes τ derart stetig sind, daß für zwei Punkte 1 und 2 in genügend kleiner Entfernung r_{12}:

$$90)\qquad \text{abs.}\, | f_1 |_1^2 \overline{<} \text{endl. Konst. } r_{12}^\lambda, \ldots \mid \lambda \text{ echter Bruch};$$

für den Beweis ist aber von Wichtigkeit nur, daß die durch die Formeln:

$$91)\quad \begin{cases} u_0 = \frac{1-\mathfrak{k}}{4\pi} \int\limits_\tau f_1 \frac{d\tau}{r} - U_0, \\ v_0 = \frac{1-\mathfrak{k}}{4\pi} \int\limits_\tau f_2 \frac{d\tau}{r} - V_0, \\ w_0 = \frac{1-\mathfrak{k}}{4\pi} \int\limits_\tau f_3 \frac{d\tau}{r} - W_0 \end{cases}$$

definierten $u_0\, v_0\, w_0$ in τ mit ihren ersten Ableitungen eindeutig und stetig sind, und daß die stetige, allgemeine Potentialfunktion:

$$92)\quad \theta_0 = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial z}$$

in τ derart stetig ist, daß für zwei Punkte 1 und 2 in genügend kleiner Entfernung r_{12}:

$$93)\quad \text{abs.}\ \theta_0 \Big|_1^2 \overline{\overline{<}}\ \text{endl. Konst.}\ r_{12}^{\lambda},$$

und daß schließlich in τ in irgend welcher im übrigen beliebig kleinen Entfernung von ω:

$$94)\quad \begin{cases} \Delta \frac{\partial}{\partial x} \int\limits_\tau \theta_0 \frac{d\tau}{r} = -4\pi \frac{\partial \theta_0}{\partial x}, \\ \Delta \frac{\partial}{\partial y} \int\limits_\tau \theta_0 \frac{d\tau}{r} = -4\pi \frac{\partial \theta_0}{\partial y}, \\ \Delta \frac{\partial}{\partial z} \int\limits_\tau \theta_0 \frac{d\tau}{r} = -4\pi \frac{\partial \theta_0}{\partial z}. \end{cases}$$

Wir wollen jetzt zunächst weiter zeigen, daß diese Voraussetzungen 92), 93), 94) auch erfüllt sind, wenn

$$95)\quad \begin{cases} f_1 = X + \frac{\partial \Theta}{\partial x}, \\ f_2 = Y + \frac{\partial \Theta}{\partial y}, \quad \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0, \\ f_3 = Z + \frac{\partial \Theta}{\partial z}, \end{cases}$$

XYZ wieder in τ derart stetig sind, daß für zwei Punkte 1 und 2 in genügend kleiner Entfernung r_{12}:

96) $$\text{abs.}\, | X |_1^2 \overline{\leqq} \text{endl. Konst. } r_{12}^{\lambda}, \ldots$$

und Θ eine stetige, allgemeine Potentialfunktion vorstellen soll, von der wir nur wissen, daß ihre Stetigkeit in τ die Bedingung erfüllt:

97) $$\text{abs.}\, | \Theta |_1^2 \overline{\leqq} \text{endl. Konst. } r_{12}^{\lambda}$$

für zwei Punkte 1 und 2 in genügend kleiner Entfernung r_{12}.

Es folgt nämlich in diesem Falle aus den Formeln 91) in derselben Weise, wie 46) aus 37) folgte,

98) $$\begin{cases} \theta_0 = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[\dfrac{1-\mathfrak{k}}{4\pi}\displaystyle\int_\tau X\frac{d\tau}{r}\right] + \dfrac{\partial}{\partial y}\left[\dfrac{1-\mathfrak{k}}{4\pi}\displaystyle\int_\tau Y\frac{d\tau}{r}\right] + \dfrac{\partial}{\partial z}\left[\dfrac{1-\mathfrak{k}}{4\pi}\displaystyle\int_\tau Z\frac{d\tau}{r}\right] \\ \qquad + \dfrac{\partial}{\partial x}\left[\dfrac{1-\mathfrak{k}}{4\pi}\displaystyle\int_\tau \frac{\partial\Theta}{\partial x}\frac{d\tau}{r}\right] + \dfrac{\partial}{\partial y}\left[\dfrac{1-\mathfrak{k}}{4\pi}\displaystyle\int_\tau \frac{\partial\Theta}{\partial y}\frac{d\tau}{r}\right] \\ \qquad + \dfrac{\partial}{\partial z}\left[\dfrac{1-\mathfrak{k}}{4\pi}\displaystyle\int_\tau \frac{\partial\Theta}{\partial z}\frac{d\tau}{r}\right] - \dfrac{\partial U_0}{\partial x} - \dfrac{\partial V_0}{\partial y} - \dfrac{\partial W_0}{\partial z}, \\ \dfrac{2\theta_0}{1-\mathfrak{k}} = -\Theta - \left\{\Theta - \dfrac{1}{\pi}\left|\dfrac{\partial^2}{\partial \nu^2}\displaystyle\int_\tau \Theta\frac{d\tau}{r}\right|_a\right\} + H_0, \end{cases}$$

wo H_0 eine Funktion der Stelle an ω darstellt, die derart stetig ist, daß für zwei Punkte 1 und 2 der Fläche in genügend kleiner Entfernung r_{12}:

99) $$\text{abs.}\, | H_0 |_1^2 < \Gamma \text{ abs. Max.}\, (\Theta, X, Y, Z) \cdot r_{12}^{\Lambda},$$

wo Λ ein ganz beliebiger echter Bruch, Γ eine endliche Konstante ist, die nur von der Gestalt der Fläche ω und der Wahl des echten Bruches Λ abhängig ist, den man z. B. gleich λ setzen kann.

Es ist ferner θ_0 nach wie vor eine stetige Potentialfunktion des Raumes, die nunmehr nach dem Satze IV des II. Abschnitts der vorstehenden Abhandlung[1]) im ganzen Raume τ bei genügend kleinem r_{12} der Bedingung 93) genügt.

---

[1]) Diese Berichte S. 28.

Auch die Bedingungen 94) sind erfüllt, da XYZ die Bedingung 96) erfüllen und Θ nach Voraussetzung eine stetige, allgemeine Potentialfunktion des Raumes τ ist.

Der Beweis bleibt also nach wie vor richtig, wenn $f_1 f_2 f_3$ von der Form 95) sind.

Es bleibt jetzt schließlich noch der Fall zu behandeln, daß

$$F \equiv \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \neq 0, \tag{100}$$

aber eine derart stetige Funktion des Raumes τ ist, daß für zwei Punkte 1 und 2 in genügend kleiner Entfernung r_{12}:

$$\text{abs.} \left| F \right|_2^1 < \text{endl. Konst. } r_{12}^{\lambda}. \tag{101}$$

Wir setzen in diesem Falle:

$$\psi = -\frac{1}{4\pi(1+k)} \int_\tau F \frac{d\tau}{r} \tag{102}$$

und:

$$\left\{\begin{aligned} u &= -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_\tau \psi \frac{d\tau}{r} + \mathfrak{U} + u', \\ v &= -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_\tau \psi \frac{d\tau}{r} + \mathfrak{V} + v', \\ w &= -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_\tau \psi \frac{d\tau}{r} + \mathfrak{W} + w' \end{aligned}\right. \quad \left|\begin{aligned} &\mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W} \text{ Potentialfunktionen von } \tau \text{ mit den Randwerten:} \\ &\left.\begin{aligned} \mathfrak{U} &= \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_\tau \psi \frac{d\tau}{r}, \\ \mathfrak{V} &= \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_\tau \psi \frac{d\tau}{r}, \\ \mathfrak{W} &= \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_\tau \psi \frac{d\tau}{r}; \end{aligned}\right\} \text{an } \omega, \end{aligned}\right. \tag{103}$$

dann ist:

$$\left\{\begin{aligned} \Delta u + k \frac{\partial \theta}{\partial x} &= (1+k) \frac{\partial \psi}{\partial x} + \Delta u' + k \frac{\partial \theta'}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial z} \right), \\ \Delta v + k \frac{\partial \theta}{\partial y} &= (1+k) \frac{\partial \psi}{\partial y} + \Delta v' + k \frac{\partial \theta'}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial z} \right), \\ \Delta w + k \frac{\partial \theta}{\partial z} &= (1+k) \frac{\partial \psi}{\partial z} + \Delta w' + k \frac{\partial \theta'}{\partial z} + k \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial z} \right), \end{aligned}\right. \tag{104}$$

und die neuen Funktionen $u' \, v' \, w'$ haben die Differentialgleichungen zu erfüllen:

$$105)\begin{cases}\Delta u'+k\dfrac{\partial\theta'}{\partial x}=\left[X-(1+k)\dfrac{\partial\psi}{\partial x}\right]+\dfrac{\partial}{\partial x}\left[\Theta-k\left(\dfrac{\partial\mathfrak{U}}{\partial x}+\dfrac{\partial\mathfrak{V}}{\partial y}+\dfrac{\partial\mathfrak{W}}{\partial z}\right)\right],\\ \Delta v'+k\dfrac{\partial\theta'}{\partial y}=\left[Y-(1+k)\dfrac{\partial\psi}{\partial y}\right]+\dfrac{\partial}{\partial y}\left[\Theta-k\left(\dfrac{\partial\mathfrak{U}}{\partial x}+\dfrac{\partial\mathfrak{V}}{\partial y}+\dfrac{\partial\mathfrak{W}}{\partial z}\right)\right],\\ \Delta w'+k\dfrac{\partial\theta'}{\partial z}=\left[Z-(1+k)\dfrac{\partial\psi}{\partial z}\right]+\dfrac{\partial}{\partial z}\left[\Theta-k\left(\dfrac{\partial\mathfrak{U}}{\partial x}+\dfrac{\partial\mathfrak{V}}{\partial y}+\dfrac{\partial\mathfrak{W}}{\partial z}\right)\right];\end{cases}$$

das sind aber wieder Differentialgleichungen von der früheren Form 7), bei denen die Funktionen $f_1 f_2 f_3$ die Form 95) haben. Dieser Fall ist damit auf den früheren zurückgeführt.

§ 8.

Theorem. Es sei vorgelegt das folgende Problem:

Wir suchen drei in einem von einer stetig gekrümmten Fläche ω begrenzten Raume τ eindeutige und stetige Funktionen u, v, w mit endlichen ersten Ableitungen, welche in dem Gebiete τ den Differentialgleichungen genügen:

$$106)\quad\begin{cases}\Delta u+k\dfrac{\partial\theta}{\partial x}=-X-\dfrac{\partial\Theta}{\partial x},\\ \Delta v+k\dfrac{\partial\theta}{\partial y}=-Y-\dfrac{\partial\Theta}{\partial y},\\ \Delta w+k\dfrac{\partial\theta}{\partial z}=-Z-\dfrac{\partial\Theta}{\partial z}.\end{cases}$$

und den Grenzbedingungen:

$$107)\quad\left.\begin{aligned}u&=\bar{u},\\ v&=\bar{v},\\ w&=\bar{w},\end{aligned}\right\}\text{ an }\omega,$$

wo $X\,Y\,Z\,\Theta$ gegebene Funktionen der Stelle des Raumes τ, $\bar{u}\;\bar{v}\;\bar{w}$ gegebene Funktionen der Oberfläche ω sein sollen, und zwar machen wir über diese gegebenen Funktionen die folgenden Voraussetzungen:

$X, Y, Z, \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$ sollen in τ derart (abteilungsweise) stetig sein, daß für zwei Punkte 1 und 2 (der Teilgebiete) in genügend kleiner Entfernung r_{12}:

108) $\quad \text{abs.} \left| X \right|_1^2 \overline{<} \text{endl. Konst. } r_{12}^\lambda, \ldots \mid \lambda$ echter Bruch,

Θ soll eine stetige allgemeine Potentialfunktion des Raumes τ sein, deren Stetigkeit im Raume τ der Bedingung:

109) $$\text{abs.} \left| \Theta \right|_1^2 < \text{endl. Konst. } r_{12}^\lambda$$

bei genügend kleinem r_{12} genügt.

$\bar{u}\, \bar{v}\, \bar{w}$ sollen mit ihren ersten Ableitungen stetig sein, und zwar sollen die ersten Ableitungen derart stetig sein, daß für je zwei Punkte 1 und 2 der Fläche in genügend kleiner Entfernung r_{12}:

110) $$\text{abs.} \left. \frac{\partial \bar{u}}{\partial h} \right|_1^2 \overline{<} \text{endl. Konst. } r_{12}^\lambda,$$

wenn $h_{1(2)}$[1]) eine beliebige tangentiale Richtung vorstellt.

Dieses Problem hat, wenn der Parameter k die Ungleichung erfüllt:

111) $$-1 < k < +\infty$$

stets ein und nur ein Lösungssystem, das man auf folgende Weise erhalten kann:

Man führe entsprechend den Ausführungen des § 1 und des § 7 das Problem auf das Grundproblem:

112) $$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u + k \frac{\partial \theta}{\partial x} = -f_1, \\ \Delta v + k \frac{\partial \theta}{\partial y} = -f_2, \\ \Delta w + k \frac{\partial \theta}{\partial z} = -f_3, \end{array} \right\} \text{in } \tau, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} = 0,$$

[1]) $\cos(h_2 x) = \cos(h_1 x) + \varepsilon_1, \ldots, \quad \varepsilon_1 \overline{<} \text{endl. Konst. } r_{12}, \ldots$

$$\text{113)} \qquad \left.\begin{cases} u = 0, \\ v = 0, \\ w = 0 \end{cases}\right\} \text{an } \omega$$

zurück und bilde dann successive die folgenden Funktionen:

$$\text{114)} \qquad \begin{cases} u_0 = \dfrac{1-\mathfrak{k}}{4\pi} \displaystyle\int_\tau f_1 \frac{d\tau}{r} - U_0, \\[2ex] v_0 = \dfrac{1-\mathfrak{k}}{4\pi} \displaystyle\int_\tau f_2 \frac{d\tau}{r} - V_0, \qquad k = \dfrac{2\mathfrak{k}}{1-\mathfrak{k}} \\[2ex] w_0 = \dfrac{1-\mathfrak{k}}{4\pi} \displaystyle\int_\tau f_3 \frac{d\tau}{r} - W_0, \\[2ex] \left.\begin{array}{l} u_j = u_{j-1} + \dfrac{1}{2\pi} \dfrac{\partial}{\partial x} \displaystyle\int_\tau \theta_{j-1} \frac{d\tau}{r} - U_j, \\[2ex] v_j = v_{j-1} + \dfrac{1}{2\pi} \dfrac{\partial}{\partial y} \displaystyle\int_\tau \theta_{j-1} \frac{d\tau}{r} - V_j, \\[2ex] w_j = w_{j-1} + \dfrac{1}{2\pi} \dfrac{\partial}{\partial z} \displaystyle\int_\tau \theta_{j-1} \frac{d\tau}{r} - W_j, \end{array}\right\} j = 1, 2, \ldots, \end{cases}$$

wo die $U_j \, V_j \, W_j$ die Potentialfunktionen des Raumes τ vorstellen mit den Randwerten:

$$\text{115)} \qquad \left.\begin{cases} U_0 = \dfrac{1-\mathfrak{k}}{4\pi} \displaystyle\int_\tau f_1 \frac{d\tau}{r}, \quad U_j = \dfrac{1}{2\pi} \dfrac{\partial}{\partial x} \displaystyle\int_\tau \theta_{j-1} \frac{d\tau}{r}, \\[2ex] V_0 = \dfrac{1-\mathfrak{k}}{4\pi} \displaystyle\int_\tau f_3 \frac{d\tau}{r}, \quad V_j = \dfrac{1}{2\pi} \dfrac{\partial}{\partial y} \displaystyle\int_\tau \theta_{j-1} \frac{d\tau}{r}, \quad j = 1, 2 \ldots \\[2ex] W_0 = \dfrac{1-\mathfrak{k}}{4\pi} \displaystyle\int_\tau f_3 \frac{d\tau}{r}, \quad W_j = \dfrac{1}{2\pi} \dfrac{\partial}{\partial z} \displaystyle\int_\tau \theta_{j-1} \frac{d\tau}{r} \end{cases}\right\} \text{an } \omega,$$

dann erfüllen die Funktionen:

$$
116) \quad \left\{ \begin{aligned} u &= \sum_0^\infty j\, k^j u^j, \\ v &= \sum_0^\infty j\, k^j v^j, \\ w &= \sum_0^\infty j\, k^j w^j \end{aligned} \right.
$$

in τ in irgend welcher, im übrigen beliebig kleiner Entfernung von der Fläche ω die Differentialgleichung 112) und an der Fläche die Randbedingungen 113). Die Funktionen $u\, v\, w$, die durch die Reihen 116) definiert werden, sind mit ihren ersten Ableitungen in ganzer Erstreckung des Raumes τ eindeutig und stetig.

Es ist von Interesse, dieses Resultat mit dem entsprechenden Resultat in der Potentialtheorie zu vergleichen:

Es sei V die Lösung der Differentialgleichung:

$$\Delta V = -f(x, y, z),$$

welche in τ eindeutig und stetig ist und an ω die stetigen Randwerte

$$\overline{V}$$

annimmt: ist die in τ gegebene Funktion f derart stetig, daß für zwei Punkte 1 und 2 des Gebietes τ in genügend kleiner Entfernung r_{12}:

$$\text{abs.} \left| f \right|_1^2 < \text{endl. Konst.}\; r_{12}^\lambda, \quad \lambda \text{ echter Bruch}$$

und ist $\overline{V}$ mit seinen ersten Ableitungen auf ω eindeutig und stetig, und zwar die ersten Ableitungen derart stetig, daß für zwei Punkte 1 und 2 der Fläche in genügend kleiner Entfernung r_{12}:

$$\text{abs.} \left| \frac{\partial \overline{V}}{\partial h} \right|_1^2 < \text{endl. Konst.}\; r_{12}^\lambda,$$

wo $h_{1(2)}$[1]) eine beliebige tangentiale Richtung vorstellt, dann kann man aussagen, daß V mit seinen ersten Ableitungen im ganzen Gebiete τ eindeutig und stetig ist.

Es folgt dies leicht aus dem Satze IX meiner Abhandlung I zur Potentialtheorie[2]) mit Hilfe eines bekannten Theoremes von Hölder.[3])

Die Analogie wird noch größer, wenn man für V die folgende Differentialgleichung in τ fordert:

$$\Delta V = - X - \frac{\partial \Theta}{\partial s},$$

wo s eine beliebige feste Richtung, X eine gegebene Funktion von $(x\, y\, z)$, Θ eine gegebene, stetige allgemeine Potentialfunktion in τ vorstellt, bei den Voraussetzungen:

$$\left.\begin{array}{l} \text{abs.}\ |X|_1^2 \overline{<} \text{endl. Konst. } r_{12}^{\lambda}, \\ \text{abs.}\ |\Theta|_1^2 \overline{<} \text{endl. Konst. } r_{12}^{\lambda}, \end{array}\right| \lambda \text{ echter Bruch.}$$

Auch in diesem allgemeineren Falle ist V mit seinen ersten Ableitungen in ganzer Erstreckung von τ eindeutig und stetig.

---

[1]) $\cos(h_2 x) = \cos(h_1 x) + \varepsilon_1, \ldots; \quad |\varepsilon_1| < \text{endl. Konst. } r_{12}, \ldots$

[2]) Abhandulngen zur Potentialtheorie (Berlin, F. Dümmlers Verlag, 1901—1902).

[3]) Daß bei der Voraussetzung über f:

$$\Delta \int_\tau f \frac{d\tau}{r} = -4\pi f.$$

Anhang.

Die von mir in dieser Abhandlung gegebene Methode beruht auf der Umformung der Gleichungen des elastischen Gleichgewichts 7) auf die Form 8):

$$\Delta u - \mathfrak{k}\left(\Delta u - 2\frac{\partial\theta}{\partial x}\right) = -F_1,$$

$$\Delta v - \mathfrak{k}\left(\Delta v - 2\frac{\partial\theta}{\partial y}\right) = -F_2, \qquad k = \frac{2\mathfrak{k}}{1-\mathfrak{k}},$$

$$\Delta w - \mathfrak{k}\left(\Delta w - 2\frac{\partial\theta}{\partial z}\right) = -F_3,$$

und der Reihenentwickelung von $u\ v\ w$ nach Potenzen von $\mathfrak{k}$. Die Methode gilt für

$$-1 < \mathfrak{k} < 1$$

also für den Bereich von k:

$$-1 < k < +\infty.$$

Nach dem hier gegebenen Beweise kann man nun auch die früheren Entwickelungen, durch welche von Lauricella und E. und F. Cosserat die Lösung versucht wurde, in den Grenzen, in denen diese Entwickelungen konvergent sind, sicher stellen.

Wir wollen die Entwickelung, die von der Form:

$$117)\qquad \left\{\begin{aligned} \Delta u + k\frac{\partial\theta}{\partial x} &= -f_1 \\ \Delta v + k\frac{\partial\theta}{\partial y} &= -f_2, \\ \Delta w + k\frac{\partial\theta}{\partial z} &= -f_3 \end{aligned}\right.$$

ausgeht, nach Potenzen von k als die Entwickelung von Lauricella bezeichnen.

Man setzt bei derselben:

$$
118)\quad \begin{cases} u = \sum_0^\infty {}^i k^i u_i, \\ v = \sum_0^\infty {}^i k^i v_i, \\ w = \sum_0^\infty {}^i k^i w_i, \end{cases}
$$

wobei die Funktionen $u_i\ v_i\ w_i$ in der folgenden Weise gebildet werden:

$$
119)\quad \begin{cases} u_0 = \frac{1}{4\pi}\int_\tau f_1 \frac{d\tau}{r} - U_0, \\ v_0 = \frac{1}{4\pi}\int_\tau f_2 \frac{d\tau}{r} - V_0, \\ w_0 = \frac{1}{4\pi}\int_\tau f_3 \frac{d\tau}{r} - W_0, \\ u_i = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_\tau \theta_{i-1} \frac{d\tau}{r} - U_i, \\ v_i = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_\tau \theta_{i-1} \frac{d\tau}{r} - V_i, \\ w_i = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int_\tau \theta_{i-1} \frac{d\tau}{r} - W_i, \end{cases}
$$

$U_i\ V_i\ W_i$ die Potentialfunktionen des Gebietes τ mit den Randwerten:

$$
120)\quad \left.\begin{cases} U_0 = \frac{1}{4\pi}\int_\tau f_1 \frac{d\tau}{r}, \; U_i = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_\tau \theta_{i-1}\frac{d\tau}{r} \\ V_0 = \frac{1}{4\pi}\int_\tau f_2 \frac{d\tau}{r}, \; V_i = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_\tau \theta_{i-1}\frac{d\tau}{r}, \; i = 1, 2 \ldots \\ W_0 = \frac{1}{4\pi}\int_\tau f_3 \frac{d\tau}{r}, \; W_i = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int_\tau \theta_{i-1}\frac{d\tau}{r} \end{cases}\right\} \text{ an } \omega.
$$

Für:

$$1 < k < +1 \tag{121}$$

kann man analog, wie in § 3, nachweisen, daß die Reihe:

$$k^{2i} J_i, \quad j = 0, 1, 2 \ldots$$

in der:

$$J_i = \int_\tau \theta_i^2 \, d\tau \tag{122}$$

gesetzt ist, konvergiert, mit Hilfe der Ungleichung:

$$k^{2i} J_i \overline{<} a \cdot k^{2i}, \quad a \text{ endliche Konstante.} \tag{123}$$

Andererseits geht die Formel 46) S. 57, auf die es vor allem ankommt, in die folgende über:

$$\theta_i = -\frac{\theta_{i-1}}{2} - \frac{1}{2}\left(\theta_{i-1} - \frac{1}{\pi}\frac{\partial^2}{\partial\nu^2}\int_\tau \theta_{i-1}\frac{d\tau}{r}\Bigg|_a\right) + H_i \tag{124}$$

und hierauf die Formel 51) S. 58 in die folgende:

$$\begin{cases} \text{abs.} \left|\theta_i\right|_1^2 < \dfrac{1}{2}\left[(1+\varepsilon_i)\, C_{i-1} + \dfrac{c}{\varepsilon_\delta\, \sigma\,(1-\delta)^{i-1}} \text{abs.Max.}\,\theta_{i-1}\right] r_{12}^\lambda, \\ \qquad (0 \overline{<} r_{12} \overline{\overline{<}} \sigma\,(1-\delta)^i), \end{cases} \tag{125}$$

wo ε_i eine Zahl ist, die durch Vergrößerung von i unter jeden beliebigen Kleinheitsgrad herabgedrückt werden kann, und hierauf ist es auch möglich, die Konvergenz der Reihen 118) und ihrer ersten Ableitungen zu beweisen.

Man kann also zeigen, daß die Lauricellasche Entwickelung für:

$$-1 < k < +1$$

die Lösung des Problems darstellt.

Wir wollen schließlich die Entwickelung, die von der Form:

$$\begin{cases} \Delta u - \varkappa\left(\Delta u - \dfrac{\partial\theta}{\partial x}\right) = -\varphi_1, \; \varphi_1 = (1-\varkappa) f_1, \\ \Delta v - \varkappa\left(\Delta v - \dfrac{\partial\theta}{\partial y}\right) = -\varphi_2, \; \varphi_2 = (1-\varkappa) f_2. \; k = \dfrac{\varkappa}{1-\varkappa}, \\ \Delta w - \varkappa\left(\Delta w - \dfrac{\partial\theta}{\partial z}\right) = -\varphi_3, \; \varphi_3 - (1-\varkappa) f_3, \end{cases} \tag{126}$$

ausgeht, nach Potenzen von $\varkappa$ als die Entwickelung von Cosserat bezeichnen. Man setzt bei derselben:

$$
127)\quad \begin{cases} u = \sum_0^\infty{}^i \varkappa^i u_i, \\ v = \sum_0^\infty{}^i \varkappa^i v_i, \\ w = \sum_0^\infty{}^i \varkappa^i w_i, \end{cases}
$$

wobei die Funktionen $u_i\, v_i\, w_i$ in der folgenden Weise gebildet werden:

$$
128)\quad \begin{cases} u_0 = \frac{1}{4\pi}\int_\tau \varphi_1 \frac{d\tau}{r} - U_0, \\ v_0 = \frac{1}{4\pi}\int_\tau \varphi_2 \frac{d\tau}{r} - V_0, \\ w_0 = \frac{1}{4\pi}\int_\tau \varphi_3 \frac{d\tau}{r} - W_0, \\ u_i = u_{i-1} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_\tau \theta_{i-1} \frac{d\tau}{r} - U_i, \\ v_i = v_{i-1} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_\tau \theta_{i-1} \frac{d\tau}{r} - V_i, \quad i = 1, 2 \ldots \\ w_i = w_{i-1} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int_\tau \theta_{i-1} \frac{d\tau}{r} - W_i, \end{cases}
$$

$U_i\, V_i\, W_i$ die Potentialfunktionen des Gebietes τ mit den Randwerten:

$$
129)\quad \left\{ \begin{array}{l} U_0 = \frac{1}{4\pi}\int_\tau \varphi_1 \frac{d\tau}{r}, \quad U_i = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_\tau \theta_{i-1} \frac{d\tau}{r}, \\ V_0 = \frac{1}{4\pi}\int_\tau \varphi_2 \frac{d\tau}{r}, \quad V_i = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_\tau \theta_{i-1} \frac{d\tau}{r}, \quad i = 1, 2 \ldots \\ W_0 = \frac{1}{4\pi}\int_\tau \varphi_3 \frac{d\tau}{r}, \quad W_i = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int_\tau \theta_{i-1} \frac{d\tau}{r}, \end{array} \right\} \text{ an } \omega.
$$

Für:

$$-1 < \varkappa < +1 \tag{130}$$

kann man analog, wie in § 3, nachweisen, daß die Reihe:

$$\varkappa^{2i} J_i,$$

in der:

$$J_i = \int_\tau \theta_i^2 \, d\tau \tag{131}$$

gesetzt ist, konvergiert, mit Hilfe der Ungleichung:

$$\varkappa^{2i} J_i < a \cdot \varkappa^{2i}, \quad a \text{ endliche Konstante.} \tag{132}$$

Andererseits geht die Formel 46), auf die es vor allem ankommt, in die folgende über:

$$\theta_i = + \frac{\theta_{i-1}}{2} - \frac{1}{2}\left(\theta_{i-1} - \frac{1}{\pi} \left| \frac{\partial^2}{\partial \nu^2} \int_\tau \theta_{i-1} \frac{d\tau}{r} \right|_a \right) + H_i, \tag{133}$$

und hierauf die Formel 51) S. 58 in die folgende:

$$\begin{cases} \text{abs.} \left| \theta_i \right|_1^2 < \frac{1}{2}\left[(1+\varepsilon_i)\, C_{i-1} + \frac{c}{\varepsilon_\delta\, \sigma (1-\delta)^{i-1}} \text{abs. Max.}\, \theta_{i-1}\right] r_{12}^\lambda, \\ \qquad (0 \overline{\overline{<}} r_{12} \overline{\overline{<}} \sigma (1-\delta)^i), \end{cases} \tag{134}$$

wo ε_i eine Zahl ist, die durch Verkleinerung von i unter jeden beliebigen Kleinheitsgrad herabgedrückt werden kann, und hierauf ist es auch möglich, die Konvergenz der Reihen 127) und ihrer ersten Ableitungen zu beweisen.

Man kann also zeigen, daß die Cosseratsche Entwickelung für:

$$-1 < \varkappa < +1, \quad -\frac{1}{2} < k < +\infty$$

die Lösung des Problems darstellt.

Unser Beweis kann also auch dazu dienen, die Lauricellaschen und Cosseratschen Entwickelungen streng zu begründen, die Entwickelung von Lauricella für:

$$-1 < k < +1$$

die von Cosserat für:

$$-\frac{1}{2} < k < +\infty .$$

Unsere Entwickelung ist die allgemeinste, sie gibt die Lösung des Problems für:

$$-1 < k < +\infty .$$

Für manche Untersuchungen wird noch die folgende Bemerkung von Wichtigkeit sein:

Es ergibt sich nach den Ausführungen des § 5:

$$\left.\begin{array}{r} |\mathfrak{f}^i \theta_i| \leqq \text{endl. Konst. } A \cdot m^i, \\ \text{abs. } |\mathfrak{f}^i \theta_i|_1^2 \leqq \text{endl. Konst. } A\, m^i\, r_{12}^{\lambda}, \\ (0 < r_{12} \leqq \sigma (1-\delta)^i), \end{array}\right| \quad m < 1,$$

wenn

$$\text{abs. } |\theta_0|_1^2 \leqq C_0 r_{12}^{\lambda}, \quad (0 \leqq r_{12} < \sigma)$$

und A den größeren der beiden Werte C_0 und abs. Max. θ_0 darstellt; dabei sind die hier auftretenden endlichen Konstanten lediglich von der Gestalt der Oberfläche ω abhängig.

Bei der Definition von

$$\theta_0 = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial z}$$

durch die drei ersten Formeln 15) S. 44 ist mit Rücksicht auf Satz II des II. Abschnittes und Zusatz 4 zu III des I. Abschnittes der vorstehenden Abhandlung

$$A \leqq \text{abs. Max. } (F_1, F_2, F_3) \cdot \text{endl. Konst..}$$

und es folgt somit:

$$135) \quad \left\{\begin{array}{r} |\theta| \leqq \text{endl. Konst. abs. Max. } (F_1, F_2, F_3), \\ \text{abs. } |\theta|_1^2 \leqq \text{endl. Konst. abs. Max. } (F_1, F_2, F_3)\, r_{12}^{\lambda}, \\ (0 \leqq r_{12} \leqq \sigma'), \ (\sigma' < \sigma), \end{array}\right.$$

wobei λ ein ganz beliebiger echter Bruch sein kann und die endlichen Konstanten in keiner Weise von den Funktionen $F_1\, F_2\, F_3$ abhängen.

Die Lösungen u, v, w des Problems 7) S. 41 erfüllen also stets die Ungleichungen:

$$136)\begin{cases}\text{abs. Max.}(u, v, w, D_1 u, D_1 v, D_1 w) \overline{<} \text{endl. K. abs. Max.}(f_1, f_2, f_3), \\ \qquad\qquad \text{abs. } \theta\,\Big|_1^2 \overline{<} \text{endl. Konst. abs. Max.}(f_1, f_2, f_3)\, r_{12}^{\lambda},\end{cases}$$

wenn $D_1 u$, $D_1 v$, $D_1 w$ irgend welche erste Ableitungen von u, v, w bezeichnen.

Ist

$$F = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} \neq 0,$$

so ergeben die Ausführungen des § 7 (Formeln 103), 105)) mit Rücksicht auf das soeben gefundene Resultat 136) die Ungleichungen:

$$137)\begin{cases}\text{abs. Max.}(u, v, w, D_1 u, D_1 v, D_1 w) \overline{<} \text{endl. K. abs. Max.}(f_1, f_2, f_3, F), \\ \qquad\qquad \text{abs. } \theta\,\Big|_1^2 \overline{<} \text{endl. Konst. abs. Max.}(f_1, f_2, f_3, F)\, r_{12}^{\lambda},\end{cases}$$

wobei nach wie vor λ ein beliebiger echter Bruch ist und die endlichen Konstanten in keiner Weise von den Funktionen $f_1\, f_2\, f_3$ abhängen.

Die Formeln 137) sind noch einer weiteren Verallgemeinerung fähig, worauf ich bei einer späteren Gelegenheit zurückkommen werde.

Sitzung der math.-phys. Klasse vom 3. Februar 1906.

1. Herr H. v. Seeliger hält einen Vortrag: „Über die sogenannte absolute Bewegung.“

Der Verfasser behandelt vom Standpunkt des Astronomen die in den letzten Jahrzehnten vielbesprochene Frage nach einer einwandfreien Definition des Trägheitsgesetzes. Er stellt sich dabei entschieden auf die Seite der Relativisten, welche die Annahme einer absoluten Bewegung als sinnlos und demzufolge als unzulässig erklären. Es wird im einzelnen ausgeführt, daß weder die logische Fassung noch die tatsächlichen. astronomischen Verwendungen der mechanischen Grundsätze zur Aufgabe des Prinzips der Relativität nötigen.

2. Herr H. v. Seeliger legt eine Arbeit des Professors der Geodäsie an der Technischen Hochschule Dr. Max Schmidt vor: „Die südbayerische Dreieckskette, eine neue Verbindung der altbayerischen Grundlinie bei München mit der österreichischen Triangulierung bei Salzburg und der Basis von Oberbergheim.“

Dieselbe behandelt die vorläufigen Berechnungsergebnisse einer in den letzten Jahren im Auftrag der K. B. Kommission für die internationle Erdmessung bei der Akademie der Wissenschaften von ihm bearbeiteten Hauptdreieckskette.

Diese Kette großer Dreiecke, deren Eckpunkte teilweise auf den Berggipfeln des Nordrandes der bayerischen Alpen

gelegen sind, und die als wichtigsten Hauptpunkt die Spitze des nördlichen Turmes der Frauenkirche in München enthält, erstreckt sich längs des 48. Breitenparallels in eine Ausdehnung von 200 km von der württembergischen Grenze im Westen bis zu den Salzburger Bergen im Osten.

Sie bildet ein bisher noch fehlendes Zwischenglied einer zum Studium der Krümmungsverhältnisse des Erdsphäroids dienenden Längengradmessung auf dem 48. Breitenparallel, welche sich von Brest am atlantischen Ozean über Paris, Straßburg, München und Wien bis nach Astrachan am Kaspischen Meere ausdehnt. Die wissenschaftlichen Ergebnisse dieses großen Unternehmens werden nach seiner Vollendung als Ganzes durch das Zentralbureau der Internationalen Erdmessung in Potsdam bearbeitet und veröffentlicht werden.

3. Herr Siegfried Günther überreicht eine Abhandlung des Dr. med. Karl E. Ranke in Arosa: „Anthropologische Beobachtungen aus Zentralbrasilien.“ Die Abhandlung ist für die Denkschriften bestimmt.

Der Verfasser, welcher die von jeglicher Kultur unberührten Wilden des Xingu-Gebietes aus eigener Anschauung genau kennt, hat sich drei Stämme zu seinen Untersuchungen ausersehen, deren Sprachen bereits auf ihre Verschiedenheit hinweisen, und hat letztere auf Grund genauer anthropometrischer Bestimmungen, die er eingehend beschreibt, völlig außer Zweifel gesetzt. Dabei fallen auch interessante Streiflichter auf die Beziehungen zwischen den südamerikanischen Indianern und — einerseits — den Kaukasiern, sowie — andererseits — der mongoloiden Rasse. Endlich hat die Arbeit auch methodologischen Wert, indem sie umfassend die Hilfsmittel der von Fechner und Bravais begründeten, neuerdings von englischen und amerikanischen Forschern weiter geförderten mathematischen Statistik zur Anwendung bringt.

4. Herr Alfred Pringsheim legt eine Arbeit des Herrn Professor Edmund Landau in Berlin: „Über die Grundlagen der Theorie der Fakultätenreihen“ vor.

Der Verfasser beweist zunächst die bereits bekannten grundlegenden Sätze mit neuen, wesentlich vereinfachten Hilfsmitteln und fügt eine Anzahl neuer Sätze hinzu, die insbesondere die exakte Bestimmung der geradlinigen Konvergenz-Grenze und das Verhalten der durch solche Reihen definierten analytischen Funktionen auf jener Konvergenz-Geraden zum Inhalt haben. Außerdem behandelt er noch verschiedene andere mit den Fakultätenreihen verwandte Reihen und gewisse in naher Beziehung stehende bestimmte Integrale.



Über die sogenannte absolute Bewegung.

Von **Hugo Seeliger.**

(*Eingelaufen 3. Februar.*)

Für Galilei, den Begründer der wissenschaftlichen Mechanik, konnte kein Zweifel darüber entstehen, was er bei der Betrachtung von Bewegungsvorgängen als das Ruhende und Feste betrachten mußte, um voraussichtlich zu der einfachsten theoretischen Zusammenfassung der beobachteten Erscheinungen zu gelangen. Für ihn kamen fast ausschließlich nur Vorgänge in Betracht, die sich in unmittelbarer Nähe der Erdoberfläche abspielten und so erschien es von selbst als das Natürlichste, die Erdoberfläche zum Bezugssystem zu wählen, in Bezug auf welches alle irdischen Bewegungen zu betrachten seien. Ein glücklicher Umstand war es hierbei, daß für die damals bebekannten mechanischen Vorgänge die getroffene Wahl des Bezugssystems vollständig genügte, denn nur so war es ihm möglich, in den verwickelten Bewegungserscheinungen das im mechanischen Sinne Wesentliche von dem zu trennen, was als unwesentlich anzusehen ist. Das Resultat dieser Abstraktion, die zu den bewunderungswürdigsten gehört, die der menschliche Geist ausgeführt hat, war die Aufstellung des alle Bewegungsvorgänge beherrschenden Trägheitsgesetzes: ein sich selbst überlassener Punkt bewegt sich in gerader Linie mit gleichförmiger Geschwindigkeit. Was man darunter, trotz des Fehlens einer genaueren Definition, zu verstehen hat, konnte zu Galileis Zeiten niemandem zweifelhaft sein und insoweit auch in der Folgezeit keine Erscheinungen bekannt wurden, die eine genauere Festlegung der Begriffe verlangten, war da-

mit in der Tat die Grundlage zur Entwicklung der Mechanik gegeben. Denn die weiterhin entwickelten Begriffe der Beschleunigung, der Kraft, der Masse u. s. w. schließen sich an das Trägheitsgesetz an und sind durch dasselbe bedingt.

Als man aber die Folgerungen aus der kopernikanischen Lehre zu ziehen anfing, als man die Bewegungen der irdischen Körper — z. B. den freien Fall derselben — als auf einer rotierenden und um die Sonne sich bewegenden Erde vor sich gehend aufzufassen begann, als dann Newton die Bewegung der Himmelskörper auf Grundlage der Galileischen Forschungen zu untersuchen unternahm, mußte sich das Bedürfnis nach einer strengeren Begriffsbildung einstellen. Newton war der erste, der dieses Bedürfnis erkannte und eine strenge Definition des den mechanischen Betrachtungen zu Grunde zu legenden Koordinatensystems für nötig hielt. So trat zuerst bei ihm die fundamentalste Frage der Mechanik auf: in Bezug auf welches Koordinatensystem bewegt sich ein sich selbst überlassener Punkt geradlinig und gleichförmig? Die Antwort Newtons ist in den bekannten und viel zitierten Sätzen enthalten:[1])

I. Die absolute, wahre und mathematische Zeit verfließt an sich, vermöge ihrer Natur, gleichförmig und ohne Beziehung auf irgend einen äußeren Gegenstand . . . .

II. Der absolute Raum bleibt vermöge seiner Natur und und ohne Beziehung auf einen äußeren Gegenstand stets gleich und unbeweglich. Der relative Raum ist ein Maß oder ein beweglicher Teil des ersteren. . . .

III. Der Ort ist ein Teil des Raums, welchen ein Körper einnimmt und nach Verhältnis des Raumes entweder absolut oder relativ.

IV. Die absolute Bewegung ist die Übertragung des Körpers von einem absoluten Ort nach einem anderen absoluten Ort; die relative Bewegung die Übertragung von einem relativen Ort nach einem anderen relativen Ort. — Die weiteren Er-

[1]) Newtons mathematische Prinzipien etc. Übersetzt von Wolfers, 1872, S. 25.

klärungen Newtons sind dahin zusammenzufassen, daß die absolute Bewegung eines sich selbst überlassenen Punktes geradlinig und gleichförmig sei. Das gesuchte Koordinatensystem ist also ein absolutes oder ein mit dem absoluten festen Raum fest verbundenes.

Bei diesen wenig befriedigenden Festsetzungen Newtons haben sich die meisten Forscher auf dem Gebiete der Mechanik beruhigt. Dies muß einigermaßen befremden, da man kaum zaudern wird, E. Mach[1]) Recht zu geben, wenn er die absolute Zeit Newtons einen müßigen metaphysischen Begriff nennt und ebenso L. Lange,[2]) der die absolute Zeit und den absoluten Raum als „Gespenster" bezeichnet.

Die Geschichte der Versuche sich mit den Newtonschen Fiktionen in der einen oder anderen Weise abzufinden, ist äußerst interessant. Sie ist sehr eingehend von H. Streintz[3]) und L. Lange dargestellt worden. Danach hat es seit Newton bis zur Mitte des 19. Jahrhunderts zwar nicht an Versuchen zur Klarlegung gefehlt, aber es waren doch nur wenige Mathematiker und Physiker, die sich in dieser Richtung betätigt haben. Allgemeineres Interesse haben die sich hier darbietenden Fragen nicht gefunden und eine wirkliche Aufklärung ist tatsächlich nach keiner Richtung hin erfolgt. Eine Wendung wurde erst durch eine kleine Schrift von Carl Neumann[4]) hervorgerufen, die auf die Notwendigkeit einer strengeren Fassung der mechanischen Grundsätze aufmerksam machte.

---

[1]) E. Mach, Die Mechanik in ihrer Entwicklung, 5. Aufl., Leipzig 1904, S. 238.

[2]) Von L. Lange werden im folgenden drei Arbeiten zitiert:

a) Über das Beharrungsgesetz. Berichte der Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, 1885.

b) Die Geschichte u. Entwicklung des Bewegungsbegriffes. Leipz. 1886.

c) Das Inertialsystem vor dem Forum der Naturforschung. Wundts Philosophische Studien, Bd. XX, 1902.

[3]) H. Streintz, Die physikal. Grundlagen der Mechanik. Leipzig 1883.

[4]) Carl Neumann, Über die Prinzipien der Galilei-Newtonschen Theorie. Leipzig 1870.

Diese wichtige Schrift Neumanns enthält eine Fülle klarer und eindringender Gedanken, denen eine unbedingte Gültigkeit zuerkannt werden muß, auch wenn man sich seinen schließlichen Zusammenfassungen nicht anschließen kann.

Nahezu gleichzeitig und unabhängig von C. Neumann setzen die Bemühungen E. Machs ein, dem alle unsere Erkenntnisse beherrschenden Prinzipe der Relativität auch in diesem Gebiete Geltung zu verschaffen. Seitdem hat man den besprochenen Fragen ein intensives Interesse entgegengebracht, wie eine recht umfangreiche Literatur darüber beweist. Diese ist in zusammenhängender Weise von Mach und L. Lange in den zitierten Schriften kritisch besprochen worden. Eine sehr vollständige Übersicht über diese Literatur hat A. Voß[1]) gegeben.

Wenn ich im folgenden auf den Gegenstand näher eingehe, so geschieht dies in der Absicht, den Versuch zu machen, das Fazit aus den Aufklärungen zu ziehen, die die letzten drei Jahrzehnte gebracht haben, und zwar in einer dem Gedankenkreise des Astronomen entsprechenden Weise. In der Astronomie ist die Überlegung dieser fundamentalen Fragen von großer Wichtigkeit und die richtige Interpretation mancher Tatsachen, welche die neuere Fixsternkunde kennen gelehrt hat, hängt hiervon ab. Die Schriften von L. Lange und Mach stellen gewiß befriedigende und richtige Lösungen der aufgetauchten Schwierigkeiten dar, wie sich im folgenden auch ergeben wird. Trotzdem hoffe ich, daß die folgenden Bemerkungen als nicht ganz unnötig sich erweisen werden.

Bisher hat sich, soviel ich weiß, von astronomischer Seite nur Herr E. Anding[2]) mit dem Verhältnis des in der Astronomie gebrauchten empirischen Koordinatensystem zu dem sogenannten „absoluten“ der Mechanik beschäftigt. Es ist selbstverständlich, daß im folgenden sich nahe Berührungspunkte mit den ausgezeichneten Auseinandersetzungen Herrn E. Andings herausstellen werden.

[1]) Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Band IV.

[2]) Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften. Band VI_2. 1905.

1.

Ausgehend von der Einsicht, daß ebenso wie nur relative Lagen der Objekte gegeneinander, auch nur relative Bewegungen beobachtet und gemessen werden können, muß man vielgebrauchte Begriffe wie: absoluter Raum, absolute Bewegung, absolute Ruhe als sinnlos erklären. Wenn auch natürlich nichts dagegen einzuwenden ist, daß man der Kürze wegen diese Worte gebraucht, solange man sie nur wirklich faßbaren Begriffen zuordnet, so ist es doch, wie L. Lange betont, ratsam, etwaigen Mißverständnissen vorzubeugen und jene Worte gänzlich zu vermeiden. Es soll demzufolge das Newtonsche „absolute“ Koordinatensystem, einem sehr passenden Vorschlage L. Langes gemäß „Inertialsystem“ genannt werden. Ebenso soll „Inertialzeit“ „Inertialbewegung“ materiell mit dem übereinstimmen, was Newton durch das Beiwort absolut bezeichnen wollte.

Die Frage, welche vorliegt, geht also dahin: wie ist das Newtonsche Inertialsystem vom Standpunkt der Relativität aus zu definieren? Wir sagen „Newtonsches Inertialsystem“, weil dieselben Grundlagen festgehalten werden sollen, welche sich beim Aufbau der heutigen Mechanik nach jeder Richtung bewährt haben. Im wesentlichen kommen diese auf den materiellen Inhalt des Galilei-Newtonschen Trägheitsgesetzes hinaus. Notwendig ist dieser Standpunkt keineswegs, denn niemand wird die Möglichkeit leugnen, andere Systeme der Mechanik aufstellen und ausbauen zu können. Zweifelhaft bleibt es nur, ob man auf anderem Wege zu einer ebenso einfachen Zusammenfassung der Bewegungstatsachen gelangen kann, wie der heutigen Mechanik gelungen ist.

Mit der Forderung nach einer logisch einwandfreien Definition eines Inertialsystems darf die nach der tatsächlichen Festlegung eines solchen, z. B. gegen den Fixsternhimmel oder gegen ein System ausgewählter Sterne, nicht vermengt werden. Denn diese Festlegung kann unabhängig von einer vorangehenden Definition dadurch bewerkstelligt werden, daß einfachere Bewegungsvorgänge verfolgt werden, in denen Richtungen auf-

treten, welche nach den weiteren Entwicklungen der Mechanik in einem Inertialsystem unveränderlich sind. Mit diesen Richtungen also bilden die Achsen eines Inertialsystems unveränderliche Winkel, und wenn man jene gegen die Fixsterne festlegt, so ist dasselbe mit den Inertialaxen geschehen. Dieser Weg ist schon von Newton, allerdings in sozusagen umgekehrter Richtung, vorgezeichnet worden. Denn er hat gezeigt, und dieses Resultat als wichtig hervorgehoben, daß in seinem „absoluten“ System sowohl die Apsidenlinien als auch die Ebenen der Planetenbahnen festliegen, wenn selbstverständlich von den störenden Einwirkungen der anderen Planeten abgesehen wird. Die Richtungen von der Sonne nach den Perihelien und Aphelien, ebenso wie die Durchschnittslinien der Planetenbahnen mit irgend einer von ihnen erlauben demnach die Lage eines Inertialsystems gegen ein beliebiges empirisches, etwa durch die Fixsterne definiertes System zu bestimmen. Man kann auch andere astronomisch verfolgbare Erscheinungen, wie die aus der Rotationstheorie ableitbaren Veränderungen der Lagen von Rotationsachsen hierbei benutzen, doch sind solche Modifikationen des Verfahrens prinzipiell unwesentlich. Wesentlich bleibt die Möglichkeit einer Festlegung mechanischer Inertialsysteme gegen empirische auf Grund der Newtonschen Entwicklungen. In erweiterter Fassung hat neuerdings Carl Neumann[1]) diesen Newtonschen Ansatz in überaus klarer Weise auseinandergesetzt und auch die Ausführungen Herrn Andings weisen in gleicher Richtung.

Faßt man die Frage von diesem empirischen Standpunkt, so erscheint die Forderung nach einer streng logischen Definition des Inertialsystems als weniger wichtig. Man schiebt dann allerdings das Rätselhafte und Mysteriöse im absoluten System Newtons beiseite, ohne es erklären zu wollen. Es ist nun zwar denkbar, daß sich mancher durch dieses Verfahren befriedigt fühlen könnte, aber der Meinung, daß die Annahme der abso-

[1]) Carl Neumann, Über die sogenannte absolute Bewegung. Boltzmann-Festschrift, Leipzig 1904.

luten Zeit und des absoluten Raumes „weitaus“ als die beste und einfachste zu gelten habe, wie neuerdings ein sehr hervorragender Mathematiker behauptet hat, muß auf das entschiedenste entgegengetreten werden. Denn diese Annahme ist sinnlos, liegt außerhalb aller Erfahrung und erlaubt gar keine bestimmte Fassung. Will man der unbequemen Frage nach der Bedeutung des Trägheitsgesetzes aus dem Wege gehen, so kann man dies nur, wie erwähnt, durch die Bestimmung der Lage des sogenannten absoluten Koordinatensystems gegen ein empirisch gegebenes. Man verzichtet so allerdings auf eine Diskussion der Grundlagen der Mechanik, gibt sich aber dann wenigstens keiner Selbsttäuschung hin. Stellt man sich aber nicht auf diesen wenig befriedigenden Standpunkt, so drängt sich uns von selbst die Frage auf: wie kommt es, daß sich Geister wie Lagrange, Laplace u. a. mit der Fiktion eines absoluten Raumes befreunden konnten, was bedeutete ihnen dieser an sich inhaltsleere Begriff? Carl Neumann hat nun von Neuem auf die bekannte Stelle in der Mécanique céleste von Laplace aufmerksam gemacht, in der von einem „espace sans bornes, immobile et pénétrable à la matière“ die Rede ist. Dieser Ausspruch, dem man ähnliche Aussprüche anderer berühmter Mathematiker und Physiker an die Seite stellen könnte, läßt kaum einen Zweifel aufkommen darüber, daß hier der Raum als eine objektiv gegebene Realität, ausgestattet mit irgendwelchen bestimmten Eigenschaften mathematischer oder physikalischer Natur, angesehen wird. Man darf hierin nicht etwa den Hinweis auf die Vorstellungen der modernen Physik erblicken, welche im Äther den Vermittler oder Erzeuger aller physikalischen Vorgänge sieht. Gelänge es wirklich, wovon wir noch weit entfernt sind, alle Bewegungen durch Beziehungen zu dem Äther zu erklären, so wäre allerdings damit jede Schwierigkeit in der Definition des Trägheitsgesetzes behoben, zugleich hätte sich aber das Prinzip der Relativität glänzend bewährt. Die hier allein in Betracht gezogene heutige Mechanik hat mit solchen Beziehungen nichts zu tun und der räumlich ausgedehnte Äther ist eben nicht der Raum, sondern ein sehr

reales Ding. Der Raum soll frei sein von allem, was irgend wie an das, was wir Materie nennen, erinnert. Denn erst wenn von allen materiellen Objekten, von allen ihren physikalischen Eigenschaften abstrahiert wird, soll der Newtonsche absolute Raum übrig bleiben. Für den Naturforscher geht aber bei diesem Prozesse alles ohne Rest verloren und der Begriff verflüchtigt sich zu nichts. Deshalb ist gegen die Konstruktion dieses monströsen Gedankendings, Raum genannt, von mancher Seite schon protestiert worden und es ist in der Tat nicht abzusehen, wie diesem Protest auf wirksame Weise begegnet werden könnte. Offenbar handelt es sich hier um ein Mißverständnis, demzufolge man die Art und Weise, wie man räumliche Beziehungen von Objekten zueinander aufstellen kann, verwechselt mit Eigenschaften, die man einem objektiv nicht existierenden, aber in dieser Weise angesehenen absoluten Raum andichtet. Aus diesem Mißverständnis sind auch zum Teil jene merkwürdigen Interpretationen zu erklären, welche manche Mathematiker den Entwicklungen der sogenannten nichteuklidischen Geometrie angedeihen lassen, denen doch eine ganz andere Bedeutung zukommt.

Die Schwierigkeiten, welche sich einer Begriffsbestimmung des Inertialsystems im Sinne des Prinzips der Relativität, an dem unter allen Umständen festgehalten werden muß, entgegenstellen, beruhen, wie Newton ausführlich erörtert hat, auf dem Auftreten von Zentrifugalkräften bei Rotationen. Die von ihm angeführten einfachen Beispiele sind auch jetzt noch die einleuchtendsten und sie können deshalb bei Auseinandersetzungen, wie die vorliegenden, nicht gut umgangen werden. Ehe mit einigen Worten auf sie eingegangen wird, möge eine von Carl Neumann erwähnte instruktive Eventualität besprochen werden.

Ein flüssiger, um eine Achse rotierender homogener Körper wird die Gestalt eines Ellipsoids annehmen. Denkt man sich nun außer dieser rotierenden Masse alle übrigen Weltkörper des Universums vernichtet, so würden nur die in relativer Ruhe zu einander befindlichen Teilchen des Körpers vorhanden sein. Da also alle vorhandenen Teilchen in relativer Ruhe sind, könnten

auch, wenn die Rotation etwas rein Relatives wäre, keine Zentrifugalkräfte mehr vorhanden sein und mit ihrem Verschwinden müßte die Abplattung des rotierenden Körpers aufhören. L. Lange[1]) bemerkt demgegenüber, daß das Trägheitsgesetz gar nicht behauptet, daß die relative Ruhe der Teile eines materiellen Komplexes schon das Auftreten von Zentrifugalkräften verhindert, sondern nur die Ruhe gegen ein Inertialsystem. Im übrigen ist die Ausführung des Neumannschen Gedankenexperiments, um einen Ausdruck von E. Mach[2]) zu gebrauchen, nur dann zulässig, wenn angenommen wird, daß nur die Relativität der Bewegung gegen beliebig ausgewählte Massen in Frage kommt, was doch gewiß niemand behaupten wird. Im vorliegenden Falle werden die für die Definitionen wesentlichen Körper, nämlich die weit entfernten kosmischen Massen, wie noch gezeigt werden wird, fortgelassen und die unwesentlichen, nämlich die zu einer flüssigen im Gleichgewichte befindlichen Masse vereinten also in einer nahen physikalischen Verbindung miteinander stehenden, beibehalten. Die in Frage kommenden Definitionen verlieren ihre Bedeutung und es ist keineswegs merkwürdig, daß die Anwendung von nunmehr inhaltsleer gewordenen Begriffen zu Widersprüchen und Schwierigkeiten führt. Hätte man aber von vornherein nur einen isolierten, um eine Achse rotierenden Körper und gar keine anderen Massen, nach denen irgend eine Orientierung vorgenommen werden könnte, so würde sich die Mechanik auf einem solchen Körper ebenfalls in Übereinstimmung mit dem Prinizpe der Relativität aufbauen lassen. Indessen wäre es vermutlich eine äußerst schwierige Aufgabe gewesen, unter solchen Umständen Ordnung in die Bewegungserscheinungen zu bringen, und niemand kann wissen, wie sich hier die Mechanik entwickelt hätte. Ein besonders ingeniöser Kopf wäre vielleicht auf den Versuch verfallen, alle Ortsveränderungen auf ein Koordinatensystem zu beziehen, dessen eine Achse mit der Rotationsachse zusammenfällt, deren Lage also etwa durch die kleinste Dimension des Körpers bedingt ist,

---

[1]) Abhandlung b) S. 123. [2]) E. Mach. S. 301.

während die beiden darauf senkrechten Achsen im Äquator mit konstanter Winkelgeschwindigkeit gegen die im Äquator gelegenen Teile des Weltkörpers sich drehen. So wären die ersten Grundlagen zu einer Mechanik in unserem Sinne gegeben gewesen, wobei nach keiner Richtung die Nötigung zur Annahme irgendwelcher „absoluter" Drehungen oder dergleichen aufgetreten wäre. Ähnliche Überlegungen könnte man anstellen, wenn nur zwei Körper, die sich umeinander bewegen, vorhanden wären. Doch haben diese und ähnliche Betrachtungen keinen besonderen Wert, denn wie Mach öfters hervorgehoben hat, die Mechanik ist eine rein empirische Wissenschaft, die sich nur auf Grund der wirklich gemachten Erfahrungen gerade so entwickelt hat, wie es tatsächlich geschehen ist.

Die obenerwähnten Beispiele Newtons betreffen das vielbesprochene „Wasserglas" und die zwei etwa durch einen Faden miteinander verbundenen Kugeln. Wird ein Glas mit Wasser um eine Achse gedreht, so krümmt sich die Wasseroberfläche immer mehr mit zunehmender Drehgeschwindigkeit und derselbe Erfolg kann nicht etwa dadurch erreicht werden, daß man das Glas ruhen läßt, und die Umgebung in Drehung versetzt. Der Faden der beiden Kugeln erhält mit zunehmender Drehgeschwindigkeit zunehmende Spannung und man könnte aus der mit einem Kraftmesser gemessenen Spannung die Größe der Rotationsgeschwindigkeit, die sich dann als eine „absolute" erweisen soll, berechnen. Die Beweiskraft dieser Anordnungen für das Vorhandensein einer absoluten Rotation fällt aber in sich zusammen, wenn es gelingt, ein Inertialsystem aus dem Prinzipe der Relativität zu definieren.

Mach[1]) bezeichnet mit Recht die Anordnung mit dem Wasserglas, wenn dieses ruhend angenommen, hingegen die ganze Umgebung, also auch der Fixsternhimmel, rotierend gedacht wird, als unausführbar und deshalb nichtssagend. Wenn er aber weiter[2]) sagt: „Niemand kann sagen, wie der Versuch verlaufen würde, wenn die Gefäßwände immer dicker und

---

[1]) Mechanik, S. 253. [2]) Mechanik, S. 253.

massiger und zuletzt mehrere Meilen dick würden. Es liegt nur der eine Versuch vor und, wir haben denselben mit den übrigen uns bekannten Tatsachen, nicht aber mit unseren willkürlichen Dichtungen in Einklang zu bringen", so lassen sich doch wohl nicht unbegründete Einwendungen dagegen erheben. Soll mit dem Angeführten gesagt sein, daß wir niemals mit Sicherheit über das hinausgehen können, was beobachtet und im Sinne einer wissenschaftlichen Disziplin erklärt worden ist, indem wir immer gefaßt sein müssen, auf eine Tatsache zu stoßen, die eine Modifikation der bestehenden Theorie nötig machen könnte, so ist dies allerdings ein etwas rigoroser Standpunkt, dessen Zulässigkeit indessen nicht bestritten werden kann. Hält man sich aber an den Wortlaut, so müßte man eine erhebliche Veränderung in den quantitativen Verhältnissen allein, gegenüber denen, welche bei der Vergleichung der Theorie mit den Beobachtungen zu Gebote standen, als eine vollständig neue Situation betrachten, deren Erklärbarkeit durch die Theorie keineswegs wahrscheinlich sei. Gäbe man dies zu, dann wären z. B. sehr viele Resultate der Mechanik des Himmels sehr schwach begründet. Die auf dem Erdkörper mit gewissen Theorien in Übereinstimmung gefundenen Resultate werden uns z. B. nicht berechtigen, dieselbe Theorie auf die soviel größeren Himmelskörper, wie Sonne oder Jupiter, anzuwenden, der Nachweis, die Rotation der Sonne könne nur eine kleine Abplattung ihrer Oberfläche hervorrufen, falls sie als flüssig angenommen werden darf, wäre hinfällig u. s. f. Sicherlich würde dieser allzu rigorose Standpunkt auf die Entwicklung der Mechanik des Himmels nicht günstig einwirken und ich meine, er wäre auch in Rücksicht auf die bisherigen Erfahrungen, die wohl ausnahmslos nachträglich ähnliche Extrapolationen bestätigt haben, nicht gerechtfertigt.

An die eben besprochene Äußerung Machs knüpfen B. und J. Friedländer[3]) an. Ohne, wie wir scheint, die sonstigen Klarstellungen Machs und namentlich auch Langes genügend zu

---

[1]) B. u. J. Friedländer, Absolute oder relative Bewegung? Berlin 1896.

würdigen, wollen sie das Trägheitsgesetz in einem anderen Prinzip zusammenfassen: alle Massen streben danach, ihren Bewegungszustand nach Geschwindigkeit und Richtung aufrecht zu erhalten. Ohne genauere Verfolgung im einzelnen, die die Verfasser nicht versuchen, sind solche Sätze viel zu unbestimmt und es ist wohl kaum möglich, ihre Richtigkeit zu beurteilen. Im besten Falle, nämlich wenn es, was mir nicht sehr wahrscheinlich scheint, gelänge, in dieser oder ähnlicher Weise die Grundlagen der Mechanik herzustellen, käme es nach den Vorschlägen der Verfasser in letzter Instanz auf die Einführung von Kräften hinaus, die von den relativen Geschwindigkeiten abhängen und auch die Gesetze der Massenanziehung müßten durch dementsprechende Zusatzglieder vervollständigt werden. Der Sinn der von den Herren F. in Angriff genommenen Experimente kann wohl kaum anders gedeutet werden. Diese Experimente selbst suchen nach einem Einfluß schnell rotierender, verhältnismäßig großer Massen — als solche wurde ein großes Fabriksschwungrad genommen — auf eine möglichst nah aufgestellte Drehwage. Für die vorliegenden Fragen wäre der Nachweis solcher Einwirkungen — der bisher nicht gelungen ist —, wie mir scheint, erst dann von Bedeutung, wenn gezeigt werden könnte, daß diese Einwirkungen nicht von der Drehgeschwindigkeit gegen ein Inertialsystem, sondern tatsächlich von der relativen Geschwindigkeit gegen die Drehwage abhängen. Die Versuche müßten demnach eine Genauigkeit besitzen, die wohl gänzlich außerhalb des Bereiches des Erreichbaren liegen dürfte.

2.

Ich habe schon oben die Meinung ausgesprochen, daß durch die Arbeiten von Mach und L. Lange die Aufgabe, das Trägheitsgesetz aus dem Prinzip der Relativität zu erklären, im wesentlichen als gelöst zu betrachten ist. Es scheinen sich auch andere dieser Auffassung anzuschließen, wie u. a. aus den ähnliche Tendenzen wie Lange verfolgenden wert-

vollen Aufsätzen von Mac Gregor[1]) hervorgeht. Die wichtigen Resultate L. Langes verdienen aber unter allen Umständen mehr, als bisher, bekannt zu werden, auch was ihre mathematische Begründung betrifft. Anschließend an ein Referat[2]) bald nach Erscheinen der Langeschen ersten Schrift werde ich im folgenden eine Begründung der Langeschen Sätze geben. Die Darstellung folgt selbstverständlich dem Gedankengange Langes, benützt aber im einzelnen etwas abgeänderte Entwicklungen.

In den Gleichungen, welche die Transformation von einem rechtwinkligen Koordinatensystem $\Xi\, Y\, Z$ zu einem anderen X, Y, Z, vermitteln:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \delta + \alpha x + \alpha_1 y + \alpha_2 z \\ \eta &= \delta_1 + \beta x + \beta_1 y + \beta_2 z \\ \zeta &= \delta_2 + \gamma x + \gamma_1 y + \gamma_2 z \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

kommen 6 voneinander unabhängige Koeffizienten vor. Die Zeit t soll zunächst in einer ganz willkürlichen Skala gemessen werden, so daß sie nichts anderes als eine vierte Variable bedeutet, durch welche die Bewegungsvorgänge mitbestimmt werden. Bewegt sich im System $\Xi\, Y\, Z$ ein Massenpunkt auf einer beliebigen Kurve mit beliebiger Geschwindigkeit, so werden $\xi\,\eta\,\zeta$ gegebene Funktionen von t sein. Aus (1) folgt dann sofort, daß es unendlich viele Systeme $X\,Y\,Z$ gibt, in Bezug auf welche dieser Punkt eine vorgeschriebene Kurve mit vorgeschriebener Geschwindigkeit beschreibt. Erst wenn 2 Punkte in beiden Systemen gegebene Bahnen mit gegebenen Geschwindigkeiten beschreiben sollen, wäre die Lage und Bewegung des einen Systems gegen das andere im allgemeinen bestimmt, da dann 6 Größen 6 Gleichungen zu genügen haben. Es sollen nun nur geradlinige Bahnen betrachtet werden. Nimmt man zu-

---

[1]) Mac Gregor, On the fundamental hypotheses of abstract dynamics. Canada, R. Soc. Trans. vol X, 1892, ferner; On the hypotheses of dynamics. Philos. Meg. 5. ser., vol. 36, 1893.

[2]) Vierteljahresschrift der Astr. Gesellsch., Band 28.

erst an, daß n Punkte im System XYZ sich in vorgeschriebenen Geraden

$$\left.\begin{array}{l} x^{(n)} = A_n z^{(n)} + C_n \\ y^{(n)} = B_n z^{(n)} + D_n \end{array}; \quad n = 0, 1 \ldots, n-1 \right\} \tag{2}$$

bewegen sollen, so sind also die Größen A, B, C, D gegeben, während ihre Bewegung im System ΞYZ ebenfalls beliebig gegeben ist, so daß $\xi\,\eta\,\zeta$ bekannte Funktionen der Zeit sind. Für jeden Wert von t müssen dann $3n$ Gleichungen (1) und $2n$ Gleichungen (2) erfüllt sein, denen die 6 Transformationskoeffizienten und $3n$ Koordinaten zu genügen haben. Die Erfüllung der Bedingungen ist im allgemeinen nur möglich, wenn

$$5n < 3n + 6 \quad \text{oder} \quad n \leq 3$$

Man kann demnach im allgemeinen ein System XYZ so bestimmen, daß in ihm 3 beliebig bewegte Punkte vorgeschriebene Gerade beschreiben. Für diesen Fall schreiben wir die Gleichungen der gegebenen Geraden besser in der Parameterdarstellung

$$\begin{array}{l|l|l} x = a + b\,\varphi(t) & x' = a' + b'\varphi' & x'' = a'' + b''\varphi'' \\ y = a_1 + b_1\varphi(t) & y' = a_1' + b_1'\varphi' & y'' = a_1'' + b_1''\varphi'' \\ z = a_2 + b_2\varphi(t) & z' = a_2' + b_2'\varphi' & z'' = a_2'' + b_2''\varphi'' \end{array} \tag{3}$$

Gegeben sind also die Koeffizienten $a, b\,.\,.$ die Funktionen $\xi\,\eta\,\zeta, \xi' \ldots \xi''$, während die Funktionen $\varphi\,\varphi'\,\varphi''$, $\alpha\,\beta\,\delta \ldots.$ zu bestimmen sind. Da es sich, weil die Orthogonalitätsbedingungen vom 2. Grade sind, um nichtlineare Gleichungen handelt, ist die Bestimmung nicht eindeutig, sie kann auch zu imaginären Werten führen. Aus den 9 Gleichungen (1) kann man die 6 Transformationskoeffizienten eliminieren. Die sich so ergebenden 3 voneinander unabhängigen Gleichungen erhält man am einfachsten dadurch, daß man das von den drei Punkten in jedem Zeitmoment gebildete Dreieck betrachtet. Dasselbe ist erst durch alle 3 Seiten gegeben und diese drei Seiten müssen in den beiderlei Systemen dieselbe Länge haben.

Die 3 im allgemeinen voneinander unabhängigen Gleichungen sind also:

$$\left.\begin{aligned}(\xi-\xi')^2+(\eta-\eta')^2+(\zeta-\zeta')^2 &= (x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\\ (\xi-\xi'')^2+(\eta-\eta'')^2+(\zeta-\zeta'')^2 &= (x \quad x'')^2+(y-y'')^2+(z-z'')^2\\ (\xi'-\xi'')^2+(\eta'-\eta'')^2+(\zeta'-\zeta'')^2 &= (x'-x'')^2+(y'-y'')^2+(z'-z'')^2\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Führt man mit (3) die $\varphi\varphi'\varphi''$ ein, so erscheinen diese für jedes t durch 3 quadratische Gleichungen bestimmt. Denkt man sich die $\varphi\varphi'\varphi''$ etwa als rechtwinklige Koordinaten eines Punktes, so muß dieser zugleich auf 3 Oberflächen 2. Gerades liegen. Danach gibt es höchstens 8 zusammengehörige Werte $\varphi\varphi'\varphi''$. Bildet man nun aus (1) die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}\xi-\xi' &= \alpha(x-x')+\alpha_1(y-y')+\alpha_2(z-z')\\ \xi-\xi'' &= \alpha(x-x'')+\alpha_2(y-y'')+\alpha_2(z-z'')\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

wozu noch noch hinzutritt

$$1=\alpha^2+\alpha_1^2+\alpha_2^2$$

so ergeben sich für jedes Wertsystem $\varphi\varphi'\varphi''$ zwei Lösungen für $\alpha\alpha_1\alpha_2$ etc. und ähnlich für $\beta\beta_1\beta_2$. Denn die ersten beiden Gleichungen geben α_1 und α_2 als lineare Funktionen von α und die 3. Gleichung ist dann vom 2. Grade in Bezug auf α.

Zu jedem Wertsystem $\alpha\alpha_1\alpha_2$ gehört aber nur ein Wertsystem $\beta\beta_1\beta_2$, denn es ist

$$\begin{aligned}\eta-\eta' &= \beta(x-x')+\beta_1(y-y')+\beta_2(z-z')\\ \eta-\eta'' &= \beta(x-x'')+\beta_1(y-y'')+\beta_2(z-z'')\\ 0 &= \beta\cdot\alpha+\beta_1\alpha_1+\beta_2\alpha_2\end{aligned}$$

und die β bestimmen sich also eindeutig aus den $\alpha\alpha_1\alpha_2$.

Ganz ähnliches kann für die Bestimmung des $\gamma\gamma_1\gamma_2$ und auch der $\delta_1\delta_1,\delta_2$ ausgesagt werden, so daß es also höchstens 16 Koordinatensysteme gibt, die den gestellten Bedingungen entsprechen. Natürlich können einige der Lösungen imaginär werden und es können auch, da hier die Bestimmungen für die einzelnen Zeitmomente ausgeführt werden, reelle Lösungen mit

der Zeit imaginär werden und umgekehrt. Es ist wohl kaum nötig, zu erwähnen, daß die Bestimmung der a aus (5) unbestimmt wird, wenn die 3 Punkte in XYZ in einer Geraden liegen, welcher Fall also auszuschließen ist.

Man kann also auch für 3 sich selbst überlassene Punkte, die sich in Bezug auf ein willkürliches Koordinatensystem $\Xi Y Z$ irgendwie in bekannter Weise bewegen, ein Koordinatensystem XYZ gegen ΞYZ so festlegen, daß sich diese 3 Punkte in vorgeschriebenen Geraden bewegen und zwar gibt es nur eine relative kleine Zahl solcher Systeme.

Der letzte Zusatz setzt noch voraus, daß die Gleichungen (4) voneinander unabhängig sind, was wohl im allgemeinen, aber nicht in allen besonderen Fällen stattfindet. Sind die Gleichungen (4) nicht unabhängig voneinander, dann gibt es unendlich viele gesuchte Systeme, die Aufgabe ist unbestimmt. Die Unabhängigkeit der Gleichungen (4) voneinander wird dadurch ausgedrückt, daß man (3) in (4) einsetzt, die $\varphi\varphi'\varphi''$ als unabhängige Variable betrachtet und die Funktionaldeterminante Δ der 3 Funktionen von $\varphi\varphi'\varphi''$, welche in (4) vorkommen, gleich Null setzt. Man setze zur Abkürzung

$$\Sigma a = a + a_1 + a_2,\ \Sigma a' = a' + a_1' + a_2',\ \Sigma a b = ab + a_1 b_1 + a_2 b_2 \text{ etc.}$$

so schreiben sich die rechten Seiten von (4)

$$\Sigma(a'-a)^2 + 2\varphi' \Sigma(a'-a)b' - 2\varphi\Sigma(a'-a)b \\ - 2\Sigma bb'\varphi\varphi' + \varphi'^2\Sigma b'^2 + \varphi^2\Sigma b^2$$

$$\Sigma(a''-a)^2 + 2\varphi''\Sigma(a''-a)b'' - 2\varphi\Sigma(a''-a)b \\ - 2\Sigma bb''\varphi\varphi'' + \varphi''^2\Sigma b''^2 + \varphi^2\Sigma b^2$$

$$\Sigma(a''-a')^2 + 2\varphi''\Sigma(a''-a')b'' - 2\varphi\Sigma(a''-a')b' \\ - 2\Sigma b'b''\varphi'\varphi'' + \varphi''^2\Sigma b''^2 + \varphi'^2\Sigma b'^2$$

und wenn man weiter abkürzt:

$$\begin{array}{l|l|l} A = \Sigma ab + \varphi\Sigma b^2 & B = \Sigma a'b' + \varphi'\Sigma b'^2 & C = \Sigma a''b'' + \varphi''\Sigma b''^2 \\ A_1 = \Sigma a'b + \varphi'\Sigma bb' & B_1 = \Sigma a''b' + \varphi''\Sigma b'b'' & C_1 = \Sigma ab'' + \varphi\Sigma bb'' \\ A_2 = \Sigma a''b + \varphi''\Sigma bb'' & B_2 = \Sigma ab' + \varphi\Sigma bb' & C_2 = \Sigma a'b'' + \varphi'\Sigma b'b'' \end{array}$$

so wird

$$\Delta = \begin{vmatrix} A-A_1 & B-B_2 & 0 \\ A-A_2 & 0 & C-C_1 \\ 0 & B-B_1 & C-C_2 \end{vmatrix} = \begin{array}{l} -(A-A_1)(B-B_1)(C-C_1) \\ +(A-A_2)(B-B_2)(C-C_2) \end{array}$$

Offenbar ist $\Delta = 0$, wenn

$$b' = k\,b,\ b_1' = k\,b_1,\ b_2' = k\,b_2$$
$$b'' = k'b,\ b_1'' = k'b_1,\ b_2'' = k'b_2$$

d. h. wenn die Geraden parallel zueinander sind. Diese Bedingung ist also gewiß hinreichend. Daß sie aber auch notwendig ist, kann man folgendermaßen beweisen. Soll $\Delta = 0$ sein für alle möglichen Werte der $\varphi\,\varphi'\,\varphi''$, so kann man partiell nach den einzelnen φ diffenzieren.

Differenziert man log Δ partiell nach φ, so wird:

$$\frac{\Sigma b^2}{A-A_1} - \frac{\Sigma b b''}{C-C_1} = \frac{\Sigma b^2}{A-A_2} - \frac{\Sigma b b'}{B-B_2}$$

Differentiiert man weiter nach φ'':

$$\frac{(A-A_2)^2}{\Sigma b^2} = \frac{(C-C_1)^2}{\Sigma b''^2}$$

und durch nochmalige Differentiation nach φ ergibt sich sofort:

$$\frac{\Sigma b^2}{A-A_2} = -\frac{\Sigma b b''}{C-C_1}$$

eine Gleichung, die für jedes φ'' erfüllt sein muß, woraus man findet:

$$\Sigma b^2\, \Sigma (a''-a)\, b'' = \Sigma b\, b''\, (a''-a)\, b$$
$$\Sigma b^2\, \Sigma b''^2 = (\Sigma b\, b'')^2$$

Die letzte Gleichung ausführlich geschrieben lautet:

$$(b^2 + b_1^2 + b_2^2)(b''^2 + b_1''^2 + b_2''^2) = (b\,b'' + b_1 b_1'' + b_2 b_2'')^2$$

Setzt man nun

$$b'' = k\,b;\ b_1'' = \lambda\, b_1;\ b_2'' = \mu\, b_2$$

so wird

$$b^2 b_1^2 (k - \lambda)^2 + b^2 b_2^2 (\mu - k)^2 + b_1^2 b_2^2 (\mu - \lambda)^2 = 0$$

eine Gleichung, die für reelle und von 0 verschiedene b nur erfüllt werden kann durch $k = \lambda = \mu$.

In derselben Weise wird sich nachweisen lassen, daß die Gleichung $\Delta = 0$ die Bedingung nach sich zieht:

$$b' = k_1 b; \; b_1' = k\, b_1; \; b_2' = k_1 b_2$$

womit die Notwendigkeit der obigen Bedingung nachgewiesen erscheint.

Wenn aber durch die drei sich selbst überlassenen Punkte ein Koordinatensystem mit beschränkter Vieldeutigkeit dadurch definiert ist, daß in ihm die 3 Bahnkurven gerade Linien sind, so ist dieses System noch kein Inertialsystem. Als solches soll vielmehr ein System gelten, in Bezug auf welches sich beliebig viele sich selbst überlassene Punkte geradlinig bewegen. Es wird sich empfehlen, die Definition eines Inertialsystems, wie L. Lange tut, durch Konstruktion eines recht einfachen Falles zu bewerkstelligen. Danach sollen drei Massenpunkte genommen werden, die gleichzeitig nach verschiedenen Richtungen von einem Punkte ausgehen und sich selbst überlassen werden. Ein Koordinatensystem, in Bezug auf welches dann die 3 Bahnkurven gerade Linien sind, ist, wie leicht zu zeigen, ein Inertialsystem. Die Voraussetzungen erlauben, die Möglichkeit eines solchen Ansatzes natürlich vorausgesetzt, anzunehmen

$$\xi^{(n)} = B^{(n)}\, t$$
$$\eta^{(n)} = B_1^{(n)}\, t$$
$$\zeta^{(n)} = B_2^{(n)}\, t$$

wo für n kein, ein oder 2 Striche zu setzen sind. Es kann dabei t in irgend einer Skala angesetzt sein. Ebenso wird man in (3) alle a gleich Null setzen dürfen. Dann schreibt sich die erste Gleichung (4)

$$(B' - B)^2 + (B_1' - B)^2 + (B_2' - B)^2 = \left(b' \frac{\varphi'}{t} - b \frac{\varphi}{t}\right)^2 + \left(b_1' \frac{\varphi'}{t} - b_1 \frac{\varphi}{t}\right)^2 + \left(b_2' \frac{\varphi'}{t} - b_2 \frac{\varphi}{t}\right)^2$$

und ganz ähnlich die beiden anderen. Die Auflösung gibt unter allen Umständen

$$\varphi = m\,t;\ \varphi' = m'\,t;\ \varphi'' = m''\,t$$

wobei die m Konstanten sind. Ebenso wird die Auflösung von (5) für die Richtungskosinusse $\alpha\,\beta\,\gamma\ldots$ konstante Werte ergeben, während sich die $\delta\,\delta_1\,\delta_2$ als lineare Funktion von t darstellen.

Für jeden weiteren sich selbst überlassenen Punkt werden jetzt die Koordinaten $\xi\,\eta\,\zeta$ als lineare Funktionen von t, also

$$\xi = A + B\,t,\ \eta = A_1 + B_1\,t,\ \zeta = A_2 + B_2\,t$$

anzusetzen sein und daraus folgt dann, wenn man die soeben gefundene Form der Transformationskoeffizienten in (1) berücksichtigt, daß $x\,y\,z$ ebenfalls lineare Funktionen von t sind.

Auf Grund der ausgeführten Entwicklungen erweisen sich nun, wie von selbst klar ist, die Aufstellungen L. Langes nach jeder Richtung hin als zulässig und wohlbegründet. Ich führe sie hier wörtlich an:

Definition I. Inertialsystem heißt ein jedes Koordinatensystem von der Beschaffenheit, daß mit Bezug darauf drei vom selben Raumpunkt nach verschiedenen Richtungen projizierte und dann sich selbst überlassene Punkte $P\,P'\,P''$ auf drei beliebigen, in einem Punkte zusammenlaufenden Geraden dahinschreiten.

Theorem I. Mit Bezug auf ein Inertialsystem ist die Bahn jedes beliebigen vierten sich selbst überlassenen Punktes gleichfalls geradlinig.

Über die Bedeutung der 4. Variablen, der Zeit t, ist bisher noch nichts ausgesagt worden. Man kann sich nun unbedenklich der von Carl Neumann gegebenen Aussage anschließen: „Zwei materielle Punkte, von denen jeder sich selbst überlassen bleibt, bewegen sich (in einem Inertialsystem) in solcher Weise, daß gleiche Wegabschnitte des einen immer gleichen Wegabschnitten des anderen entsprechen“, und gleichen Wegabschnitten werden gleiche Zunahmen der Variablen t zugeordnet, wo t das, was wir die Zeit in einer gleichförmig ver-

laufenden Skala gemessen nennen, ist. Die Einwendungen, die H. Streintz hiergegen erhoben hat, sind nach meiner Meinung unwesentlich und gegenstandslos. Dann ergeben sich folgende Sätze, deren logisch musterhafte Fassung man ebenfalls L. Lange verdankt.

Definition II. Inertialskala heißt eine jede Zeitskala, in Bezug auf welche ein sich selbst überlassener auf ein Inertialsystem bezogener Punkt gleichförmig fortschreitet.

Theorem II. In Bezug auf eine Inertialzeitskala ist jeder beliebige andere sich selbst überlassene Punkt in seiner Inertialbahn gleichförmig bewegt.

Die Langesche Konstruktion des Inertialsystems ist selbstverständlich eine Idealkonstruktion, die aber das logische Bedürfnis nach jeder Richtung vollkommen befriedigt und das Prinzip der Relativität wahrt, denn tatsächlich ist jede Bezugnahme auf etwas Absolutes gänzlich verschwunden.

Es ist von einigen Seiten angewendet worden, daß der sich selbst überlassene Punkt noch einer Definition bedarf, da er doch als solcher, erst durch die Geradlinigkeit seiner Bahn im Inertialsystem erkennt werden kann. Indessen darf nicht übersehen werden, daß man zu dem Begriff des sich selbst überlassenen Punktes auch gelangen kann, wenn man den Kraftbegriff zunächst in anderer Weise festlegt und dann den sich selbst überlassenen Punkt als einen solchen definiert, der von keinen Kräften angegriffen wird. Erfahrungsgemäß sind nun alle Kraftwirkungen in der Natur an das Vorhandensein von Massen gebunden. Wo Kraftwirkungen nachweisbar sind, sind auch Massen in größeren oder kleineren Entfernungen da und umgekehrt, wo Massen in der Nähe sind, haben wir Kraftwirkungen anzunehmen. So wird sich strenge genommen nirgends im Univerum eine Stelle finden, wo das Ideal eines sich selbst überlassenen Punktes anzutreffen wäre. Ähnliches gilt ja in allen Teilen der Naturwissenschaften, wo gewisse Idealvorgänge erst durch mehr oder weniger weit ausgeführte Abstraktion geschaffen werden müssen. So werden wir hier durch Abstraktion den Begriff eines isolierten Massenpunktes bilden

müssen, indem wir uns einen solchen in immer größere Entfernung von anderen Massen gerückt denken. Das praktisch unerreichbare Ideal wäre erreicht, wenn alle anderen Massen m in unbegrenzt großer Entfernung sich befänden. In Wirklichkeit erfordert auch schon von Anfang an die Idealkonstruktion Langes die Durchführung einer ähnlichen Abstraktion. Denn die von einem Punkt ausgehenden materiellen Punkte werden sich auch gegenseitig durch die Newtonsche Gravitation beeinflussen und strenge genommen erst dann sich selbst überlassene Punkte sein, wenn sie in ihren Bahnen in überaus große gegenseitige Entfernungen gerückt sind. Man könnte ja auch die Massen der Punkte immer kleiner werden lassen, doch leistet dies Verfahren nicht mehr, als die zuerst gemachte Annahme, da hier ebensowenig ein nicht zu Ende durchführbarer Prozeß vermieden werden kann wie dort. Erklärt man die Unzulässigkeit dieser Art von Abstraktionen, dann wird man überhaupt niemals zu befriedigenden Definitionen der Grundbegriffe der Mechanik gelangen können. Läßt man aber den Begriff des isolierten Massenpunktes als zulässig gelten, dann würden in der Tat 3 isolierte Punkte, die nicht in einer Geraden stehen ein Inertialsystem vollständig und in der einfachsten Weise definieren. Der Anfang des Systems kann in jedem der 3 isolierten Punkte liegen, seine Achsenrichtungen werden durch die Richtungen nach den beiden anderen Punkten bestimmt.

Diese Idealkonstruktion ist nichts anderes als ein spezieller Fall der Langeschen. Man wird aber kaum leugnen können, daß sie mit der Wirklichkeit, d. h. mit den durch astronomische Beobachtungen gewonnenen Erfahrungen engere Fühlung besitzt. Denn man wird zunächst als Anfang des Inertialsystems nicht einen isolierten Punkt nehmen, der überhaupt nicht auffindbar ist, sondern ein in mechanischer Beziehung äquivalentes Gebilde. Ein solches ist — allerdings wegen der Anziehung der Sterne nur näherungsweise — der Schwerpunkt des Planetensystems, der sich gegenüber äußerst entfernten Massen gerade so bewegt wie ein Massenpunkt. Dann wird man zur Orien-

tierung auch ähnliche ausgedehnte Massensysteme benützen können und zwar in beliebiger Anzahl, wenn dieselben nur die Bedingung der Isoliertheit erfüllen, d. h. unbegrenzt weit vom Schwerpunkt des Sonnensystems abstehen und von ihm aus gesehen nicht in unmeßbar kleiner Entfernung voneinander zu stehen scheinen. Eine solche Idealkonstruktion des Inertialsystems, die also außer dem Schwerpunkt des Planetensystems noch mindestens 2 unbegrenzt weite Massen erfordert, scheint mir keine größeren gedanklichen Schwierigkeiten zu besitzen, als irgend eine andere und ich habe keinen Grund, sie als nicht sehr ansprechend zu bezeichnen. Bekanntlich gehen in solchen Fragen die Meinungen auseinander und was dem einen besonders ansprechend erscheint, ist es dem anderen keineswegs und eine Diskussion in dieser Richtung führt selten zu einer Einigung. Daß das so definierte System ein wohl definiertes ist und auf dem Prinzip der Relativität ruht, dürfte indessen unzweifelhaft sein.

Die angestellten Betrachtungen leiten direkt zu den Klarlegungen über, welche die Wissenschaft Mach verdankt. Sie sind, wie schon erwähnt, in seinem Buche über die Entwicklung der Mechanik enthalten, welches zu den schönsten Büchern gehört, die über Mechanik überhaupt geschrieben worden sind. Die fundamentale Wichtigkeit dieses Werkes in Bezug auf die vorliegenden Fragen beruht hauptsächlich in der Konsequenz, mit welcher Mach zuerst das Prinzip der Relativität und den Grundsatz festgehalten hat, demzufolge die Mechanik ein auf rein empirischer Grundlage aufgebautes Gebäude ist, was merkwürdigerweise nicht immer genügende Berücksichtigung gefunden hat. Für Mach hat nun die Orientierung des Inertialsystems einfach nach dem Fixsternhimmel zu erfolgen und die Zeitskala ist durch die Rotation der Erde gegeben. Zu Newtons Zeit hätte diese Definition unzweifelhaft auch praktisch ausgereicht. Seitdem hat man aber in den Eigenbewegungen der Fixsterne Einflüsse kennen gelernt, welche die Festlegung eines Inertialsystems erschweren und auch die Rotationszeit der Erde, gemessen durch die übliche Sternzeit, ist ein Zeitmaß, das sich

nachgewiesenermaßen periodisch und säkular, letzteres in einem nicht genügend festgestellten Grade, ändert. Infolge dieser Tatsachen ist eine Orientierung einfach nach dem Fixsternhimmel zu unbestimmt und muß schärfer gefaßt werden. Das ist Mach auch nicht entgangen und er ersetzt,[1]) von dem Grundsatze ausgehend, daß man von den Massen des Universiums nicht absehen dürfe, die Aussage, daß eine Masse μ im Raum sich in gerader Linie und mit gleicher Geschwindigkeit bewege durch eine andere. Nennt man $m, m' \ldots$ die Massen in den Entfernungen $r, r' \ldots$ vom Punkte μ, so wird die genannte Aussage äquivalent sein mit dem Sinne der Formel

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\Sigma m r}{\Sigma m}\right) = 0$$

insofern nur „hinreichend viele, hinreichend große und weite Massen" in Betracht gezogen werden. Die Zulässigkeit dieses sinnreichen Ansatzes unter gewissen Bedingungen muß anerkannt werden. Denn wenn die großen und weiten Massen die näheren überwiegen, deckt sich der mechanische Ansatz mit den oben gemachten Bemerkungen mit beliebiger Annäherung, wenn einzelne Entfernungen r beliebig groß gemacht werden.

Indessen möchten doch Einwände zu erheben sein. Der erste bezieht sich darauf, daß es nicht in unserem Ermessen steht, die ausgesprochene Bedingung für die Massen zu erfüllen, da wir Tatsachen nicht verändern können. Daß ferner die Formel auf die sichtbaren Fixsterne angewendet nahezu richtig ist, dürfte feststehen; ebenso sicher ist es aber, daß sie nicht dem, was die Bewegung eines sich selbst überlassenen Punktes in einem Inertialsystem ausdrücken soll, ganz genau entsprechen kann. Alle Massen und die näheren im besonderen wirken auf μ so ein, daß sich dieser Punkt tatsächlich nicht gleichförmig und geradlinig in Bezug auf ein Inertialsystem bewegt und ohne nähere Untersuchung können wir nicht einmal sagen, ob diese Abweichung nicht sehr merklich ist. Man

[1]) Mechanik, S. 248.

muß also die wirkliche Bewegung von μ unter allen Umständen durch Abstraktion idealisieren. Wie weit man die Abstraktion treibt, scheint mir von keiner ausschlaggebenden Bedeutung zu sein und man wird demnach berechtigt sein, von diesen und jenen Massen zu abstrahieren, da man ganz ohne Ausführung eines solchen Prozesses doch nicht auskommen kann. Hält man daran fest, so führt auch der Machsche Ansatz zu der Nötigung, nur sehr weite und isolierte Massen zur Orientierung zu verwenden und dann kommt man wieder auf denselben Weg, auf den die obigen Betrachtungen geführt haben und den ja auch die Langeschen Festsetzungen, in gewissem Sinne, anweisen.

Die wirkliche Festlegung eines Inertialsystems mit Hilfe sehr weiter isolierter Massen ist geknüpft an eine niemals abbrechende Reihe von Korrekturen von Beobachtungen feststellbarer Tatsachen und sie verlangt also strenge genommen die Ausführung eines unendlichen Prozesses, der natürlich nie zu Ende geführt werden kann. An sich wird hiermit allerdings nichts anderes verlangt, was nicht auch sonst in allen Naturwissenschaften verlangt wird; da alle Beobachtungen ungenau sind, wird die immer erneute Nötigung zu Korrekturen niemals aufhören.

Bei der Festlegung eines Inertialsystems würde es also darauf ankommen, die Entfernung immer weiter entfernter Fixsterne abschätzen zu lernen und dann die näheren als zur Orientierung nicht geeignet ausscheiden zu lassen. Da tritt nun eine neue und wie es scheint unüberwindliche Schwierigkeit entgegen. Alle Erfahrungen in der Fixsternastronomie drängen zu der Annahme, daß die sichtbaren, also zunächst der Beobachtung allein zugänglichen Weltkörper ein räumlich begrenztes und zwar nicht einmal so ungeheuer großes, wie man früher meinte, System bilden, über dessen Grenzen hinaus bisher jede Wahrnehmung ausgeschlossen war und wohl auch immer bleiben wird. Dadurch ist es unmöglich, den oben erwähnten Abstraktionsprozeß beliebig weit fortzusetzen und das Inertialsystem kann auf diesem Wege nur bis zu einer gewissen be-

schränkten Genauigkeit festgelegt werden. Diese Beschränkung bezieht sich natürlich nur auf die tatsächliche, nicht begriffliche Festlegung. So bleibt für die erstere nur der bereits oben erwähnte, durchaus gangbare, bereits von Newton angezeigte und von Carl Neumann näher beleuchtete Weg übrig.

Nicht unnötig dürfte es sein, am Schluß dieser Betrachtungen noch einmal darauf hinzuweisen, daß mit der festeren Begründung des Trägheitsgesetzes einzig und allein die Absicht verbunden sein kann, den wahren Sinn der Grundlagen des wissenschaftlichen Systems, das wir Mechanik nennen, festzustellen. Von diesem Standpunkt hat es kein Interesse, zu untersuchen, ob unter allen Umständen die jetzige Mechanik sich als das zweckmäßigste wissenschaftliche System für die Erklärung aller denkbaren Vorgänge bewähren muß. Indessen wird uns doch die fast unabsehbare Reihe von Erfahrungen, die bisher in dieser Richtung gesammelt worden sind, einigermaßen zuversichtlich machen und uns die Hoffnung offen lassen, es möchten nicht leicht rein mechanische Tatsachen auftreten, welche die bisher benützten Grundsätze als hinfällig und unbrauchbar oder selbst nur als unzweckmäßig erweisen würden.

3.

Die Aufgabe der tatsächlichen Festlegung eines Inertialsystems fällt der Astronomie zu und diese Festlegung hat gegen das empirisch hergestellte, in der Astronomie gebräuchliche Koordinatensystem zu erfolgen. Legen wir die Anfänge beider Systeme in den Schwerpunkt des Planetensystems, so wäre das nur erlaubt, wenn das Planetensystem wirklich isoliert wäre. Selbstverständlich ist das im strengen Sinne des Wortes nicht der Fall, aber diese Annahme genügt, wenn die Abweichungen in langen Zeiträumen innerhalb der Genauigkeitsgrenze der Beobachtungen bleiben. Diese Forderung als strenge erfüllt nachzuweisen, ist gegenwärtig unmöglich und man muß sich mit mehr oder weniger sicheren Abschätzungen begnügen. Auf Schwierigkeiten, die hierbei auftreten, haben Carl Neu-

mann[1]) und ich[2]) hingewiesen. Es steht danach, trotz der Einwände, die hiergegen gemacht worden sind, fest, daß man sich entschliessen muß, die universelle und strenge Gültigkeit der Newtonschen Attraktionsformel zu leugnen, wenngleich nur so kleine Korrekturen notwendig sein mögen, daß deren Folgen innerhalb des Planetensystems und vielleicht beträchtlich darüber hinaus unbemerkbar bleiben. Diese Korrekturen müssen unter allen Umständen in der Richtung liegen, daß die Gravitationswirkung gegenüber der Newtonschen Formel schneller mit der Entfernung abnimmt. Bedenkt man weiter, daß wir mit einiger Sicherheit die uns umgebenden Fixsterne als ein endliches und durch weite Zwischenräume von eventuell anderen vorhandenen Systemen getrenntes System ansehen müssen, so wird vielleicht die Wirkung der Anziehungen jener anderen Systeme vernachlässigt werden können. Dann würde es in absehbarer Zeit möglich sein, eine obere Grenze für die Gesammtanziehung der Fixsterne anzugeben, denn es ist anzunehmen, daß die Studien über die räumliche Verteilung der Sterne zu bestimmten zahlenmäßigen Resultaten führen werden. Zur Ableitung einer solchen oberen Grenze genügt die Annahme des Newtonschen Gesetzes. Laplace[3]) hat die Größe der Anziehung eines Sternes berechnet und danach die Überzeugung gewonnen, daß in der Tat unser Sonnensystem als ein isoliertes aufzufassen ist. Die Wichtigkeit der Sache wird es rechtfertigen, wenn ich hier eine kurze Darstellung von einem etwas anderen Standpunkt aus folgen lasse.

Das Sonnensystem befindet sich in dem von den Fixsternen geschaffenen Kraftfeld. Ein Punkt mit der Masse 1 wird an einer Stelle, deren Koordinaten in einem Inertialsystem, dessen Anfang etwa im Schwerpunkt des ganzen Fixsternsystems liegt,

---

[1]) C. Neumann, Allgemeine Untersuchungen über das Newtonsche Prinzip etc. Leipzig 1896.

[2]) Münchener Sitzungsberichte 1896 und A. N. Nr. 3273.

[3]) Laplace, Mécanique célecte, Livre VI, Chapit. XVIII und Connaissance des temps pour l'an 1829.

$\xi\,\eta\,\zeta$ sein mögen, den Kraftkomponenten X, Y, Z ausgesetzt sein und diese verändern sich mit ξ, η, ζ. Strenge genommen werden sie auch die Zeit explizite enthalten; diese Abhängigkeit kann aber vorerst sicherlich unberücksichtigt bleiben.

Sind nun $M, \xi_0, \eta_0, \zeta_0$ Masse und Inertialkoordinaten der Sonne, m, ξ, η, ζ dieselben Größen für einen Planeten, so hat man:

$$\frac{d^2 \xi_0}{d t^2} = k^2 \Sigma m \frac{\xi - \xi_0}{r^3} + X_\odot$$

$$\frac{d^2 \xi}{d t^2} = k^2 M \cdot \frac{\xi_0 - \xi}{r^3} + k^2 \Sigma_1 \frac{m_1 (\xi_1 - \xi)}{\Delta_1^{\ 3}} + X$$

Die Σ ist auf alle Planeten, Σ_1 auf alle Planeten mit Ausnahme des betrachteten auszudehnen. Ferner ist r der Radiusvektor der Planeten, Δ_1 seine Entfernung von einem anderen Planeten, $X_\odot$ und X die Werte von X an den Stellen ξ_0, η_0, ζ_0 und ξ, η, ζ.

Für den Schwerpunkt $\Xi\, Y\, Z$ des Planetensystems ist:

$$(M + \Sigma m) \frac{d^2 \Xi}{dt^2} = M X_\odot + \Sigma m X$$

und für die relativen Koordinaten $x\,y\,z$ des betrachteten Planeten gegen die Sonne ergeben sich die Gleichungen:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 (M + m) \frac{x}{r^3} = \frac{\partial R}{\partial x} + (X - X_\odot)$$

und ähnliche für y und z. Hier bedeutet R die gewöhnliche, aus der Anziehung der Planeten hervorgehende Störungsfunktion. Die Veränderung der Komponenten $X\,Y\,Z$ mit den Koordinaten wird sicher sehr klein sein. Erlaubt man sich in der betreffenden Taylorschen Reihe die Glieder 2. Ordnung fortzulassen und nennt man $X_0\, Y_0\, Z_0$ die Werte von $X\,Y\,Z$ im Schwerpunkt des Planetensystems, so wird

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2 \Xi}{dt^2} = X_0; \quad \frac{d^2 Y}{dt^2} = Y_0; \quad \frac{d^2 Z}{dt^2} = Z_0 \\
&\frac{d^2 x}{dt^2} + k^2(M+m)\frac{x}{r^3} = \frac{\partial R}{\partial x} + \left(\frac{\partial X}{\partial \xi}\right)_0 x + \left(\frac{\partial X}{\partial \eta}\right)_0 y + \left(\frac{\partial X}{\partial \zeta}\right)_0 z \\
&\frac{d^2 y}{dt^2} + k^2(M+m)\frac{y}{r^3} = \frac{\partial R}{\partial y} + \left(\frac{\partial Y}{\partial \xi}\right)_0 x + \left(\frac{\partial Y}{\partial \eta}\right)_0 y + \left(\frac{\partial Y}{\partial \zeta}\right)_0 z \\
&\frac{d^2 z}{dt^2} + k^2(M+m)\frac{z}{r^3} = \frac{\partial R}{\partial z} + \left(\frac{\partial Z}{\partial \xi}\right)_0 x + \left(\frac{\partial Z}{\partial \eta}\right)_0 y + \left(\frac{\partial Z}{\partial \zeta}\right)_0 z
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Hier bedeuten die eingeklammerten Werte der Differentialquotienten Werte im Schwerpunkt.

Der Schwerpunkt des Planetensystems mag sich vielleicht nicht unbeträchtlich in dem vorliegenden Koordinatensystem bewegen. Nach der oftmals gemachten Annahme, daß er sich im Jahre etwa um $\frac{4}{3}\pi$ Erdbahnradien weiter bewegt, würde er sich in tausend Jahren immerhin um rund 140 Neptunsweiten verschieben, was einer Parallaxe von 49″ entspricht, die etwa $\frac{1}{100}$ der Entfernung der allernächsten Sterne gleichkommt. Ob innerhalb solcher Räume und Zeiten die Differentialquotienten $\left(\frac{dX}{d\xi}\right)_0$ etc. als konstant angesehen werden dürfen, ist natürlich zweifelhaft. Indessen wird man wohl auch dann nicht ganz unsichere Abschätzungen mit dieser Annahme erhalten.

Nennt man dann noch V das Potential der Sternanziehung, so werden also die Koeffizienten:

$$2a_{00} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2}\right)_0; \quad 2a_{01} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \xi \partial \eta}\right)_0, \quad 2a_{02} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \xi \partial \zeta}\right)_0$$

$$2a_{11} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2}\right); \quad 2a_{12} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \eta \partial \zeta}\right)_0, \quad 2a_{12} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \zeta^2}\right)_0$$

wo $a_{\varkappa\lambda} = a_{\lambda\varkappa}$, konstant sein und die Bewegung eines Planeten um die Sonne geschieht so, daß durch die Fixsterne eine Störung hinzutritt, deren Störungsfunktion

$$F = a_{00}\, x^2 + 2\, a_{01}\, x\, y + a_{11}\, y^2 + - + a_{22}\, z^2 \qquad (2)$$

eine quadratische Form der Variablen $x\,y\,z$ ist. Wirken die Sterne nach dem Newtonschen Gesetz, so besteht die Gleichung:

$$a_{00} + a_{11} + a_{22} = 0$$

Es macht nun nicht die geringste Schwierigkeit, die Veränderung der Bahnelemente eines Planeten infolge der Störungsfunktion F zu ermitteln. In jedem Falle kann man sich auf die Betrachtung der säkularen Veränderungen beschränken. Man hat zu diesem Zweck den säkularen Teil S der Funktion F zu bilden und hierzu sind die säkularen Teile der in (2) vorkommenden variablen Größen aufzusuchen. Ich will solche säkulare Teile durch ein vorgesetztes S bezeichnen.

Mit Benutzung der üblichen Bezeichnungsweise (a, e, π, Ω, i, n = halbe große Achse, Exzentrizität, Perihel-, Knotenlänge, Neigung und mittlere Bewegung) ergibt sich leicht:

$$S(x^2) = \frac{a^2}{2}\left[1 - \sin^2\Omega\sin^2 i + 4\,e^2 - 5\,e^2\sin^2\pi\right]$$

$$S(y^2) = \frac{a^2}{2}\left[1 - \cos^2\Omega\sin^2 i + 4\,e^2 - 5\,e^2\cos^2\pi\right]$$

$$S(z^2) = \frac{a^2}{2}\sin^2 i$$

$$S(xy) = \frac{a^2}{4}\left[\sin 2\,\Omega\sin^2 i + 5\,e^2\sin 2\,\pi\right]$$

$$S(xz) = -\frac{a^2}{2}\sin\Omega\sin i$$

$$S(yz) = +\frac{a^2}{2}\sin\Omega\sin i$$

und mit diesen Ausdrücken nach (2):

$$\frac{1}{e}\cdot\frac{\partial S}{\partial\pi} = \frac{5}{2}\,a^2\,e\left[(a_{11} - a_{00})\sin 2\,\pi + 2\,a_{01}\cos 2\,\pi\right]$$

$$\frac{1}{e}\cdot\frac{\partial S}{\partial e} = -5\,a^2\left[a_{00}\sin^2\pi + a_{11}\cos^2\pi - a_{01}\sin 2\,\pi - \frac{4}{5}(a_{00} + a_{11})\right]$$

$$\frac{\partial S}{\partial i} = a^2 \cos i \,[(-a_{00} \sin^2 \Omega - a_{11} \cos^2 \Omega + a_{22} + a_{01} \sin 2\,\Omega) \sin i - a_{02} \sin \Omega + a_{12} \cos \Omega]$$

$$\frac{1}{\sin i} \cdot \frac{\partial S}{\partial \Omega} = \frac{a^2}{2} \cdot [(a_{11} - a_{00}) \sin 2\,\Omega \sin i + 2\, a_{01} \cos 2\,\Omega \sin i - 2\, a_{02} \cos \Omega - 2\, a_{12} \sin \Omega]$$

Diese Ausdrücke hätte man in die bekannten Formeln für die Variation der Konstanten einzusetzen, was so einfach sich vollzieht, daß nicht weiter darauf einzugehen nötig ist.

Zur Abschätzung wird die Bemerkung genügen, daß sich die säkularen Veränderungen $\frac{de}{dt}$, $e\frac{d\pi}{dt}$, $\sin i \frac{d\Omega}{dt}$, $\frac{di}{dt}$ ergeben, wenn man die angegebenen Differentialquotienten mit $\frac{an}{k^2}$ und mit Zahlen, die höchstens einige Einheiten betragen, multipliziert. Berechnet man den Rang einer Größe dadurch, daß man sie in Klammern setzt, so würde die Gleichung

$$\{A\} = \alpha$$

aussagen, daß der absolute Wert von A gleich ist α multipliziert mit einer Zahl, die höchstens einige Einheiten betragen kann. Auf diese Weise ergibt sich, daß für jedes der 4 Bahnelemente E

$$\left\{\frac{dE}{dt}\right\} = \frac{a^3 n}{k^2} \{a_{\varkappa\lambda}\}$$

Danach könnte man also, falls die $a_{\varkappa\lambda}$ gegeben wären, die säkularen Veränderungen der Bahnelemente leicht abschätzen.

Es soll nun beispielsweise eine ganz einseitige Massenverteilung angenommen werden, welche also voraussichtlich ganz außerordentlich übertrieben große $a_{\varkappa\lambda}$ ergibt. Nimmt man nämlich an, daß alle Fixsterne in einer bestimmten Richtung in der Entfernung ϱ vom Planetensystem in einer Masse μ vereinigt wären, dann ergibt sich leicht

$$\{a_{\varkappa\lambda}\} = \frac{k^2 \mu}{\varrho^3}$$

und demzufolge

$$\left\{\frac{dE}{dt}\right\} = \mu \cdot n \left(\frac{a}{\varrho}\right)^3$$

Setzt man $\mu = \lambda \cdot 10^8$ Sonnenmassen, ϱ entsprechend einer Parallaxe $0''01 \cdot \delta$, so ergibt sich für Neptun, wo $\frac{dE}{dt}$ numerisch am größten wird, im Jahrhundert

$$\{dE\} = 0''00027 \cdot \lambda \cdot \delta^3$$

Nach dem, was wir — es ist das allerdings wenig genug — über die Massen und Verteilung der Fixsterne wissen, wird man λ und δ kaum größer als 1 annehmen dürfen, δ ist sogar wahrscheinlich ein kleiner Bruch. Danach darf man selbst nach vielen Jahrhunderten in den planetarischen Bewegungen um die Sonne wohl kaum einen bemerkbaren Einfluß der Anziehung der zu unserem Fixsternsystem gehörenden Massen erwarten. Ein wenig anders mögen sich die Verhältnisse für die Bewegung des Schwerpunktes unseres Sonnensystems verhalten. Die Kraftkomponenten sind hier — bei Festhaltung des herangezogenen Beispiels — nur vom Range $\frac{k^2 \Sigma m}{\varrho^2}$. Ich habe schon bei früherer Gelegenheit[1]) gezeigt, daß man wohl kaum bei den Fixsternen selbst in langen Zeiträumen auf eine bemerkbare Abweichung von der geradlinigen und gleichförmigen Bewegung rechnen wird dürfen, natürlich von Ausnahmefällen abgesehen.

Der Krümmungsradius ϱ der Bahn des Schwerpunktes des Planetensystems ist gegeben durch

$$\varrho = \frac{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2 - \left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2}}$$

wo ds das Bogenelement ist.

[1]) Astronomische Nachrichten, Nr. 3675.

Nennt man also V die Geschwindigkeit und P die Größe der einwirkenden Kraft, so wird der Rang von ϱ durch

$$\{\varrho\} = \frac{V^2}{P}$$

gegeben sein. Der Winkel $d\alpha$ zwischen zwei benachbarten Tangenten an die Bahn ist dann

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{\varrho}\frac{ds}{dt} = \frac{V}{\varrho}$$

Also

$$\left\{\frac{d\alpha}{dt}\right\} = \frac{P}{V}$$

und im obigen Beispiel:

$$\left\{\frac{d\alpha}{dt}\right\} = \frac{k^2\mu}{V\cdot\varrho^2}$$

Bei Festhaltung der astronomischen Einheiten ist $k^2 = c^2$, wo c die Bahngeschwindigkeit der Erde ist. Demnach hat man

$$\left\{\frac{d\alpha}{dt}\right\} = \frac{c^2\mu}{V\cdot\varrho^2}$$

Setzt man, wie oben, $\mu = \lambda \cdot 10^8$; ϱ entsprechend einer Parallachse $0''01 \cdot \delta$ so ist $\Delta\,\alpha''$ die Änderung von α im Jahrhundert in Bogensekunden

$$\Delta\,\alpha'' = 31'' \cdot \left(\frac{c}{V}\right) \cdot \lambda\,\delta^2$$

Für $\frac{c}{V} = \frac{3}{2}$, $\lambda = \delta = 1$ würde also eine Richtungsänderung in der Bewegung des Schwerpunktes des Sonnensystems von $46''$ im Jahrhundert folgen, eine Zahl die voraussichtlich noch viel zu hoch gegriffen ist.

4.

Die Bewegungen der Planeten werden auf ein gewisses empirisches Koordinatensystem bezogen. Dasselbe hat im Laufe der Zeit eine recht solide Festlegung erfahren. Das Nähere ist in dem soeben erschienenen Band VI_2 der mathematischen Enzyklopädie in den Artikeln von E. Anding und F. Cohn so eingehend auseinandergesetzt, daß dem wohl kaum etwas hinzuzufügen wäre. Indessen ist ohne weiteres durch eine einfache Betrachtung der Resultate der messenden Astronomie einzusehen, daß man von selbst darauf geführt wurde, eine in einem Inertialsystem feste Ebene z. B. die Ebene der Erdbahn zu einer bestimmten Epoche als Fundamentalebene einzuführen und diese gegen die Fixsterne oder vielmehr die Fixsterne gegen jene Ebene mit immer steigender Genauigkeit festzulegen. Könnte man nun in dieser Ebene eine feste Inertialrichtung gegen die Fixsterne bestimmen, so wäre ein Inertialsystem auch praktisch definiert. Das ist aber nicht mit genügender Genauigkeit möglich, weil der Durchschnittspunkt von Äquator und Ekliptik, welcher nach der XAchse des empirischen Systems weist, sich verschiebt und diese Verschiebung, in ihrem säcularen Teil wenigstens, nicht genau genug theoretisch berechnet werden kann. Hierzu wäre eine genauere Kenntnis der Differenzen der Trägheitsmomente des Erdkörpers nötig, die anderseitig nicht beschafft werden kann. So bleibt eine Unsicherheit in der Bestimmung der erforderlichen Inertialrichtung bestehen, die nur durch Zuhülfenahme von gewissen Hypothesen von zum Teil sehr zweifelhafter Sicherheit anscheinend behoben worden ist.

Jedenfalls werden tatsächlich in Bezug auf dieses empirische System die Differentialgleichungen der Bewegung für die Planeten aufgestellt und integriert und die hier auftreten-Konstanten als Bahnelemente behandelt und aus den Beobachtungen bestimmt. Da die Differentialgleichungen nur richtig sind, wenn sie sich auf ein Inertialsystem beziehen, so wird, wenn eine von der Zeit abhängige Verlagerung der beiderlei Achsen gegeneinander vorhanden ist, die Theorie der Planeten-

bewegung unvollständig sein. Man kann nun, um diese Unvollkommenheit aufzudecken, sich damit begnügen von den Störungen durch die Planeten abzusehen und die Keplersche Bewegung allein zu betrachten. Sind in dem empirischen System die Koordinaten eines Planeten $x' y' z'$, so wird angenommen, daß die Bewegung durch die Gleichungen:

$$\frac{d^2 x'}{d t^2} + \mu \frac{x'}{r^3} = 0; \quad \frac{d^2 y'}{d t^2} + \mu \frac{y'}{r^3} = 0; \quad \frac{d^2 z'}{d t^2} + \mu \frac{z'}{r^3} = 0$$

bestimmt ist. In Wirklichkeit gelten aber die analogen Gleichungen nur für die Koordinaten $x y z$ in einem Inertialsystem, wo also ist:

$$\frac{d^2 x}{d t^2} + \mu \frac{x}{r^3} = 0$$

während die empirischen Koordinaten nunmehr Gleichungen von der Form

$$\frac{d^2 x'}{d t^2} + \mu \frac{x'}{r^3} = X \tag{1}$$

genügen und demnach in der ausgebildeten Planetentheorie die als störende Kräfte interpretierteren Komponenten $X Y Z$ vernachläßigt worden sind. Es handelt sich also um die Wirkung dieser störenden Kräfte auf die Planetenbahnelemente, die durch sie verändert erscheinen. Es ist leicht die allgemeinen Formeln für eine beliebig gegen ein Inertialsystem bewegtes empirisches System abzuleiten. Da es sich indessen offenkundig nur um sehr kleine Veränderungen handeln kann, wird es genügen anzunehmen, daß die gegenseitigen Neigungen der gleichnamigen Achsen beider Systeme so klein seien, daß ihre zweiten Potenzen, innerhalb des betrachteten Zeitraumes, vernachläßigt werden können.

Zwischen den beiderlei Koordinaten bestehen nun die Gleichungen:

$$\begin{aligned} x' &= a x + b y + c z \\ y' &= a' x + b' y + c' z \\ z' &= a'' x + b'' y + c'' z \end{aligned}$$

Werden die 2. Potenzen der oben genannten Neigungen fortgelassen, so folgt bekanntlich daraus:

$$b + a' = 0, \quad c + a'' = 0, \quad c' + b'' = 0$$

und wenn man setzt:[1])

$$a' = -b = r_1; \quad -a'' = c = q; \quad b'' = -c' = p$$

so wird

$$\left.\begin{aligned} x' &= x - r_1 y + q z \\ y' &= y - p z + r_1 x \\ z' &= z - q x + p y \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

und mit derselben Genauigkeit:

$$\left.\begin{aligned} x &= x' + r_1 y' - q z' \\ y &= y' + p z' - r_1 x' \\ z &= z' + q x' - p y' \end{aligned}\right\} \qquad (2\,a)$$

Die $p\,q\,r_1$ sind bekanntlich die Drehkomponenten des einen Koordinatensystems um das andere. Die Gesamtdrehung erfolgt um eine Achse mit den Neigungswinkeln α, β, γ gegen das System $x'\,y'\,z'$ mit einer Winkeldrehung Ω und es ist

$$\Omega = \sqrt{p^2 + q^2 + r_1^2}, \quad \Omega \cos\alpha = p, \quad \Omega \cos\beta = y, \quad \Omega \cos\gamma = r_1$$

Sind beide Koordinatensysteme rechtsdrehende (sog. Korkzieher-)Systeme, so daß also die x' Achse durch eine positive Drehung um die z' Achse um 90 Grad in die y' Achse gebracht werden kann und in ähnlicher Weise die y' Achse in die z' Achse und die z' Achse in die x' Achse, so bedeuten positive $p\,q\,r_1$ positive Drehungen, die um die Achsen des empirischen Systems $x'\,y'\,z'$ ausgeführt werden müssen, um zum Inertialsystem $x\,y\,z$ zu führen. Die in der Astronomie üblichen Systeme der Rektaszensionen und Deklinationen, ebenso wie der Längen und Breiten sind solche rechtsdrehende Systeme. Die $p\,q\,r_1$ können im allgemeinen beliebige Funktionen der Zeit sein. Ich will mich, was vorderhand ausreichend sein

---

[1]) Vgl. u. A. H. Weber, Die partiellen Differentialgleichungen der Physik. Leipzig 1900, 1, S. 201.

dürfte, mit der Annahme begnügen, daß $p\,q\,r_1$ sich proportional mit t ändern, so daß sie für $t=0$ selbst verschwinden. Es soll also gesetzt werden

$$p = w_x t, \qquad q = w_y t, \qquad r_1 = w_z t$$
$$w_x = w \cos \alpha, \qquad w_y = w \cos \beta, \qquad w_z = w \cos \gamma$$

wo die Drehkomponenten $w_x\,w_y\,w_z$ um die 3 Achsen als unabhängig von t anzusehen sind.

Aus den Gleichungen (2a) folgt dann:

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} - r_1 \frac{dy'}{dt} + q \frac{dz'}{dt} - y' w_z + z' w_y$$

$$\frac{d^2x'}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2} - r_1 \frac{d^2y'}{dt^2} + q \frac{d^2z'}{dt^2} - 2 w_z \frac{dy'}{dt} + 2 w_y \frac{dz'}{dt}$$

und aus (1) ergeben sich dann die Störungskomponenten

$$\left.\begin{aligned} X &= -2 w_z \frac{dy}{dt} + 2 w_y \frac{dz}{dt} \\ Y &= -2 w_x \frac{dz}{dt} + 2 w_z \frac{dx}{dt} \\ Z &= -2 w_y \frac{dx}{dt} + 2 w_x \frac{dy}{dt} \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Hierin können nach Belieben die $x\,y\,z$ durch $x'\,y'\,z'$ ersetzt werden. Diesen Störungskomponenten entsprechend werden die Bahnelemente periodische und säkulare Veränderungen erleiden. Zur Ermittlung dieser wird man am besten die Kraftkomponenten R, S, W, in der Richtung des Radiusvektor, senkrecht darauf in der Bahnebene und senkrecht auf die Bahnebene, berechnen. Es seien $x\,y\,z$ Ekliptikalkoordinaten, ferner sollen die früheren Bezeichnungen festgehalten werden, außerdem v die wahre Anomalie, $u = v + \pi - \Omega = v + w$ und $p = a\,(1 - e^2)$ sein. Man hat dann bekanntlich:

$$\frac{x}{r} = \cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i$$
$$\frac{y}{r} = \cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i$$
$$\frac{z}{r} = \sin u \sin i$$

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{\mu}{p}}[-\cos\Omega(\sin u + e\sin\omega) + \sin\Omega\cos i(\cos u + e\cos\omega)]$$
$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{\frac{\mu}{p}}[-\sin\Omega(\sin u + e\sin\omega) - \cos\Omega\cos i(\cos u + e\cos\omega)]$$
$$\frac{dz}{dt} = \sqrt{\frac{\mu}{p}}[\sin i(\cos u + e\cos\omega)]$$

Bezeichnet man noch:

$$A = -\sin u \cos \Omega - \cos u \sin \Omega \cos i$$
$$B = -\sin u \sin \Omega + \cos u \cos \Omega \cos i$$
$$C = -\cos u \sin i$$

so wird:

$$R = X \cdot \frac{x}{r} + Y\frac{y}{r} + Z \cdot \frac{z}{r}$$
$$S = X \cdot A + Y \cdot B + Z \cdot C$$
$$W = X \sin \Omega \sin i - Y \cos \Omega \sin i + Z \cos i$$

Die weitere Ausrechnung ist mit Hilfe der Formeln für die Keplersche Bewegung leicht auszuführen. Setzt man zur Abkürzung:

$$D = \cos\alpha \sin\Omega \sin i - \cos\beta \cos\Omega \sin i + \cos\gamma \cos i$$
$$\Delta = \cos\alpha \sin\Omega \cos i - \cos\beta \cos\Omega \cos i - \cos\gamma \sin i$$
$$E = \cos\alpha \cos\Omega + \cos\beta \sin\Omega$$

so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} R &= -\frac{2w}{r}\sqrt{\mu p}\, D \\ S &= +2we\sin v\sqrt{\frac{\mu}{p}}\, D \\ W &= +2w\sqrt{\frac{\mu}{p}}[-\Delta\sin u + E\cos u - \Delta e\sin\omega + Ee\cos\omega] \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Hiermit ergeben sich nun die Differentialquotienten der Bahnelemente nach der Zeit. Die periodischen Störungen entstehen durch das Auftreten von Zentrifugalkräften bei der Rotation des empirischen Systems um das Inertialsystem, wobei indessen nicht vergessen werden darf, daß mit w^2 multiplizierte Glieder fortgelassen worden sind.

Man findet leicht:

$$\frac{da}{dt} = \frac{2a^2}{\sqrt{\mu p}}\left(R e \sin v + S \frac{p}{r}\right) = 0$$

a bleibt demnach, wenn man nur die Glieder erster Ordnung berücksichtigt, völlig konstant. Nennt man E die exzentrische Anomalie, so wird

$$\frac{de}{dt} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \cdot \left(R \sin v + S(\cos v + \cos E)\right) = -2wD\frac{r}{a}\sin v$$

$$\sin i \frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{\sqrt{p\mu}} W r \sin u = \frac{2w}{p} \times$$

$$[-\Delta r \sin^2 u + E r \sin u \cos^2 u - \Delta e \sin\omega \cdot r \sin u + E e \cos\omega \cdot r \sin u]$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{\sqrt{p\mu}} W r \cos u = \frac{2w}{p} \times$$

$$[-\Delta r \sin u \cos u + E r \cos^2 u - \Delta e \sin\omega \cdot r \cos u + E e \cos\omega \cdot r \cos u]$$

$$e\frac{d\pi}{dt} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \cdot \left[-R\cos v + S \sin v\left(1 + \frac{r}{p}\right)\right] + e \operatorname{tg}\tfrac{1}{2} i \sin i \cdot \frac{d\Omega}{dt}$$

$$= \frac{2w\Delta}{p}\left[r\cos v(1+e^2) + 2er\right] + e \operatorname{tg}\tfrac{1}{2} i \cdot \sin i \frac{d\Omega}{dt}.$$

Offenbar darf man zunächst nur darauf rechnen, daß die säkularen Veränderungen eventuell merkbar werden. Um diese zu erhalten, sei bemerkt, daß man mit der oben eingeführten Bezeichnung für säkulare Glieder erhält:

$$S(r) = a\left(1 + \frac{1}{2}e^2\right);\; S(r\sin v) = S(r \sin v \cos v) = 0$$

$$S(r\cos v) = -\frac{3}{2}ae;\; S(r\cos^2 v) = a\left(e^2 + \frac{1}{2}\right);\; S(r\sin^2 v) = \frac{a}{2}(1-e^2)$$

und hiermit

$$S(r\sin u) = -\frac{3}{2}ae\sin\omega \quad S(r\sin^2 u) = \frac{a}{2}[1 - e^2 + 3e^2\sin^2\omega]$$

$$S(r\cos u) = -\frac{3}{2}ae\cos\omega \quad S(r\cos^2 u) = \frac{a}{2}[1 + 2e^2 - 3e^2\sin^2\omega]$$

$$S(r\sin u\cos u) = \frac{3}{2}ae^2\sin\omega\cos\omega.$$

Daraus folgt sofort

$$S\left(\frac{da}{dt}\right) = S\left(\frac{de}{dt}\right) = 0$$

$$S\left(\sin i\frac{d\Omega}{dt}\right) = -\Delta w; \quad S\left(\frac{di}{dt}\right) = +w\cdot E$$

$$S\left(e\frac{d\pi}{dt}\right) = ew\left[D - \mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}i\cdot\Delta\right]$$

und wenn diese Formeln ausführlich hingeschrieben werden:

$$\left.\begin{aligned}
S\left(e\frac{d\pi}{dt}\right) &= e\left\{w_x\,\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}i\sin\Omega - w_y\,\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}i\cos\Omega + w_z\right\}\\
S\left(\sin i\frac{d\Omega}{dt}\right) &= -w_x\cos i\sin\Omega + w_y\cos i\cos\Omega + w_z\sin i\\
S\left(\frac{di}{dt}\right) &= w_x\cos\Omega + w_y\sin\Omega.
\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

Diese Formeln stimmen, wie zu erwarten, vollkommen mit denen des Herrn Anding[1]) überein, die er einfach durch die Transformation der Elemente auf ein gegen das empirische bewegte Inertialsystem abgeleitet hat. Hier erscheinen sie als spezieller Fall allgemeinerer Betrachtungen. Die einfachste Anwendung dieser Formeln zur Ermittlung von w_x w_y w_z hat Herr Anding vorgenommen. Diese war ermöglicht dadurch, daß S. Newcomb[2]) die säkularen Veränderungen der Bahnelemente der vier kleinen Planeten, Merkur, Venus, Erde, Mars sowohl theoretisch als auch empirisch abgeleitet hat.

---

[1]) Enzyklopädie der mathem. Wissenschaften, Bd. VI_2.

[2]) The Elements of the four inner Planets. Washington 1895, S. 109.

Die Differenzen der so gefundenen zweierlei Werte werden als mit den obigen S Werten übereinstimmend angenommen werden können, wenn man voraussetzen darf, daß im Übrigen die theoretische Berechnung der Störungen vollständig war. Dies trifft bekanntlich für das Merkurperihel nicht zu und es muß die große Abweichung zwischen dem empirischen und theoretischen Werte der Säkularveränderung dieses Elementes außer Betracht gelassen werden. Tut man dies, so ergeben sich folgende Werte:

$$w_x = 0''.00 \pm 0''.15\,; \quad w_y = 0''.03 \pm 0''.15\,; \quad w_z = 7''.50 \pm 2''.30$$

zugleich mit den mittleren Fehlern, welche mit den Angaben Herrn Andings fast vollkommen übereinstimmen.

Wie man auch die Zuverlässigkeit der Newcombschen Zahlen, die sehr vergrößert in das Resultat eingehen, beurteilen mag — auch hierin wird man Herrn Anding beistimmen müssen — sicher ist es, daß das empirische System der Astronomie sich im Jahrhundert um mehrere Bogensekunden um ein Inertialsystem drehen wird. Daß von den 3 Drehkomponenten nur w_z merkbar ist, ist durch die Art der Orientierung des empirischen Systems von selbst erklärt.

§ 5.

Es ist hier der Ort, ein Hilfsmittel zur Sprache zu bringen, auf das seit Laplace oftmals als auf ein besonders taugliches zu ähnlichen Betrachtungen, wie die vorliegenden, hingewiesen worden ist. Nennt man $x\,y\,z$ die Inertialkoordinaten einer der planetarischen Massen, so gelten die 3 Flächensätze:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma m \left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt}\right) &= c_1 \\ \Sigma m \left(z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt}\right) &= c_2 \\ \Sigma m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt}\right) &= c_3 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

worin die c Konstante sind. Nimmt man ein zweites Koordinatensystem $\xi\,\eta\,\zeta$ mit demselben Anfang und setzt man

$$\cos(\zeta, x) = \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}}, \quad \cos(\zeta, y) = \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}},$$
$$\cos(\zeta, z) = \frac{c_3}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}}$$

so ist die $\xi\,\eta$ Ebene die Laplacesche unveränderliche Ebene. In Bezug auf sie hat die Konstante der Flächengeschwindigkeiten den größten Wert, den sie erreichen kann, nämlich $\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}$ und in Bezug auf jede darauf senkrechte Ebene ist sie = Null. Aus dieser Bedeutung der unveränderlichen Ebene folgen gewisse Vorteile für die analytische Behandlung von Bewegungsproblemen, wenn man diese Ebene zu einer Koordinatenebene wählt. Da sie gegen das Inertialsystem festliegt, so kann sie, allerdings nur in beschränktem Umfange, zur Orientierung des empirischen Systems gegen ein Inertialsystem benutzt werden. Dazu wird man die zu (1) analogen Ausdrücke für die Koordinaten $x'\,y'\,z'$ im empirischen System zu bilden haben. Mit den Bezeichnungen des letzten Artikels ergibt sich Folgendes: Man setze zur Abkürzung:

$$\left.\begin{array}{l|l} \Sigma m\,(y^2 + z^2) = A & \Sigma m\,y\,z = c' \\ \Sigma m\,(z^2 + x^2) = B & \Sigma m\,z\,x = c'' \\ \Sigma m\,(x^2 + y^2) = C & \Sigma m\,x\,y = c''' \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Dann wird:

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma m\left(x'\dfrac{dy'}{dt} - y'\dfrac{dx'}{dt}\right) = c'_3 = c_3 + w_x(t c_2 - c'') - w_y(t c_1 + c') + w_z \cdot C \\ \Sigma m\left(y'\dfrac{dz'}{dt} - z'\dfrac{dy'}{dt}\right) = c'_1 = c_1 + w_x \cdot A + w_y(t c_3 - c''') - w_z \cdot (t c_2 + c'') \\ \Sigma m\left(z'\dfrac{dx'}{dt} - x'\dfrac{dz'}{dt}\right) = c'_2 = c_2 - w_x(t c_3 + c''') + w_y \cdot B + w_z(t c_1 - c') \end{array}\right\} \quad (3)$$

Die durch (2) definierten Größen sind mit den Umläufen der Planeten periodisch veränderlich. Man wird auch hier die

periodischen Glieder fortlassen können, da sich voraussichtlich nur die säkulären Glieder, die eben mit der Zeit beliebig groß werden können, als bemerkbar erweisen werden. Da bekanntlich die 3 Flächensätze nicht unabhängig von einander sind, vielmehr rein formal aus zweien der dritte folgt, so kann man aus (3), wie von anfang an klar war, die 3 Rotationskomponenten $w_x\, w_y\, w_z$ nicht getrennt bestimmen. Abgesehen hiervon hat die Verwendung der Flächensätze bei der Orientierung des empirischen Systems noch andere Bedenken. Da die Planetenmassen als Faktoren in den Summen erscheinen, werden die großen Planeten den wesentlichen Anteil an den Summen haben. Tatsächlich erhält man schon eine sehr angenährt richtige Bestimmung der Lage der unveränderlichen Ebene, wenn man außer Jupiter und Saturn alle andern Planeten außer Acht läßt. In der Hauptsache werden die linken Seiten von (2) also nur durch die großen Planeten bestimmt und Merkur z. B. hat nur einen kaum bemerkbaren Einfluß. Darin ist auch begründet, warum die Integrale der Flächensätze eine so wenig wertvolle und durchgreifende Prüfung für die Richtigkeit der Planetentheorien abgeben. Da die Genauigkeit in den von den großen Planeten herrührenden Gliedern sich nicht in entsprechendem Grade erreichen läßt, könnte die Bewegung von Merkur und Venus total verfehlt berechnet sein und doch würde dadurch die Lage der unveränderlichen Ebene oder was dasselbe ist, die Größen $c_1\, c_2\, c_3$ sich als konstant erweisen.

Eine Eigentümlichkeit besitzen bekanntlich die Integralo der Flächensätze, die in manchen Fällen von Bedeutung sein kann. Sie gelten nämlich für allerlei Arten innerer Kräfte. Die Konstanten $c_1\, c_2\, c_3$ ändern sich nicht, wenn das Newtonsche Gesetz nicht zutreffen oder wenn plötzlich an seine Stelle ein anderes Gesetz wirksam werden sollte, sie bleiben ungeändert bei Explosionen, Zusammenstößen etc. Auf diese Weise sind sie überhaupt keine Kontrolle für die Planetenbewegungen, die für jeden einzelnen Planeten dem Newtonschen Gesetz gemäß erfolgen und den Beobachtungen entsprechend dargestellt werden sollen.

Die Bedeutung der unveränderlichen Ebene scheint demnach in mechanischer Beziehung eine sehr geringe zu sein und es dürfte sich kaum lohnen, ihre Lage im empirischen System mit großer Genauigkeit zu bestimmen. Wenn dies aber unternommen wird, dann muß man nicht nur alle Mitglieder des Sonnensystems, also auch die Trabanten, mit einbegreifen, was auch gewöhnlich geschieht, sondern man darf auch nicht versäumen, wie Poinsot[1]) zuerst bemerkt hat, die Rotationen der Sonne und der Planeten zu berücksichtigen. Man überzeugt sich leicht, daß die Rotationsmomente der großen Planeten von demselben Range sind, wie der Anteil des Merkur und daß die Rotation der Sonne die Lage der unveränderlichen Ebene durchaus nicht unmerklich verändert. Tatsächlich sind aber die Summen (1) nur konstant, wenn nicht nur alle Massen im Planetensystem, sondern auch ihre vollen Geschwindigkeitskomponenten eingesetzt werden. Auf diesen Punkt hat Poinsot besonderen Nachdruck gelegt und daran sehr weitgehende Aussichten geknüpft, die mathematisch zwar wohlbegründet sind, sich aber tatsächlich niemals werden realisieren lassen. Bildet man nämlich die Summen (1), so erscheinen links die Massen als Faktoren, ferner die Trägheitsmomente der Planeten in Bezug auf zu den $x\ y\ z$ parallele und durch den Schwerpunkt eines jeden Planeten gehende Achsen, multipliziert mit den Komponenten der Rotationsgeschwindigkeit. Die Summen dieser Ausdrücke müssen konstant sein und wenn man nun zu verschiedenen Zeitepochen die Koordinaten der Schwerpunkte und ihre Geschwindigkeiten, ferner die Lagen der Rotationsachsen und die Rotationsgeschwindigkeiten um sie bestimmt, so könnte man hieraus sowohl die Massen als auch die Trägheitsmomente ableiten. Diese Aussicht ist allerdings verlockend und sie wurde auch von Poinsot mit großer Wärme besprochen. Daß sie aber trotzdem eine nicht realisierbare Utopie ist, auch abgesehen von der Nichtkoinzidenz des empirischen Systems mit einem

[1]) L. Poinsot, Mémoire sur la théorie et la detérmination de l'équateur du système solaire. Addition zu den „Élémens de Statique". Paris 1830.

Inertialsystem, braucht kaum bemerkt zu werden. Die erforderliche Genauigkeit — eine genügende Variation in den Koeffizienten selbst vorausgesetzt — wird niemals zu erreichen sein, selbst wenn sich die praktische Astronomie in ganz ungeahnter Weise entwickeln sollte.

§ 6.

Zum Schluß sollen noch einige Bemerkungen über den Zusammenhang gemacht werden, in dem die Eigenbewegungen der Fixsterne mit den hier besprochenen Fragen stehen. Ich werde mich indessen auf das Nötigste beschränken, da ich bald Gelegenheit zu finden hoffe, auf einige der zu berührenden Punkte näher einzugehen.

Wählt man den Schwerpunkt des Sonnensystems zum Anfang eines Koordinatensystems ξ, η, ζ, das wir nach den früheren Betrachtungen als ein Inertialsystem ansehen können und ein empirisches System $\xi' \eta' \zeta'$ mit demselben Anfang, welches etwa nach dem Äquator orientiert ist, so ist

$$\begin{aligned} \xi' &= \varrho \cos\delta \sin\alpha \\ \eta' &= \varrho \cos\delta \sin\alpha \\ \zeta' &= \varrho \sin\delta \end{aligned}$$

wo α und δ beobachtete Rektaszension und Deklination, ϱ die Entfernung eines Fixsterns bedeuten. Durch Differentiation ergeben sich die viel benutzten Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \varrho\, d\delta &= -d\xi' \sin\delta \cos\alpha + d\eta' \sin\delta \cos\alpha + d\zeta' \cos\delta \\ \varrho \cos\delta \cdot d\alpha &= -d\xi' \sin\alpha + d\eta' \cos\alpha \\ d\varrho &= -d\xi' \cos\delta \cos\alpha + d\eta' \cos\delta \sin\alpha + d\zeta' \sin\delta \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Nimmt man nun ein zweites System $x\,y\,z$, dessen Achsen mit den ξ, η, ζ parallel laufen und dessen Anfang zunächst unbestimmt bleiben mag, so wird:

$$\xi = x - a, \quad \eta = y - b, \quad \zeta = z - c \qquad (2)$$

wo $a\,b\,c$ die Koordinaten des Schwerpunkts des Planetensystems oder mit genügender Annäherung die Sonnenkoordinaten sind.

Man hat nun weiter, indem gegen früher nur r statt r_1 gesetzt wird:

$$\xi' = \xi - r\eta' + q\zeta'$$
$$\eta' = \eta - p\zeta' + r\xi'$$
$$\zeta' = \zeta - q\xi' + p\eta'$$

Mit Ausnahme vielleicht von einzelnen sehr stark bewegten Sternen wird man $r\,d\eta'$, $q\,d\zeta'$ etc. gegenüber den anderen Gliedern, die durch Differentiation entstehen, für sehr lange Zeiträume vernachlässigen können. Dann ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} d\xi' &= dx - da - dr\cdot\eta' + dq\cdot\zeta' \\ d\eta' &= dy - db - dp\cdot\zeta' + dr\cdot\xi' \\ d\zeta' &= dz - dc - dq\cdot\xi' + dp\cdot\eta' \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Denkt man sich (3) in (1) eingesetzt, so erhält man Gleichungen, von denen ein spezieller Fall bei den so vielfach ausgeführten Untersuchungen über die Bewegung des Sonnensystems gewöhnlich benutzt wird. Es sollen nun nur solche dx, dy, dz betrachtet werden, die aus einer Rotation um eine beliebige durch den Anfang gehende Achse mit beliebiger Rotationsgeschwindigkeit entstehen. Demgemäß soll gesetzt werden

$$dx = z w_2 - y w_3$$
$$dy = x w_3 - z w_1$$
$$dz = y w_1 - x w_2$$

Dabei sollen die Rotationskomponenten $w_1\, w_2\, w_3$ als beliebige Funktionen des Orts angesehen werden. Dann wäre der allgemeinste Fall, in dem den rechten Seiten der letzten Gleichungen noch etwa die Größen λ, μ, ν hinzuzufügen wären, ebenso leicht zu behandeln, denn man hätte im folgenden nur da, db, dc durch $da - \lambda$, $db - \mu$, $dc - \nu$ zu ersetzen. Doch soll hier davon Abstand genommen werden. Noch ist zu bemerken, daß $w_1\, w_2\, w_3$ Rechtsdrehungen bedeuten, wenn das Koordinatensystem $x\,y\,z$ ein rechtsdrehendes ist.

Führt man noch die Polarkoordinaten A und D desjenigen Punktes ein, nach welchem die Bewegung des Sonnensystems

im Inertialsystem $x\,y\,z$ erfolgt und h die Weglänge dieser Bewegung in einer sehr kleinen Zeit, so wird

$$\begin{aligned} da &= h \cos D \cos A \\ db &= h \cos D \sin A \\ dc &= h \sin D \end{aligned}$$

Setzt man dies in (3) und darauf die Werte (3) in (1) ein, so ergibt sich folgendes. Bezeichnet man:

$$\left.\begin{aligned} h \cos D \cos A + b\,w_3 - c\,w_2 &= X_0 \\ h \cos D \sin A + c\,w_1 - a\,w_3 &= Y_0 \\ h \sin D \qquad\quad + a\,w_2 - b\,w_1 &= Z_0 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

so findet man schließlich:

$$\left.\begin{aligned} \varrho\, d\,\delta &= X_0 \sin\delta \cos a + Y_0 \sin\delta \sin a - Z_0 \cos\delta \\ &\quad + (dp + w_1)\,\varrho \sin a - (dq + w_2)\,\varrho \cos a + \mu\,\varrho \\ \varrho \cos\delta \cdot d\,a &= X_0 \sin a - Y_0 \cos\delta - (dp + w_1)\,\varrho \sin\delta \cos a \\ &\quad - (dq + w_2)\,\varrho \sin\delta \sin a + \varrho \cos\delta \cdot (dr + w_3) \\ d\,\varrho &= - X_0 \cos\delta \cos a - Y_0 \cos\delta \sin a - Z_0 \sin\delta \end{aligned}\right\} \tag{I}$$

In diesen allgemeinen Gleichungen ist durch die Beziehung auf das Inertialsystem schon eine Präzessionskorrektion enthalten. Das in der ersten Gleichung hinzugefügte Glied $\mu\,\varrho$ bedeutet etwaige Korrektionen der zur Ableitung der Eigenbewegungen in δ benutzten Deklinationssysteme, während eine etwaige Verbesserung der Äquinoktien als in $d\,r + w_3$ enthalten betrachtet werden kann.

Da die $w_1\,w_2\,w_3$ unbekannte Funktionen von a, δ und ϱ sind, so erlaubt I gar keinen Schluß auf den Apex der Sonnenbewegung; auch darf man nicht übersehen, daß die Fixsternentfernung ϱ im allgemeinen unbekannt ist. Was man bisher über die Eigenbewegungen $d\,a$ und $d\,\delta$ in Erfahrung gebracht hat — in Bezug auf die spektroskopisch bestimmten $d\,\varrho$ berechtigt die allzu lückenhafte Erfahrung kaum zu irgend einer Aussage —, zeigt, daß sie für die einzelnen Sterne stark und anscheinend regellos hin- und herschwanken. Allgemeinere Gesetze werden sich demgemäß nur in Mittelwerten für sehr

viele Sterne zeigen können und man wird nur in solchen Mittelwerten eine Abhängigkeit vom Ort erkennen. Die Gleichungen I sind dann so zu verstehen, daß die $w_1\, w_2\, w_3$ diese den Mittelwerten entsprechenden Funktionen bedeuten. Man wird also für jeden Stern den Gleichungen eine Größe Δ hinzufügen müssen, die dem Stern individuell zugehört und als ein Fehler, in der einfachsten Annahme von zufälliger Art, zu behandeln ist.

Die weitere Behandlung von I ist natürlich nur möglich, wenn über die Funktionen w, zum mindesten was ihre Form betrifft, Hypothesen gemacht werden. Diese Hypothesen bestimmen in Verbindung mit der Art der Ausgleichung, der Verteilung der Sterne etc., das Koordinatensystem $x\,y\,z$ Infolge dessen kann man nicht immer behaupten, daß die Resultate für verschiedene Sternklassen z. B. für solche von verschiedenen Helligkeiten, sich auf dasselbe Koordinatensystem beziehen, in manchen Fällen wird man eine solche Annahme sogar als sehr unwahrscheinlich erkennen. Hierdurch und noch durch andere Umstände stellen sich einer einwandfreien Interpretation der Resultate über die Bestimmung des Apex der Sonnenbewegung große, fast unüberwindliche Hindernisse entgegen, worauf hier umsoweniger eingegangen werden soll, als Herr Anding[1]) darüber sehr eingreifende wichtige Untersuchungen angestellt hat.

Gewöhnlich wird nun die Annahme $w_1 = w_2 = w_3 = 0$ gemacht und außerdem $dp = 0$ gesetzt. Dann kann man auch dr und dq als Verbesserung der Präzessionskonstanten m und n betrachten, so daß

$$\Delta m = dr; \;\; \Delta n = -dq$$

Diese beiden Größen stellen bekanntlich nur eine Unbekannte dar, wenn die Planetenpräzession und die Korrektion der Äquinoktien als genügend genau bekannt angesehen werden dürfen.

---

[1]) E. Anding, Kritische Untersuchungen über die Bewegung der Sonne im Weltraume. München 1901.

Die auf solche Weise spezialisierten Gleichungen I sind außerordentlich oft und zwar mit Benützung sehr verschiedenartigen Materials numerisch verwendet worden. Auch wenn nicht gerade nach diesen unter dem Namen der Airyschen Formeln bekannten Vorschriften gerechnet worden ist, wurden doch fast immer ganz ähnliche Annahmen gemacht, die im Wesentlichen darauf hinauslaufen, daß es Koordinatensystem $x y z$ mit zu Inertialachsen parallelen Achsenrichtungen gibt, für welche sich die Bewegungen dx, dy, dz im Mittel aus einer größeren oder kleineren Anzahl von Sternen genommen, vollständig kompensieren. Auf das rein hypothetische und nicht sehr wahrscheinliche dieser Annahme wurde nachdrücklich von Anding, Kobold,[1]) Stumpe[2]) und mir hingewiesen. Eine Berechtigung zu dieser Annahme läßt sich nur aus dem Erfolge ableiten und dieser Erfolg wird weiter nur dadurch konstatiert, daß die so verschiedenartigen Berechnungen meistens zu nicht gerade abnorm abweichenden Werten für die Koordinaten A und D des Apex geführt haben. Daraus wird man allerdings vielleicht schließen dürfen, daß die gemachte Annahme bis zu einem gewissen Grade die wirklichen Verhältnisse darstellt. Indessen muß andererseits konstatiert werden, daß sich fast alle Ableitungen nur auf die im Mittel uns näheren Fixsterne beziehen und daß andere Annahmen noch nicht verfolgt worden sind. Es ist also nicht zu leugnen, daß sich demnach fast alle vorliegenden Untersuchungen mit großer Einseitigkeit nach einer Richtung nur erstrecken. Außerdem haben sich aber auch auf diesem Wege Ergebnisse eingestellt, die bei der Interpretation der gefundenen Zahlen zur Vorsicht mahnen. Es sei hier nur ein solches vor kurzem gefundenes Ergebnis mitgeteilt. Die Herren Dyson und Thackeray[3]) haben durch Vergleichung des neu reduzierten Groombridge Katalogs mit neueren Greenwicher Beobachtungen Eigenbewegungen ab-

---

[1]) Astron. Nachrichten, No. 3284.

[2]) Astron. Nachrichten, Nr. 3348.

[3]) Monthly notices. LXV.

geleitet und aus ihnen mit den sogenannten Airyschen Formeln den Sonnenapex bestimmt, indem sie den für gleiche Flächen am Himmel gebildeten Mitteln der Eigenbewegungen gleiche Gewichte geben und den innerhalb gewisser Größenklassen liegenden Sternen dieselbe Entfernung zuerteilen. So ergab sich[1])

Sterngröße	Anzahl	A	D
1—4.9	200	244°	+ 15°
5.0—5.9	454	268°	+ 27
6.0—6.9	1003	278°	+ 33
7.0—7.9	1239	280°	+ 38½
8.0—8.9	811	272°	+ 43

Hier stellt sich mit zunehmender Sterngröße eine sehr deutliche und bedeutende Vergrößerung von D dar. Ähnliches hat übrigens schon Stumpe gefunden. Der Umstand, daß der Groombridge Katalog nur Sterne, deren $\delta > 38^0$ ist, enthält, wird vielleicht von Einfluß gewesen sein, indessen ist es nicht wahrscheinlich, daß hierdurch alles erklärt wird.

Formell nicht sehr verschieden von der Annahme $w_1 = w_2 = w_3 = 0$, aber allgemeiner, ist die Annahme, daß die w Konstanten sind. An sich ist es von vornherein sehr wahrscheinlich, daß in den Mittelwerten, als Rest gewissermaßen, eine Rotation übrig bleibt und man wird nur über die eventuelle Bemerkbarkeit dieser Rotation verschiedener Meinung sein können. Die Frage, ob dieses konstante Rotationsglied den Hauptteil des systematischen Verlaufs in den Bewegungen der Fixsterne gegen ein System $x\,y\,z$ wiedergibt, mag hier unerörtert bleiben. Wahrscheinlich ist dies nicht der Fall. Zuerst hat wohl E. Schönfeld[2]) darauf aufmerksam gemacht, daß es sich empfehlen dürfte, auf eine solche Rotation des Fixsternhimmels Rücksicht zu nehmen. Leider hat er sich durch einen Fehlschluß — der übrigens seine Formeln, welche

[1]) Für die hellsten Sterne sind die a. a. O. gegebenen Zahlen durch irgend welche Druck oder Schreibfehler entstellt. Ich habe die Zahlen für $X\,Y\,Z$ als richtig angewiesen.

[2]) Vierteljahrschrift der Astron. Gesellschaft XVII. S. 355 ff.

in den einfacher gestalteten Formeln I inbegriffen sind, nicht beeinträchtigt hat — verleiten lassen, sofort eine Spezialisierung zu empfehlen, die bisher, soviel ich weiß, nicht beanstandet worden ist. Die Vermutung, daß die Bewegungen der Fixsterne irgend eine Beziehung zur Milchstraße zeigen müssen, ist gewiß berechtigt, wenn man auch gegenwärtig positive Angaben in dieser Richtung nicht machen kann. Schönfeld sagt nun weiter: „Die Beziehungen der mittleren Bewegungen (zur Milchstraße) können in mehrfacher Weise gedacht werden. Am nächsten liegt aber die Annahme, daß die Bewegungen in Ebenen erfolgen, deren Neigungen gegen die Milchstraße klein sind und demgemäß in Richtungen, welche nahezu unter sich und der Milchstraße selbst parallel sind. Ohne Annahme einer solchen Rotation in der Ebene der Milchstraße, wie J. Herschel sie nennt, ist es kaum möglich, das Bestehen der sichtbaren Milchstraße zu erklären: dieselbe müßte sich mit fortschreitender Zeit auflösen und es wäre eigentlich ein Zufall, daß wir gerade zu einer Zeit leben, in der dies noch nicht stattgefunden hat.“ Daraus glaubte Schönfeld schließen zu müssen, daß eine etwaige gemeinschaftliche Drehung aller Sterne nur annähernd um eine Achse erfolgen könne, die senkrecht auf der Ebene der Milchstraße stände. Es ist aber nicht einzusehen, wie eine solche gemeinschaftliche Drehung, die also als Rest der Mittelwerte der Bewegungen bestehen bleibt, ein Zerfallen der Milchstraße erzeugen soll. Der ganze Fixsternhimmel, und mit ihm auch die Milchstraße, dreht sich wie ein starrer Körper — das sagen auch die Formeln Schönfelds aus — es könnten nur eventuell parallaktische Verschiebungen, wenn das Sonnensystem an der Rotation nicht Teil nimmt, stattfinden. In jedem Falle ist dieses Argument Schönfelds nicht geeignet, die Wahl der Rotationsachse irgendwie zu beschränken. Wenn nicht ganz andere Gesichtspunkte namhaft gemacht werden, ist jede Wahl gleich wahrscheinlich und zulässig. Leider haben mehrere Rechner, welche also die Formeln I mit konstanten w_1 w_2 w_3 anwandten, nur die Schönfeldschen Annahmen benutzt und weiter verfolgt.

Indessen erlauben die Rechnungen L. Struves[1]), der die Ausgleichung im allgemeinen Falle bis zu einem gewissen Grade durchgeführt hat ohne neue Rechnungen manches in dieser Richtung auszusagen. Die Arbeiten L. Struve gehören überhaupt zu den besten auf diesem Gebiete, weil sie die Grundlagen der Rechnung mit Klarheit und Deutlichkeit hervortreten lassen und auch nicht den Versuch machen, kleine Widersprüche, die an sich ja eigentlich selbstverständlich auftreten müssen, durch gekünstelte Annahmen wegzuschaffen.

Danach findet er für die Bradleyschen Sterne, wobei er allerdings für die ϱ gewisse hypothetische Werte angenommen hat, in der hier benutzten Bezeichnungsweise:

1. Aus den Rektaszensionen:

$$\begin{array}{l|l} dr + w_3 = -2''.725 & X_0 = -0''.493 \\ dp + w_1 = -0.037 & Y_0 = -4.386 \\ dq + w_2 = -1.368 & \end{array}$$

2. aus den Deklinationen:

$$\begin{array}{ll} dp + w_1 = +0''.408 & x_0 = +0''.206 \\ dq + w_2 = +1.090 & y_0 = -3.284 \\ & z_0 = +2.033 \end{array}$$

Die Übereinstimmung der doppelt bestimmten Werte ist keine gute. Indessen sind, wie L. Struve in einer zweiten Abhandlung erwähnt, noch einige Korrektionen anzubringen. Zuerst erfordert die von ihm benutzte Planetenpräzession $d\lambda$, um sie mit den neuesten Werten in Übereinstimmung zu bringen, die Korrektion $-0''.81$ und eine Verbesserung des Äquinoktiums im Betrage von $+1''.62$, so daß die beobachteten da die Gesamtkorrektion $+0''.81$ zu erhalten haben. Dasselbe wird erreicht, wenn man

$$dr + w_3 = -2''.725 + 0''.81 = -1''.92$$

annimmt. Eine Ausgleichung der Rektaszensionen und Dekli-

[1]) L. Struve, Bestimmung der Konstante der Präzession. St. Petersburg 1887 und in Astron. Nachrichten, Nr. 3729—30.

nationen zusammen hat leider L. Struve nicht im allgemeinen Fall ausgeführt. Da es sich hier nur um ungefähre Ab-Abschätzungen handelt, habe ich mich damit begnügt, die doppelt bestimmten Werte nach Maßgabe der aus den m. F. folgenden Gewichte überschlagsweise zu vereinigen. So ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} dp + w_1 &= +\,0''34 \\ dq + w_2 &= +\,0.87 \\ dr + w_3 &= -\,1''92 \end{aligned}\right\}$$

Diese Rotationskomponenten beziehen sich auf das nach dem Äquator orientierte Koordinatensystem. In Bezug auf die Ekliptik, wo also, wie früher die x-Achse nach dem Widderpunkt, die y-Achse nach $+\,90^0$ Länge und die z-Achse nach Norden zeigt, findet man, wenn ε die Schiefe bedeutet:

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= w_1 + dp = +\,0''34 \\ \Omega_2 &= (w_2 + dq)\cos\varepsilon + (w_3 + dr)\sin\varepsilon = +\,0''04 \\ \Omega_3 &= -\,(w_2 + dq)\sin\varepsilon + (w_3 + dr)\cos\varepsilon = -\,2''11 \end{aligned}$$

Mehr läßt sich aus den Eigenbewegungen der Bradleyschen Sterne nicht schließen, denn man kann selbstverständlich die Rotation des Fixsternsystems von der Drehung des Inertialsystems gegen das empirische nicht trennen. Nimmt man aber die oben angegebenen Werte für die Drehkomponenten des Inertialsystems

$$\Omega_x = 0''00; \quad \Omega_y = +\,0''03; \quad \Omega_z = +\,7''50$$

so werden die Drehkomponenten des Fixsternsystems Ω'_x, Ω'_y, Ω'_z:

$$\begin{aligned} \Omega'_x &= +\,0''34, \\ \Omega'_y &= +\,0''01 \end{aligned} \qquad \Omega'_z = -\,9''61.$$

Man wird wohl kaum behaupten können, daß diese Zahlen den Betrag der Drehung des Inertialsystems $\Omega_z = 7''50$, wie ihn die säkularen Veränderungen der inneren Planetenbahnen ergaben, besonders wahrscheinlich macht. Denn es ist, trotz der speziellen Annahmen, die gemacht worden sind, immerhin

verdächtig, daß eine Drehung des Fixsternhimmels hervorgeht, deren Achse sehr nahe senkrecht zur Ekliptik steht, die doch in keiner Weise eine Beziehung zum Fixsternsystem zu haben scheint.

Die vorstehenden Bemerkungen sind natürlich nur Ansätze zu Betrachtungen, die zum Teil erst in der Zukunft werden weitergeführt werden können. Namentlich wird, wie schon bemerkt, die Ableitung und Benutzung der Eigenbewegung entfernter Sterne von großer Bedeutung werden. Die Konstanz der Drehkomponenten w ist bisher nichts als eine ganz willkürliche Annahme. Andererseits mögen bei den Säkularveränderungen der Planetenbahnen noch rein mechanische Vorgänge vorliegen, deren Einwirkung bisher nicht berücksichtigt worden ist, wie dies ohne Zweifel bei der Bewegung des Merkurperihels der Fall ist. Wir werden nach alle dem wohl mit einiger Sicherheit den Satz aussprechen dürfen, daß sich das im Gebrauch befindliche astronomische empirische Koordinatensystem nicht um mehr als um einige und wahrscheinlich ganz wenige Bogensekunden im Jahrhundert um ein Inertialsystem drehen kann.



Die südbayerische Dreieckskette,

eine neue Verbindung der altbayerischen Grundlinie bei München mit der österreichischen Triangulierung bei Salzburg und der Basis von Oberbergheim bei Strassburg.

Von **Dr. M. Schmidt.**

(*Eingelaufen 3. Februar.*)

(Mit Tafel I.)

Im Herbst des Jahres 1801 ist unter der Oberleitung des französischen Oberst Bonne und unter Mitwirkung französischer und bayerischer Offiziere und Topographen zwischen München und Aufkirchen bei Erding die Messung einer Grundlinie ausgeführt worden, die zu den längsten jemals gemessenen Grundlinien gehört und den Zwecken einer von der Kurfürstlichen Bayerischen Regierung angeordneten Landestriangulierung diente. Durch ein das ganze Land überspannendes Netz großer Dreiecke wurde zugleich die Grundlage einer auf 22 Blätter in 1 : 100 000 berechneten kartographischen Darstellung des Landes geschaffen, die später durch französische Kartographen bis auf einige unvollendet gebliebene Blätter in Kupferstich ausgearbeitet und unter dem Titel „Carte de la Bavière au 1 : 100 000 17 feuilles en noir et 1 tableau d'assemblage, gravure sur cuivre" unter den Kartenwerken des Service gèographique de l'armée française in Paris im Jahre 1810 veröffentlicht wurde.

Diese oberbayerische Grundlinie, deren Messung leider nur einmal erfolgte, hat neue Wichtigkeit und erhöhte Bedeutung bekommen, als im Jahre 1807 eine Grundsteuervermessung in Bayern in Angriff genommen und die Landestriangulierung bis an die erweiterten Grenzen des Königreiches und auf die Rheinpfalz ausgedehnt wurde. In Verbindung mit zwei weiteren, im Jahre 1807 zwischen Erlangen und Nürnberg und im Jahre 1819

im Rheintale bei Speyer gemessenen Grundlinien ist die altbayerische Basis für alle seitdem in Bayern für wissenschaftliche, staatswirtschaftliche und topographische Zwecke ausgeführte Vermessungsarbeiten von grundlegender Bedeutung geworden und hat dabei den strengsten Genauigkeitsforderungen Genüge leisten müssen.

Die auf den Meeresspiegel reduzierte Länge der zwischen den versteinten Endpunkten unmittelbar gemessenen Strecke der Grundlinie ist in dem im Jahre 1873 erschienenen amtlichen Werke „Die bayerische Landesvermessung“ mit Berücksichtigung aller nötigen Verbesserungen auf 21 653,75 m und der durch trigonometrische Berechnung daraus abgeleitete Abstand der beiden Turmspitzen von München und Aufkirchen auf 28497,10 m festgestellt worden.

Am gleichen Orte finden sich auch Angaben über den Grad der Genauigkeit der in Bayern ausgeführten Basismessungen. Dieselben sind durch Vergleichung je zweier Werte einiger Hauptdreiecksseiten gewonnen worden, die aus verschiedenen Grundlinien berechnet sind. Die Unterschiede sind gering und betragen beispielsweise für die aus der Münchener und Nürnberger Grundlinie abgeleitete Größe der 29,7 km langen Seite St. Johann—Hohenstein 67 mm pro km und bei der 69,4 km langen Seite Hohenstein—Wülzburg 42 mm pro km.

Einen Vergleich der vor mehr als 100 Jahren ausgeführten Messung der altbayerischen Grundlinie mit neueren Basismessungen, bei welchen vollkommenere Apparate und genauere Meßmethoden Verwendung fanden, erhält man mittelst einer in den Jahren 1901 bis 1904 auf dem 48. Breitenparallel in Südbayern hergestellten Hauptdreieckskette. (Tafel I.)

Dieselbe schließt sich im Westen an die im Jahre 1892 von E. Hammer bearbeitete „Triangulierung zur Verbindung des rheinischen Netzes mit dem bayerischen Hauptdreiecksnetz“ an und erstreckt sich in östlicher Richtung bis in die Gegend von Salzburg, woselbst sie mit den durch das K. und K. Militärgeographische Institut in Wien gemessenen Dreiecken verbunden ist.

Durch die beiden, den südlichen Teil von Oberbayern, Schwaben und Württemberg durchziehenden Dreiecksketten wird auf dem kürzesten Wege eine Verbindung der altbayerischen Grundlinie bei München mit der von der K. preußischen Landesaufnahme in der Gegend von Straßburg bei Oberbergheim gemessenen Basis hergestellt.

Die neue südbayerische Dreieckskette ist mit ausgiebiger Benützung älterer Hauptdreieckspunkte der ursprünglichen bayerischen Landestriangulierung entworfen. Von den zu Anfang des XIX. Jahrhunderts auf den jetzt wiederbenützten Punkten ausgeführten Winkelmessungen, die in dem Werke „Die bayerische Landesvermessung" veröffentlicht sind, konnten jedoch nur jene der Stationen Stauffersberg, Altomünster und Aufkirchen als den heutigen Genauigkeitsforderungen entsprechend angesehen und in die neue Dreieckskette übernommen werden. Die meisten übrigen Winkel sind durch direkte Messungen neu bestimmt worden.

Da ferner von einigen Anschlußpunkten der neuen Kette an die Nachbartriangulierungen gute Winkelmessungen aus den Jahren 1901 bis 1903 und für den Anschluß des astronomischen Netzes in Schwaben solche aus den Jahren 1890 bis 1894 bereits vorlagen, so konnten die noch weiter erforderlichen Winkelmessungen in der neuen Kette im Laufe des Jahres 1904 auf allen Punkten Erledigung finden bis auf die Station Mitbach, woselbst die Messungen erst im Sommer 1905 zur Ausführung gelangten.

Durch dankenswertes Entgegenkommen des K. Bayerischen Katasterbureaus waren zur Ausführung der Winkelbeobachtungen die Herren Katastergeometer Wölfel und Netzsch nebst den erforderlichen Gehilfen der Erdmessungskommission zur Verfügung gestellt worden, während von österreichischer Seite in den Anschlußdreiecken 10 bis 15 die Beobachtungen durch Herrn Hauptmann Andres des K. und K. Militärgeographischen Instituts in Wien ausgeführt wurden. Die erforderlichen Meßinstrumente sind aus den Beständen der K. B. Erdmessungskommission und des geodätischen Instituts der K. Technischen

Hochschule in München entnommen worden. Insbesondere ist der verwendete Mikroskoptheodolit mit 23 cm Kreisdurchmesser aus der Werkstätte von Hildebrand in Freiberg Eigentum des geodätischen Instituts.

Das bei den Winkelmessungen angewendete Beobachtungsverfahren bestand darin, daß die einzelnen Dreieckswinkel jedesmal in sechs verschiedenen Kreisständen aus je 8 bis 12 Doppeleinstellungen jeder Richtung bestimmt wurden.

Über den bei den Winkelmessungen erreichten Genauigkeitsgrad ist folgendes zu bemerken.

Der mittlere Winkelfehler berechnet sich aus den Dreieckswidersprüchen Δ nach der internationalen Formel

$$m = \sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{3n}}$$

aus den in der Hauptkette, sowie für die Basis- und Azimutanschlüsse und für den österreichischen Anschluß in Betracht kommenden 22 Dreiecken zu

$$m = \pm 0\overset{''}{.}455.$$

Stellt man dagegen die Dreieckswidersprüche in drei nach der Verschiedenheit der Art der Winkelbeobachtungen gebildete Gruppen zusammen, so erhält man:

a) aus den Dreiecken 1 bis 9 der Hauptkette und den Anschlußdreiecken 1^a, 5^a und 6^a, in welchen 14 aus der Landesvermessung übernommene Winkel nach dem Repetitionsverfahren, die übrigen 22 Winkel aber mit Doppeleinstellungen in beiden Fernrohrlagen in sechs verschiedenen Kreisständen beobachtet sind: $m_1 = \pm 0\overset{''}{.}357$,

b) für die sechs österreichischen Anschlußdreiecke 10 bis 15, in welchen die Winkel zur Hälfte von bayerischer Seite, zur Hälfte von Seite Österreichs gemessen sind:

$$m_2 = \pm 0.432,$$

c) für die das astronomische Viereck in Schwaben bildenden vier Dreiecke, deren Winkel der Mehrzahl nach aus Azimutdifferenzen berechnet sind:

$$m_3 = \pm 0.691.$$

Was die Widersprüche in den Seitenanschlüssen anlangt, so findet sich, wenn man zu dem S. 349 der bayerischen Landesvermessung in bayerischen Ruten angegebenen Wert des Log. Sinus der Basisseite München—Aufkirchen die Reduktion von Ruten- auf Metermaß und das Additament von 14,4 Einheiten der siebenten Logarithmenstelle hinzufügt

Log. M A = 4,454 8006.7.

Hieraus ergibt sich für den Anschluß an die österreichischen Dreiecke bei Salzburg im Dreieck 9 für die Seite Hochgern—Asten

Log. H A = 4,619 6316.2.

Nach einer Mitteilung des K. und K. Militärgeographischen Instituts in Wien vom 26. November 1904 beträgt der entsprechende, österreichischerseits bestimmte Wert:

Log. H A = 4,619 6344.7.

Die Anschlußdifferenz in dieser Seite ist somit $-28{,}5.10^{-7}$ bezw. 0.274 m, d. i. 6,6 mm pro km oder relativ 1 : 152 000.

Für die Seite Hochgern—Rettenstein findet sich nach der bayerischen Messung im Dreieck 15

Log. H R = 4,693 2188.7.

Nach der österreichischen Angabe ist

Log. H R = 4,693 2205.6.

Als Anschlußdifferenz in dieser Seite hat man somit $-16{,}9.10^{-7}$ bezw. 0,190 m, d. i. 3,8 mm pro km oder relativ 1 : 260 000.

Der Anschluß an die im Jahre 1892 von Hammer bearbeitete württembergische Triangulierung wird durch die Dreiecksseite Aenger—Roggenburg vermittelt.

Da jedoch die von Hammer berechnete Länge dieser Seite sich auf die über 500 km entfernte Grundlinie des rheinischen Dreiecksnetzes bei Bonn bezieht, ist es offenbar vorzuziehen, die Länge der Seite Aenger—Roggenburg aus der mit ihr nahezu auf dem gleichen Parallelkreis gelegenen und nur 200 km entfernten Basis von Oberbergheim bei Straßburg herzuleiten.

Die Verbindung der vorerwähnten Vergleichsseite mit der zuletzt genannten Grundlinie ergibt sich durch Vermittelung der Seite Donon — Straßburg des rheinischen Netzes. Der Logarithmus dieser Seite ist im „Rheinischen Netz" S. 127 und „Lotabweichungen" Heft II, S. 37 aus der alten Bonner Basis berechnet zu

Log. Do.-Str. = 4,642 6742.5.

In „Hauptdreiecke" Bd. XI, S. 89 findet sich für diese Seite, berechnet aus der Oberbergheimer Basis:

Log. Do.-Str. = 4.642 6766.9.

Zur Reduktion auf das internationale Meter ist der erste Logarithmus um $+ 38.10^{-7}$, der letztere um $+ 58.10^{-7}$ zu verbessern.

Man hat daher die verbesserten Logarithmen der Seite Donon—Straßburg:

Log. Do.-Str. = 4,642 6780.5 (aus der alten Bonner Basis)
Log. Do.-Str. = 4.642 6824.9 (aus der Oberbergheimer Basis)

mit der Differenz $44.4.10^{-7}$.

Um diesen Betrag sind die aus dem rheinischen Netz berechneten und auf das internationale Meter reduzierten Seitenlogarithmen der Hammerschen Triangulation zu vergrößern.

Man hat also für den Logarithmus der Seite Roggenburg —Aenger die Verbesserung $(+ 38{,}0 + 44{,}4)\, 10^{-7} = + 82{,}4.10^{-7}$ und erhält

Log. Ae.-Rog. (Th) = 4,793 8256.6 (Hammers Triang. S. 89)

hiezu die Verbesserung = + 82.4

Log. Ae.-Rog. (Th) = 4,793 8339.0 (verbesserter Wert).

Wogegen sich aus der südbayerischen Dreieckskette mit der altbayerischen Grundlinie findet:

Log. Ae.-Rog. (Th) = 4,793 8332.5.

Die Anschlußdifferenz beträgt somit $- 6.5.10^{-7}$ bezw. 0,093 m oder 1,5 mm pro km, d. i. relativ 1 : 670000.

Ein zweiter Vergleich zwischen der alten Bonner Basis und jener von Oberbergheim ergibt sich nach Dr. Kühnen (Verhandl., Brüssel 1892, S. 533) durch die Seite Ballon—Donon (rhein. Netz, S. 127), deren Logarithmus reduziert auf das internationale Meter 4,833 7669 ist.

Berechnet man diese Seite aus dem Dreieck Ballon-Donon-Bressoir der preußischen Landestriangulierung mit den „Hauptdreiecke“ XI, S. 204 im Jahre 1902 publizierten Elementen. so erhält man

$$\text{Log. Ba.-Do.} = 4{,}833\,7711$$

und die Differenz + 42 gegen den aus dem rheinischen Netz berechneten Wert. Somit ist für die Seite Aenger—Roggenburg die Verbesserung $(+38 + 42).10^{-7} = +80.10^{-7}$ und der verbesserte Logarithmus der Hammerschen Triangulierung

$$\text{Log. Ae.-Rog.} = 4{,}793\,8336.6.$$

Der entsprechende, aus der altbayerischen Basis berechnete Wert ist

$$\text{Log. Ae.-Rog.} = 4{,}793\,8332{,}5.$$

Die logarithm. Anschlußdifferenz zwischen der südbayerischen Kette und der württembergischen Triangulierung beträgt somit, wenn man dieser die Basis von Oberbergheim zu Grunde legt, $-4{,}1.10^{-7}$ bezw. 0,059 m oder 0,9 mm pro km, d. i. relativ 1:1054000.

Diese überraschend gute Übereinstimmung ist wohl zum Teil einem günstigen Zufall zuzuschreiben. Gleichwohl beweist dieselbe im Zusammenhalt mit dem befriedigenden Anschluß an die österreichischen Dreiecke, deren Seitenlängen bereits auf das internationale Meter reduziert sind, daß die zu Beginn des letzten Jahrhunderts ausgeführte Abgleichung der in Bayern verwendeten Basisapparate nach dem Pariser-Platinmeter, dessen Länge mit der des internationalen Meters übereinstimmt, mit der größten Genauigkeit ausgeführt worden ist. Die aus den bayerischen Basismessungen abgeleiteten geodätischen Längen verdienen daher in metronomischer Beziehung volles Vertrauen.

Südbayerische Dreieckskette.

Zusammenstellung der Dreieckswinkel und Seitenlogarithmen.

Dreieck Nr.	Station	Dreieckswinkel gemessen	Dreieckswinkel reduz.	Zahl der Repet. bezw. Doppelmessungen	Beobachtungsnachweis	Seitenlogarithmen aus der altbayerischen Basis berechnet
1	Roggenburg	53° 00′ 39″6	36″63	62 R.	Bayer. L. 187, 331	4,810 2330.1
	Peißenberg	50 16 40.1	37.13	69 R.	„ „ 179, 329	4,793 8332.5
	Aenger	76 42 49.2	46.24	110 R.	„ „ 94/95, 310	4,896 0419.3
	$E = 9''88$ $\Delta = +0''98$	180 00 08.9	0.00		„ „ 454, 459	
1[a]	Roggenburg	62° 50′ 25″43	24″70	48 D.	W. 1901	4,746 4164.6
	Aenger	20 04 57.83	57.10	84 D.	W. 1903	4,332 9213.8
	Kirchheim	97 04 38.92	38.20	54 D.	W. 1903	4,793 8332.5
	$E = 3''01$ $\Delta = -0''83$	180 00 02.18	0.00			
2	Peißenberg	30° 38′ 39″0	36″30	108 R.	Bayer. L. 179, 329/330	4,610 2345.7
	Roggenburg	69 31 53.8	51.10	92 R.	„ „ 186, 331	4,874 6004.1
	Stauffersberg	79 49 35.3	32.60	45 R.	„ „ 194, 333	4,896 0419.3
	$E - 7''60$ $\Delta = +0''50$	180 00 08.1	0.00			
3	Peißenberg	32° 33′ 28″58	25″90	116 R.	Bayer. L. 180, 329/330	4,608 3440.3
	Stauffersberg	63 59 50.30	47.63	105 R.	„ „ 193, 333	4,831 0952.2
	Altomünster	83 26 49.14	46.47	53 R.	„ „ 99, 311	4,874 6004.1
	$E = 6''91$ $\Delta = +1''11$	180 00 08.02	0.00			
4	Peißenberg	32° 22′ 56″43	54″42	153 R.	Bayer. L. 176, 329	4,560 0688.5
	Altomünster	56 01 49.91	47.90	127 R.	„ „ 98, 311	4,749 9894.2
	München	91 35 19.69	17.68	46 D.	N. 1904	4,831 0952.2
	$E = 5''16$ $\Delta = +0''87$	180 00 06.03	0.00			

5	Peißenberg	49°57′55″39	52″56	47 D.	N. 1904	4,766 9413.5
	München	82 36 57.11	54.28	48 D.	N. 1904	4,879 2952.2
	Wendelstein	47 25 15.99	13.16	60 D.	N. 1904	4,749 9894.2
	$E = 8''24 \quad \Delta = +0''25$	180 00 08.49	0.00			
5a	München, Frauenturm	73°00′31″45	31″16	112 D.	N. 1904	4,761 6389.6
	München, Sternwarte	104 30 42.25	41.97		A. G. A. III. S. 218, 198	4,766 9413.5
	Wendelstein, Pfeiler	2 28 47.16	46.87	48 D.	N. 1904	3,417 1610.0
	$E = 0''36 \quad \Delta = +0''50$	180 00 00.86	0.00			
6	Wendelstein	35°26′31″28	29″85	46 D.	N. 1904	4,532 7465.0
	München	60 39 58.80	57.37	49 D.	N. 1904	4,709 8194.4
	Mitbach	83 53 34.22	32.78	49 D.	N. 1905	4,766 9413.5
	$E = 4''39 \quad \Delta = -0''09$	180 00 04.30	0.00			
6a	München	36°01′14″50	13″85	88 R.	Bayer. L. 168	4,302 6330.2
	Aufkirchen	87 22 51.89	51.24	52 R.	„ „ 103	4,532 7465.0
	Mitbach	56 35 55.56	54.91	82 R.	„ „ 167	4,454 8006.7
	$E = 1''44 \quad \Delta = +0''51$	180 00 01.95	0.00			
7	Wendelstein	30°24′00″39	59″28	48 D.	N. 1904	4,423 2259.5
	Mitbach	71 22 15.89	14.78	48 D.	N. 1905	4,695 6766.2
	Oberhof	78 13 47.06	45.94	44 D.	N. 1904	4.709 8194.4
	$E = 3''25 \quad \Delta = +0''09$	180 00 03.34	0.00			
8	Wendelstein	50°00′05″19	04″02	30 D.	N. 1904	4.585 8547.4
	Oberhof	49 26 08.70	07.53	48 D.	N. 1904	4,582 2206.1
	Hochgern	80 33 49.63	48.45	48 D.	N. 1904	4.695 6766.2
	$E = 3''67 \quad \Delta = -0''15$	180 00 03.52	0.00			
9	Hochgern	39°03′01″92	01″17	56 D.	N. 1904	4,430 7280.5
	Oberhof	76 43 47.98	47.23	48 D.	N. 1904	4,619 6316.2
	Asten	64 13 12.35	11.60	50 D.	N. 1904	4,585 8547.4
	$E = 2''55 \quad \Delta = -0''30$	180 00 02.25	0.00			

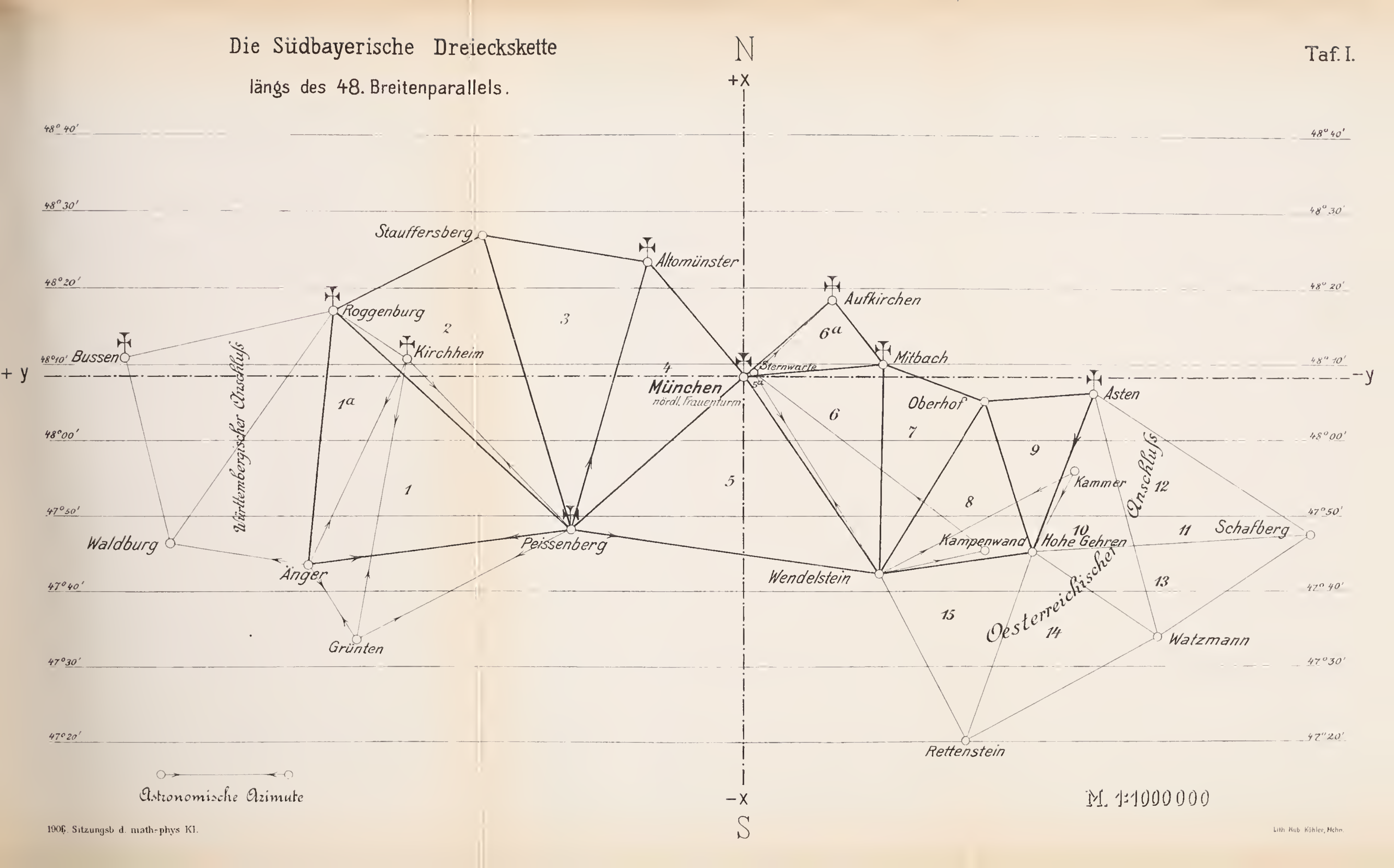
Österreichische Dreiecksberechnung, mitgeteilt vom K. und K. Militärgeographischen Institut.

Dreieck Nr.	Station	Dreieckswinkel gemessen	Dreieckswinkel reduz.	Zahl der Repet. bezw. Doppelmessungen	Beobachtungsnachweis	Seitenlogarithmen nach österreichischer Angabe
10	Hochgern	103° 00′ 11″61	10″45	86 D.	W. 1903	4,791 5403.0
	Asten	36 00 45.14	43.98	64 D.	W. 1903	4,572 1644.3
	Watzmann	40 59 06.72	05.57	64 D.	A. 1903	4.619 6344.8
	$E = 3''84$ $\varDelta = -0''37$	180 00 03.47	0.00			
11	Asten	42° 11′ 42″73	41″09	96 D.	W. 1903	4,656 3491.3
	Schafberg	66 28 55.63	52.45	86 D.	A. 1903	4,791 5403.0
	Watzmann	71 19 29.17	26.46	64 D.	A. 1903	4,805 7123.6
	$E = 6''73$ $\varDelta = +0''80$	180 00 07.53	0.00			
12	Hochgern	65° 27′ 02″64	00″65	72 D.	W. 1903	4,805 7123.4
	Asten	78 12 27.87	25.25	96 D.	W. 1903	4,837 5966.9
	Schafberg	36 20 36.03	34.10	86 D.	A. 1903	4,619 6344.6
	$E = 6''61$ $\varDelta = -0''07$	180 00 06,54	0,00			
13	Hochgern	37° 33′ 08″97	07″97	72 D.	W. 1903	4,656 3491.3
	Schafberg	30 08 19.60	17.07	86 D.	A. 1903	4,572 1644.3
	Watzmann	112 18 35.89	34.96	112 D.	A. 1903	4,837 5966.9
	$E = 3''97$ $\varDelta = +0''49$	180 00 04.46	0.00			
14	Rettenstein	42° 18′ 26″39	25″10	136 D.	A. 1903	4,572 1644.3
	Watzmann	62 48 26.52	25.23	32 D.	A. 1903	4.693 2205.6
	Hochgern	74 53 10.95	09.67	80 D.	N. 1904	4,728 7963.9
	$E = 4''51$ $\varDelta = -0''64$	180 00 03.86	0.00			
15	Wendelstein	70° 34′ 59″16	58″21	48 D.	N. 1904	4.693 2188.7
	Hochgern	62 29 46.23	45.28	48 D.	N. 1904	4.666 5633.0
	Rettenstein	46 55 17.45	16.51	78 D.	A. 1903	4,582 2206.1
	$E = 4''23$ $\varDelta = -1''39$	180 00 02.84	0.00			Aus der altbayer. Basis berechnet

Astronomisches Viereck in Schwaben.

Dreieck Nr.	Station	Dreieckswinkel gemessen	Dreieckswinkel reduz.	Zahl der Repet. bezw. Doppelmessungen	Beobachtungsnachweis	Seitenlogarithmen aus der altbayerischen Basis berechnet
1b	Aenger	56°37′55.″91	53.″53		Ö. 1893 A. G. A. V. 89, V. 98	4,760 5940.5
	Kirchheim	69 26 09.82	07.44		Ö. 1893 A. G. A. V. 176, V. 177	4,810 2330.1
	Peißenberg	53 56 01.42	59.03		Ö. 1890 A.G.A.V.112, V.113, IV.219	4,746 4175.5
	$E = 7.''60$ $\Delta = -0.''45$	180 00 07.15	0,00		W. 1902	
1c	Aenger	64°49′14.″30	12.″68		Ö. 1893 A. G. A. V. 98, V. 104	4,769 0004.4
	Peißenberg	19 30 36.36	34.74		W. 1902	4,336 0674.2
	Grünten	95 40 14.21	12.58		Ö. 1893 A. G. A. V. 114, V. 113	4,810 2330.1
	$E = 3.''20$ $\Delta = +1.''67$	180 00 04.87	0.00		IV. 145	
1d	Aenger	121°27′10.″21	08.″81		Ö. 1893 A. G. A. V. 89, V. 104	4,842 5319.7
	Kirchheim	15 24 49.19	47.79		Ö. 1894 A. G. A. V. 176, V. 178	4,336 0675.8
	Grünten	43 08 04.81	03.40		Ö. 1889 A. G. A. V. 113/114, IV. 164	4,746 4175.5
	$E = 2.''61$ $\Delta = +1.''60$	180 00 04.21	0.00			
1e	Grünten	52°32′09.″40	06.″80		Ö. 1889 A.G.A. IV. 145/164, V. 113	4,760 5941.0
	Kirchheim	54 01 20.63	18.03		Ö. 1894 A. G. A. V. 177	4,769 0004.4
	Peißenberg	73 26 37.78	35.17		Ö. 1890 A. G. A. IV. 202/219, V. 112	4,842 5319.4
	$E = 8.''20$ $\Delta = -0.''39$	180 00 07.81	0.00			





Die Südbayerische Dreieckskette
längs des 48. Breitenparallels.
Taf. I.
N
+x
48° 40'
48° 30'
48° 20'
48° 10'
48° 00'
47° 50'
47° 40'
47° 30'
47° 20'
+ y
−y
Stauffersberg
Altomünster
Roggenburg
Aufkirchen
Bussen
Kirchheim
Mitbach
Sternwarte
München
nördl. Frauenturm
Oberhof
Asten
Württembergischer Anschluss
Kammer
Waldburg
Peissenberg
Kampenwand
Hohe Gehren
Schafberg
Änger
Wendelstein
Oesterreichischer Anschluss
Watzmann
Grünten
Rettenstein
1
1a
2
3
4
5
5a
6
6a
7
8
9
10
11
12
13
14
15
Astronomische Azimute
−x
S
M. 1:1000000
1906. Sitzungsb. d. math-phys. Kl.
Lith. Hub. Köhler, Mchn.



Über die Grundlagen der Theorie der Fakultätenreihen.

Von **Edmund Landau.**

(*Eingelaufen 3. Februar.*)

Einleitung.

Man verdankt Herrn Nielsen eine Anzahl interessanter Arbeiten über Fakultätenreihen, d. h. Reihen von der Form

$$\Omega(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!\, a_n}{x(x+1)\ldots(x+n)}, \tag{1}$$

wo $a_0, a_1, a_2, \ldots$ komplexe Konstanten sind und x eine komplexe Variable bezeichnet.[1]) Herr Nielsen hat seine Untersuchungen im dritten Teile des kürzlich erschienenen Werkes „Handbuch der Theorie der Gammafunktion“ [2]) im Zusammenhang dargestellt.

Die wichtigste Grundlage der Theorie der Fakultätenreihen besteht im folgenden

Satz I: Wenn $\Omega(x)$ für einen Wert $x = x_0$ konvergiert, so konvergiert $\Omega(x)$ für jedes $x = x_1$, welches die Ungleichheitsbedingung

$$\Re(x_1) > \Re(x_0)$$

erfüllt.

---

[1]) Eine Reihe von der Gestalt $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{x(x+1)\ldots(x+n)}$ würde dasselbe bedeuten; es ist jedoch zweckmäßig, die Schreibweise (1) anzuwenden.

[2]) Leipzig (Teubner), 1906, S. 237 ff.

Hierbei handelt es sich natürlich nur um solche Werte von x, welche von 0, -1, -2, ... verschieden sind, da sonst die Glieder der Reihe sinnlos sind.

Der Satz I läßt sich offenbar auch folgendermaßen aussprechen:

Der Konvergenzbereich einer Fakultätenreihe besteht aus einer Halbebene, welche links durch eine Parallele zur Achse des Imaginären begrenzt ist.

Mit anderen Worten: zu jeder Fakultätenreihe gehört eine bestimmte reelle Zahl λ derart, daß (abgesehen von den Punkten $0, -1, -2, \ldots$) die Reihe für $\Re(x) > \lambda$ konvergiert, für $\Re(x) < \lambda$ divergiert. Das Verhalten für $\Re(x) = \lambda$ bleibt ebenso unbestimmt wie das Verhalten einer Potenzreihe auf dem Konvergenzkreise.

Hierbei sind offenbar die beiden extremen Fälle $\lambda = \infty$ und $\lambda = -\infty$ auch möglich, in welchen der Konvergenzbereich nicht vorhanden bezw. gleich der ganzen x-Ebene ist.

Ein Beweis des wichtigen Satzes I ist zuerst von Herrn Nielsen [1]) veröffentlicht worden; derselbe stützt sich auf gewisse Integraldarstellungen der Fakultätenreihen und ist recht kompliziert. Auch erscheint mir Herrn Nielsens Beweisführung nicht einwandfrei.[2]) Ich werde die vorliegende Arbeit damit beginnen, daß ich einen direkten und sehr einfachen Beweis des Satzes I mitteilen werde. Ich benutze diese Gelegenheit, um Herrn Jensens Verdienste in dieser Frage besonders hervorzuheben. Herr Nielsen zitiert von dessen Publikationen nur eine aus dem Jahre 1891,[3]) in welcher Herr Jensen den Satz I ohne Beweis

---

[1]) „Recherches sur les séries de factorielles", Annales scientifiques de l'école normale supérieure, Ser. 3, Bd. 19, 1902, S. 416—429; „Les séries de factorielles et les opérations fondamentales", Mathematische Annalen, Bd. 59, 1904, S. 356—359; „Handbuch etc.", S. 239—245.

[2]) Schon die von ihm (l. c., S. 420, bezw. S. 357, bezw. S. 241—242) mit λ und λ' bezeichneten Zahlen sind dort so definiert, daß sie nur unter einschränkenden Annahmen über die Koeffizienten der gegebenen Fakultätenreihe existieren.

[3]) „Gammafunktionens Theori i elementær Fremstilling", Nyt Tidskrift for Mathematik, Bd. 2 B, S. 6).

ausspricht. Ich füge folgende zwei Zitate hinzu. Herr Jensen hat schon im Jahre 1881 den Satz I ohne Beweis angegeben;[1]) er hat ferner in einer sehr wichtigen Arbeit[2]) aus dem Jahre 1884 den Satz I und verschiedene Analoga für andere Reihentypen ohne Beweis ausgesprochen, und er hat dort nur für ein verwandtes Problem, nämlich die Frage nach dem Konvergenzgebiet einer Dirichletschen Reihe, den Beweis ausgeführt. Ich habe schon bei einer anderen Gelegenheit[3]) einmal die Bedeutung dieser Jensenschen Arbeit hervorgehoben und dort dessen Priorität für den Satz erwähnt, daß das Konvergenzgebiet einer Dirichletschen Reihe eine Halbebene ist. Dieser Satz war erst zehn Jahre später dadurch allgemein bekannt geworden, daß Herr Cahen[4]) ihn unabhängig wiederentdeckt hat.

Im § 1 des Folgenden werde ich auf direktem Wege außer dem Satz I die anderen bekannten Sätze beweisen, welche die Grundlage der Theorie der Fakultätenreihen bilden. Im § 2 begründe ich einen eigentümlichen Zusammenhang zwischen einer Fakultätenreihe und einer zugehörigen Dirichletschen Reihe in Bezug auf ihre gleichzeitige Konvergenz. Bei dieser Gelegenheit wird sich eine Darstellung der Abszisse λ der Grenzgeraden einer Fakultätenreihe ergeben. In § 3 dehne ich jenen Zusammenhang zweier zugehöriger Reihen auf den analytischen Charakter der durch sie definierten Funktionen aus. In § 4 beweise ich einen Satz über das Verhalten der durch eine Fakultätenreihe definierten analytischen Funktion auf der Grenzgeraden. Zu allen im vorangehenden behandelten Sätzen beweise ich kurz in § 5 die Analoga für Binomialkoeffizientenreihen, d. h. Reihen von der Form

---

[1]) Tidsskrift for Mathematik, Ser. 4, Bd. 5, S. 130, Aufgabe 451.

[2]) „Om Raekkers Konvergens“, ebenda, Ser. 5, Bd. 2, S. 70–72.

[3]) „Über die zu einem algebraischen Zahlkörper gehörige Zetafunktion und die Ausdehnung der Tschebyschefschen Primzahlentheorie auf das Problem der Verteilung der Primideale“, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 125, 1903, S. 65.

[4]) „Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann et sur des fonctions analogues“, Annales scientifiques de l'école normale supérieure, Ser. 3, Bd. 11, 1894, S. 85.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-n)}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \binom{x-1}{n};$$

Herr Nielsen, der auch über diese Reihen mehrere interessante Untersuchungen publiziert hat,[1]) war hier nicht bis zum Beweise des Analogons zum Satze I, also der Existenz der Konvergenzhalbebene, gelangt, obgleich ein solcher bereits auf ganz einfachem Wege von Herrn Bendixson[2]) geführt war. In § 6 behandle ich kurz zwei allgemeinere, schon von Herrn Jensen[3]) erwähnte Klassen von Reihen, nämlich

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{(x+\gamma_1)(x+\gamma_2)\ldots(x+\gamma_n)}$$

und

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n (x-\gamma_1)(x-\gamma_2)\ldots(x-\gamma_n), \tag{2}$$

wo $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ eine Folge positiver, monoton ins Unendliche wachsender Größen ist, für welche

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n}$$

divergiert.[4]) Für die Reihen (2) hatte bereits Herr Bendixson[5]) die von Herrn Jensen ausgesprochene Existenz der Konvergenzhalbebene, sowie die gleichmäßige Konvergenz in der Umgebung jeder Stelle dieser Halbebene bewiesen; doch ist der in § 6 des Folgenden hierfür gegebene Beweis etwas einfacher, und

---

[1]) Literatur s. „Handbuch etc.", S. 124 ff. und 225 ff.

[2]) „Sur une extension à l'infini de la formule d'interpolation de Gauss", Acta mathematica, Bd. 9, 1887, S. 15—20. Herr Nielsen schreibt mir in einer nachträglichen Note auf S. 325 seines Buches irrtümlich diesen Satz zu.

[3]) l. c. (s. S. 153, Anm. 2), S. 71—72.

[4]) Es ist nicht allgemeiner, von einer Folge reeller, monoton ins Unendliche wachsender Größen zu sprechen, für welche die über alle (mit etwaiger Ausnahme von 0) erstreckte Summe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n}$ divergiert.

[5]) l. c., S. 15—23.

ich beweise auch neue Sätze über diese Reihen. In § 7 behandle ich einige Eigenschaften der Integrale von der Gestalt

$$\int_1^\infty \psi(t)\, t^{-x}\, dt,$$

welche mit den Fakultätenreihen eng verwandt sind: diese Integrale sind schon mehrfach untersucht worden, und Herr Pincherle[1]) hat ihrer Theorie eine umfassende Darstellung gewidmet, zu welcher ich einige Bemerkungen und Zusätze mache.

§ 1.

Herr Dedekind[2]) hat folgenden Konvergenzsatz bewiesen und Herr Jensen[3]) hat ihn wiedergefunden:

Hilfssatz 1: Wenn $b_0, b_1, \ldots$ und $c_0, c_1, \ldots$ zwei Folgen komplexer Größen sind, und wenn die beiden unendlichen Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

und

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n - c_{n+1}|$$

konvergieren, so konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n c_n. \tag{3}$$

Beweis: Beide Autoren beweisen diesen Satz mit Hilfe des Abelschen Kunstgriffes der partiellen Summation folgendermaßen:

---

1) „Sur les fonctions déterminantes“, Annales scientifiques de l'école normale supérieure, Ser. 3, Bd. 22, 1905, S. 9—68.

2) Vgl. die von ihm herausgegebenen Vorlesungen Dirichlets über Zahlentheorie, 2. Aufl., 1871, S. 373. Für reelle Werte der Größen b_n, c_n war der Satz schon von du Bois-Reymond („Neue Lehrsätze über die Summen unendlicher Reihen“, Antrittsprogramm, Freiburg 1870, S. 10) bewiesen worden.

3) l. c. (s. S. 153, Anm. 2), S. 69.

Wenn

$$\sum_{n=0}^{t} b_n = B_t, \; B_{-1} = 0$$

gesetzt wird, so ergibt sich

$$\sum_{n=0}^{t} b_n c_n = \sum_{n=0}^{t} (B_n - B_{n-1}) c_n$$

$$(4) \qquad = \sum_{n=0}^{t} B_n (c_n - c_{n+1}) + B_t c_{t+1}.$$

Nach Voraussetzung konvergiert

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n - c_{n+1}|,$$

also auch

$$\sum_{n=0}^{\infty} (c_n - c_{n+1}),$$

so daß

$$\lim_{t=\infty} c_{t+1}$$

existiert; ferner existiert nach Voraussetzung

$$\lim_{t=\infty} B_t,$$

so daß insbesondere für alle n

$$|B_n| < B$$

ist, wo B eine von n unabhängige Konstante bezeichnet. Wegen

$$|B_n (c_n - c_{n+1})| \leqq B\,|c_n - c_{n+1}|$$

ist also die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n (c_n - c_{n+1})$$

konvergent; auf der rechten Seite von (4) nähern sich also beide Glieder für $t = \infty$ einem Grenzwert; damit ist die Konvergenz der Reihe (3), also der Hilfssatz 1 bewiesen.

Herr Dedekind[1]) beweist mit Hilfe der Transformationsformel (4) auch folgenden

Hilfssatz 2: Es sei erstens

$$\left| \sum_{n=0}^{t} b_n \right| = |B_t|$$

für alle $t = 0, 1, 2, \ldots$ unterhalb einer endlichen Schranke B gelegen; es sei zweitens

$$\lim_{n=\infty} c_n = 0,$$

und es sei drittens die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n - c_{n+1}|$$

konvergent. Dann konvergiert die Reihe

$$(3) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} b_n c_n.$$

Beweis: Wie oben ergibt sich wegen

$$|B_n (c_n - c_{n+1})| \leq B |c_n - c_{n+1}|,$$

daß das erste Glied auf der rechten Seite von (4) sich für $t = \infty$ einem Grenzwerte nähert, und wegen der beiden ersten Voraussetzungen ist

$$\lim_{t=\infty} B_t c_{t+1} = 0,$$

so daß aus (4) die Konvergenz der Reihe (3) folgt.

Jeder der beiden Hilfssätze 1 und 2 führt nun leicht zum

Satz I:[2]) Wenn eine Fakultätenreihe

$$(1) \qquad \Omega(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!\, a_n}{x(x+1)\ldots(x+n)}$$

---

[1]) l. c., S. 371. Für Reihen mit reellen Gliedern ist der Hilfssatz 2 auch schon von du Bois-Reymond (l. c., S. 10) bewiesen worden.

[2]) S. S. 151; x_0 und x_1 sollen weder Null noch ganzzahlig negativ sein.

für $x = x_0$ konvergiert und wenn

$$\Re(x_1) > \Re(x_0)$$

ist, so konvergiert die Reihe für $x = x_1$.

Wenn man den Beweis auf Grund des Hilfssatzes 2 führt — was hier geschehen soll —, so braucht man nicht die Konvergenz von $\Omega(x_0)$ vorauszusetzen; sondern es genügt, anzunehmen, daß für alle $t = 0, 1, 2, \ldots$

$$\left| \sum_{n=0}^{t} \frac{n!\, a_n}{x_0(x_0+1)\ldots(x_0+n)} \right| < B$$

ist.

Beweis: Es werde

$$b_n = \frac{n!\, a_n}{x_0(x_0+1)\ldots(x_0+n)}, \quad c_n = \frac{x_0(x_0+1)\ldots(x_0+n)}{x_1(x_1+1)\ldots(x_1+n)}$$

gesetzt. Dann ist nach Voraussetzung für alle t

$$\left| \sum_{n=0}^{t} b_n \right| < B.$$

Ferner ist

$$c_n - c_{n+1} = \frac{x_0(x_0+1)\ldots(x_0+n)}{x_1(x_1+1)\ldots(x_1+n)} - \frac{x_0(x_0+1)\ldots(x_0+n+1)}{x_1(x_1+1)\ldots(x_1+n+1)}$$

$$= \frac{x_0(x_0+1)\ldots(x_0+n)}{x_1(x_1+1)\ldots(x_1+n)} \left(1 - \frac{x_0+n+1}{x_1+n+1}\right)$$

$$(5) \qquad = \frac{x_0(x_0+1)\ldots(x_0+n)}{x_1(x_1+1)\ldots(x_1+n)} \, \frac{x_1 - x_0}{x_1+n+1}.$$

Bekanntlich ist für jedes von $0, -1, -2, \ldots$ verschiedene x

$$(6) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{n!}{x(x+1)\ldots(x+n)}\, n^x = \Gamma(x)$$

eine endliche, von Null verschiedene Zahl; also erhält man, indem man die Gleichung (6) für x_0 und x_1 ansetzt und dividiert,

$$\lim_{n=\infty} \frac{x_0(x_0+1)\ldots(x_0+n)}{x_1(x_1+1)\ldots(x_1+n)} n^{x_1-x_0} = \frac{\Gamma(x_1)}{\Gamma(x_0)},$$

$$(7) \qquad \lim_{n=\infty} \left| \frac{x_0(x_0+1)\ldots(x_0+n)}{x_1(x_1+1)\ldots(x_1+n)} \right| n^{\Re(x_1-x_0)} = \left| \frac{\Gamma(x_1)}{\Gamma(x_0)} \right|.$$

Aus (7) folgt zunächst wegen $\Re(x_1 - x_0) > 0$, daß

$$\lim_{n=\infty} |c_n| = 0,$$

$$\lim_{n=\infty} c_n = 0$$

ist, womit die zweite Voraussetzung des Hilfssatzes 2 erfüllt ist. Ferner folgt aus (5) und (7), daß

$$\lim_{n=\infty} |c_n - c_{n+1}| n^{1+\Re(x_1-x_0)} = \left| \frac{\Gamma(x_1)}{\Gamma(x_0)} \right| |x_1 - x_0|$$

ist, also von einer gewissen Stelle an

$$|c_n - c_{n+1}| < 2 \left| \frac{\Gamma(x_1)}{\Gamma(x_0)} \right| |x_1 - x_0| \frac{1}{n^{1+\Re(x_1-x_0)}};$$

hieraus ergiebt sich die Konvergenz von

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n - c_{n+1}|,$$

so daß auch die dritte Voraussetzung des Hilfssatzes 2 erfüllt ist. Derselbe liefert also die Konvergenz von

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n c_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!\, a_n}{x_1(x_1+1)\ldots(x_1+n)} = \Omega(x_1)$$

und damit den Satz I.

Aus Satz I folgt, wie schon in der Einleitung angegeben, die von Herrn Jensen entdeckte Tatsache:

Wenn eine Fakultätenreihe gegeben ist, so sind nur folgende drei Fälle möglich:[1])

---

[1]) Hierbei ist nur von den Zahlen die Rede, welche von $0, -1, -2, \ldots$ verschieden sind.

1. Sie konvergiert überall.

2. Sie konvergiert nirgends.

3. Es gibt eine reelle Zahl λ, so daß die Reihe für $\Re(x) > \lambda$ konvergiert, für $\Re(x) < \lambda$ divergiert.

Was das Verhalten der Reihe auf der „Grenzgeraden" oder „Konvergenzgeraden" $\Re(x) = \lambda$ betrifft, so gibt es Reihen, welche dort überall konvergieren, solche, die dort nirgends und solche, die weder nirgends, noch überall auf dieser Geraden konvergieren. Beispiele dieser Möglichkeiten werden weiter unten [1]) angegeben werden.

Hilfssatz 3:[2]) Es seien $b_0, b_1, \ldots$ Konstanten, $c_0, c_1, \ldots$ Funktionen einer komplexen Variabeln x, welche in einem gewissen Gebiete $\mathfrak{G}$ regulär sind; es sei erstens für alle $t = 0, 1, 2 \ldots$

$$\left|\sum_{n=1}^{t} b_n\right| = |B_t| < B;$$

zweitens konvergiere in $\mathfrak{G}$ c_n gleichmäßig gegen 0; drittens sei in $\mathfrak{G}$ die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n - c_{n+1}|$$

gleichmäßig konvergent. Dann ist die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n c_n$$

gleichmäßig in $\mathfrak{G}$ konvergent.

Beweis: Aus der Gleichung

$$\sum_{n=0}^{t} b_n c_n = \sum_{n=0}^{t} B_n (c_n - c_{n+1}) + B_t c_{t+1} \tag{4}$$

---

[1]) S. S. 172–173.

[2]) Dieser Hilfssatz ist von Herrn Cahen auf S. 79 seiner oben (auf S. 153, Anm. 4) zitierten Arbeit bewiesen worden. Herr Cahen stützt auf ihn den Nachweis seines Satzes, daß eine Dirichletsche Reihe in ihrem Konvergenzbereiche eine analytische Funktion darstellt.

folgt wegen

$$|B_n(c_n - c_{n+1})| \leq B\,|c_n - c_{n+1}|,$$
$$|B_t c_{t+1}| \leq B\,|c_{t+1}|$$

ohne weiteres die Richtigkeit der Behauptung.

Satz II: Eine Fakultätenreihe ist in einer gewissen Umgebung jeder (von 0, — 1, — 2, ... verschiedenen) Stelle im Innern ihrer Konvergenzhalbebene gleichmäßig konvergent.

Es genügt offenbar zu beweisen: wenn $\Omega(x)$ für x_0 konvergiert, so konvergiert $\Omega(x)$ gleichmäßig für alle $x = u + vi$, welche die Ungleichungen erfüllen

$$x_0 + \gamma_1 \leq u \leq x_0 + \gamma_2, \quad -\gamma_3 \leq v \leq \gamma_3,$$

wo $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ drei positive Größen bezeichnen ($\gamma_1 < \gamma_2$), die so klein gewählt sind, daß das obige Rechteck keinen der Punkte 0, — 1, — 2, ... im Innern oder auf dem Rande enthält. In der Tat läßt sich jede (von 0, — 1, ... verschiedene) Stelle der Konvergenzhalbebene in ein solches Rechteck $\mathfrak{S}$ einschließen.

Beweis: Es werde

$$b_n = \frac{n!\,a_n}{x_0(x_0+1)\ldots(x_0+n)}, \quad c_n = \frac{x_0(x_0+1)\ldots(x_0+n)}{x\,(x+1)\ldots(x+n)}$$

gesetzt. Dann handelt es sich auf Grund des Hilfssatzes 3 lediglich darum, nachzuweisen, daß in $\mathfrak{S}$ gleichmäßig

$$\lim_{n=\infty} c_n = 0$$

ist, und daß die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n - c_{n+1}|$$

in $\mathfrak{S}$ gleichmäßig konvergiert.

Wenn eine ganze Zahl γ oberhalb der drei Zahlen $|x_0|$, $|x_0 + \gamma_1| + \gamma_3$ und $|x_0 + \gamma_2| + \gamma_3$ gewählt wird, so ist in $\mathfrak{S}$ überall

$$|x| = |u + vi| \leq |u| + |v| < \gamma,$$

ebenso

$$|x_0| < \gamma.$$

Es sei ferner β so gewählt, daß in $\mathfrak{G}$

$$(8) \qquad \left|\prod_{\nu=0}^{2\gamma} \frac{x_0+\nu}{x+\nu}\right| < \beta$$

ist. Da für $|y| \leq \frac{1}{2}$

$$1 + y = e^{y+\vartheta|y|^2} \quad (|\vartheta| \leq 1)$$

ist,[1]) erhält man für $\nu > 2\gamma$ und alle x in $\mathfrak{G}$

$$\frac{x_0+\nu}{x+\nu} = \frac{1+\frac{x_0}{\nu}}{1+\frac{x}{\nu}} = e^{\frac{x_0}{\nu}+\vartheta_1\frac{|x_0|^2}{\nu^2}-\frac{x}{\nu}-\vartheta_2\frac{|x|^2}{\nu^2}},^{2)}$$

$$\left|\frac{x_0+\nu}{x+\nu}\right| \leq e^{-\frac{\Re(x-x_0)}{\nu}+\frac{2\gamma^2}{\nu^2}} < e^{-\frac{\gamma_1}{\nu}+\frac{2\gamma^2}{\nu^2}},$$

also für $n > 2\gamma$ und alle x in $\mathfrak{G}$

$$(9) \qquad \left|\prod_{\nu=2\gamma+1}^{n} \frac{x_0+\nu}{x+\nu}\right| < e^{-\gamma_1\sum\limits_{\nu=2\gamma+1}^{n}\frac{1}{\nu}+2\gamma^2\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^2}}.$$

Aus (8) und (9) folgt, daß für alle n von einer gewissen Stelle an und alle x in $\mathfrak{G}$

$$(10) \qquad |c_n| = \left|\prod_{\nu=0}^{n} \frac{x_0+\nu}{x+\nu}\right| < e^{-\frac{\gamma_1}{2}\log n} = \frac{1}{n^{\frac{\gamma_1}{2}}}$$

ist. Dies liefert zunächst, daß in $\mathfrak{G}$ gleichmäßig

$$\lim_{n=\infty} c_n = 0$$

ist. In Verbindung mit der Identität

$$c_n - c_{n+1} = c_n \frac{x-x_0}{x+n+1}$$

ergibt sich ferner aus (10), daß für alle n von einer gewissen Stelle an und alle x in $\mathfrak{G}$

---

1) Denn $|-y+\log(1+y)| = \left|-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}-\frac{y^4}{4}+\dots\right|$ $\leq \frac{|y|^2}{2}+\frac{|y|^3}{2}+\frac{|y|^4}{2}+\dots = \frac{|y|^2}{2(1-|y|)} \leq |y|^2.$

2) Hierin ist $|\vartheta_1| \leq 1$, $|\vartheta_2| \leq 1$.

$$|c_n - c_{n+1}| < \frac{1}{n^{\frac{\gamma_1}{2}}} \frac{2\gamma}{\frac{n}{2}} = \frac{4\gamma}{n^{1+\frac{\gamma_1}{2}}}$$

ist, so daß die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n - c_{n+1}|$$

in $\mathfrak{G}$ gleichmäßig konvergiert. Damit ist der Satz II bewiesen.

Nun besagt ein bekannter Satz von Weierstraß:[1]) Wenn $f_1(x), f_2(x), \ldots$ analytische Funktionen sind, welche in einem zusammenhängenden Gebiete $\mathfrak{G}$ der x-Ebene regulär sind, und wenn die unendliche Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

in einer gewissen Umgebung jeder Stelle von $\mathfrak{G}$ gleichmäßig konvergiert, so stellt diese Reihe in $\mathfrak{G}$ eine analytische Funktion $f(x)$ dar; ferner ist die durch k-maliges gliedweises Differentiieren ($k = 1, 2, \ldots$) gebildete Reihe

[1]) „Zur Funktionenlehre", Monatsberichte der Kgl. Pr. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1880, S. 723—726; Abhandlungen zur Funktionenlehre, 1886, S. 73—78; Werke, Bd. 2, 1895, S. 205—209. Herr Morera folgerte im Jahre 1886 („Un teorema fondamentale nella teorica delle funzioni di una variabile complessa", Rendiconti del R. Istituto Lombardo, Ser. 2. Bd. 19, S. 306 und „Sulla rappresentazione delle funzioni di una variabile complessa per mezzo di espressioni analitiche infinite", Atti della R. Accademia delle scienze di Torino, Bd. 21, S. 894 bis 897) diesen Satz aus der von ihm entdeckten Umkehrung des Cauchyschen Integralsatzes. Herr Painlevé führte im Jahre 1887 („Sur les ligues singulières des fonctions analytiques", Annales de la faculté des sciences de Toulouse, Bd. 2, S. 11—12) den Nachweis des Weierstraßschen Satzes mit Hilfe des Cauchyschen Satzes. Es ist jedenfalls überflüssig daß Herr Cahen (l. c., S. 85—86) in der Theorie der Dirichletschen Reihen nach dem Beweise der gleichmäßigen Konvergenz in einer Umgebung jeder Stelle der Konvergenzhalbebene noch besonders beweist, daß die durch gliedweises Differentiieren entstehenden Reihen konvergieren. Weierstraß, Herr Morera und Herr Painlevé bemerken übrigens auch, daß die Reihe (11) in einer gewissen Umgebung jeder Stelle des gegebenen Gebietes gleichmäßig konvergiert.

$$(11) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(x)$$

in $\mathfrak{G}$ konvergent und $= f^{(k)}(x)$.

Aus diesem Satz folgt in Verbindung mit Satz II der

Satz III. Eine Fakultätenreihe stellt in ihrer Konvergenzhalbebene eine mit eventueller Ausnahme der Punkte $0, -1, -2, \ldots$ reguläre analytische Funktion dar und darf dort beliebig oft gliedweise differentiiert werden.

Die in der Konvergenzhalbebene gelegenen Punkte $0, -1, -2, \ldots$ sind, wie leicht einzusehen ist, Pole erster Ordnung oder reguläre Stellen. Denn, wenn $x = -m$ $(m \geq 0)$ ein solcher Wert ist, so ist

$$(12) \quad x(x+1)\ldots(x+m)\left(\Omega(x) - \sum_{n=0}^{m} \frac{n!\,a_n}{x(x+1)\ldots(x+n)}\right)$$
$$= \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{n!\,a_n}{(x+m+1)(x+m+2)\ldots(x+n)},$$

falls

$$n - m - 1 = k,\ x + m + 1 = y,\ n!\,a_n = k!\,b_k$$

gesetzt wird, von neuem eine Fakultätenreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!\,b_k}{y(y+1)\ldots(y+k)},$$

stellt also eine für $y = 1$ reguläre analytische Funktion dar, so daß nach (12) $(x+m)\,\Omega(x)$ für $x = -m$ regulär ist.

In ihrer Konvergenzhalbebene braucht eine Fakultätenreihe nicht absolut zu konvergieren. Es gilt der von Herrn Nielsen[1]) bereits auf dem natürlichsten Wege bewiesene

Satz IV. Das Gebiet der absoluten Konvergenz einer Fakultätenreihe ist — falls die Reihe weder überall noch nirgends absolut konvergiert — eine Halbebene, welche links durch eine Gerade $\Re(x) = \mu$ be-

---

[1]) „Recherches etc.", S. 415; „Handbuch etc.", S. 238.

grenzt ist, mit oder ohne Einschluß der ganzen Geraden $\Re(x) = \mu$ selbst.

Die Menge der Punkte, in welchen $\Omega(x)$ absolut konvergiert, hat also die Form $\Re(x) > \mu$ oder $\Re(x) \geqq \mu$.[1])

Beweis: Es braucht nur gezeigt zu werden, daß aus der Konvergenz von

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! \, |a_n|}{|x_0| \, |x_0+1| \ldots |x_0+n|}$$

die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! \, |a_n|}{|x_1| \, |x_1+1| \ldots |x_1+n|}$$

folgt, falls

$$\Re(x_1) \geqq \Re(x_0)$$

ist. Dies ist eine unmittelbare Folge der Gleichung

$$\lim_{n=\infty} \left| \frac{x_0(x_0+1)\ldots(x_0+n)}{x_1(x_1+1)\ldots(x_1+n)} \right| n^{\Re(x_1-x_0)} = \left| \frac{\Gamma(x_1)}{\Gamma(x_0)} \right| \tag{7}$$

und des bekannten Satzes: Wenn

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

absolut konvergiert und

$$\lim_{n=\infty} c_n$$

existiert,[2]) so konvergiert

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n c_n.$$

In der Tat ergibt sich für

$$b_n = \frac{n! \, |a_n|}{|x_0| \, |x_0+1| \ldots |x_0+n|}, \quad c_n = \left| \frac{x_0(x_0+1)\ldots(x_0+n)}{x_1(x_1+1)\ldots(x_1+n)} \right|$$

nach (7), daß

$$\lim_{n=\infty} c_n = \begin{cases} \left| \dfrac{\Gamma(x_1)}{\Gamma(x_0)} \right| & \text{für } \Re(x_1) = \Re(x_0) \\ 0 & \text{für } \Re(x_1) > \Re(x_0) \end{cases}$$

ist.

---

[1]) Hierbei sind natürlich die Punkte 0, — 1, — 2, ... auszuschließen.

[2]) Es genügt, daß alle $|c_n| < c$ sind.

Für jede Fakultätenreihe gibt es also, wenn man die beiden Sätze I und IV zusammennimmt, zwei charakteristische Zahlen λ und μ derart, daß $\lambda < \mu$ ist und (abgesehen von den Punkten $0, -1, -2, \ldots$) die Reihe

für $\Re(x) < \lambda$ divergiert,
für $\lambda < \Re(x) < \mu$ bedingt konvergiert,
für $\Re(x) > \mu$ absolut konvergiert.

Hierbei kann es sich allerdings ereignen, daß $\lambda = \mu$ ist, also der Streifen bedingter Konvergenz nicht vorhanden ist; ferner müssen für die Zahlen λ und μ auch die extremen Werte $-\infty$ und $+\infty$ zugelassen werden.

Es gilt noch der von Herrn Nielsen[1]) bewiesene

Satz V: Wenn eine Fakultätenreihe für x_0 konvergiert und $\Re(x_1) > \Re(x_0) + 1$ ist, so ist die Reihe für x_1 absolut konvergent.

Hierbei wird x_1 von $0, -1, \ldots$ verschieden angenommen. Aus diesem Satz folgt, daß für endliche λ, μ stets

$$\lambda \leq \mu \leq \lambda + 1$$

ist, ferner, daß für $\lambda = -\infty$ auch $\mu = -\infty$ ist und daß für $\mu = +\infty$ auch $\lambda = +\infty$ ist.

Beweis: Wie Herr Nielsen wohl bemerkt hat, folgt die Behauptung, auch wenn man an Stelle der Konvergenz von $\Omega(x_0)$ nur voraussetzt, daß für alle n

$$\left| \frac{n!\, a_n}{x_0(x_0+1)\ldots(x_0+n)} \right| < A \tag{13}$$

ist, unmittelbar aus (7); denn alle Glieder von

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!\, |a_n|}{x_1(x_1+1)\ldots(x_1+n)}$$

liegen nach (7) und (13) von einem gewissen n an unterhalb

[1]) „Recherches etc.", S. 415; „Les séries etc.", S. 358; „Handbuch etc.", S. 238.

$$2A\left|\frac{\Gamma(x_1)}{\Gamma(x_0)}\right|\frac{1}{n^{\Re(x_1)-\Re(x_0)}}.$$

Herr Nielsen hat nicht entschieden, ob die Differenz $\mu-\lambda$ wirklich zwischen 0 und 1 (mit Ausschluß der Grenzen) gelegen sein kann. Auf Grund der Betrachtungen von § 2 wird es leicht[1]) sein, diese Frage — durch Konstruktion eines passenden Beispiels — in bejahendem Sinne zu beantworten.

§ 2.

Das Konvergenzgebiet einer Fakultätenreihe

$$(1)\qquad \Omega(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!\,a_n}{x(x+1)\ldots(x+n)}$$

ist nach Satz I in demselben Sinne eine Halbebene wie das einer Dirichletschen Reihe

$$(14)\qquad \Psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}$$

oder einer allgemeineren Dirichletschen Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\,e^{-\gamma_n x}$$

(wo $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ eine monoton ins Unendliche wachsende Folge reeller Größen bezeichnen) auf Grund des von Herrn Jensen[2]) gegebenen Beweises.

Wenn man zu einer gegebenen Fakultätenreihe (1) die zugehörige Dirichletsche Reihe (14) mit denselben Koeffizienten $a_n\ (n\geqq 1)$ betrachtet, so gilt der merkwürdige

Satz VI: Die Konvergenzhalbebenen der beiden Reihen $\Omega(x)$ und $\Psi(x)$ stimmen überein, und, was noch mehr besagt,[3]) für jedes (von $0, -1, \ldots$ verschiedene)

---

[1]) S. S. 171, Nr. 3.

[2]) l. c., S. 70.

[3]) Es ist nämlich nicht nur die charakteristische Zahl λ für beide Reihen dieselbe, sondern es konvergieren bezw. divergieren auch in jedem Punkt der Geraden $\Re(x)=\lambda$ beide Reihen gleichzeitig.

x konvergieren beide Reihen oder divergieren beide Reihen gleichzeitig.

Beweis: 1. Es sei x eine (von 0, $-1, \ldots$ verschiedene) Zahl, für welche $\Psi(x)$ konvergiert, und es werde für $n \geqq 1$

$$b_n = \frac{a_n}{n^x}, \quad c_n = \frac{n!\, n^x}{x(x+1)\ldots(x+n)}$$

gesetzt; ich behaupte, daß die Voraussetzungen des Hilfssatzes 1 erfüllt sind, d. h. daß

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n - c_{n+1}|$$

konvergiert. Es ist

$$c_n - c_{n+1} = \frac{n!\, n^x}{x(x+1)\ldots(x+n)} - \frac{(n+1)!\,(n+1)^x}{x(x+1)\ldots(x+n+1)}$$

$$= \frac{n!\, n^x}{x(x+1)\ldots(x+n)} \left(1 - \frac{(n+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}{x+n+1}\right).$$

Da nach (6)

$$(15) \qquad \lim_{n=\infty} |c_n| = \lim_{n=\infty} \left|\frac{n!\, n^x}{x(x+1)\ldots(x+n)}\right| = |\Gamma(x)|$$

ist, so genügt es, zu zeigen, daß

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| 1 - \frac{(n+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}{x+n+1} \right|$$

konvergiert. Dies folgt tatsächlich daraus, daß für alle n, welche > 1 und $> |x+1|$ sind,

$$1 - \frac{(n+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}{x+n+1} = 1 - \frac{1}{1+\frac{x+1}{n}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{x+1}$$

$$= 1 - \left(1 - \frac{x+1}{n} + \frac{\alpha_2}{n^2} + \ldots\right)\left(1 + \frac{x+1}{n} + \frac{\beta_2}{n^2} + \ldots\right)$$

$$= \frac{\gamma_2}{n^2} + \frac{\gamma_3}{n^3} + \ldots$$

ist, also für alle $n \geqq 1$

$$\left| 1 - \frac{(n+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}{x+n+1} \right| < \frac{\gamma}{n^2},$$

wo γ eine von n unabhängige Größe bezeichnet. Nach dem Hilfssatz 1 ist also die Reihe

$$\frac{a_0}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n c_n = \Omega(x)$$

konvergent.

2. Es sei $\Omega(x)$ konvergent und es werde für $n \geqq 1$

$$\bar{b}_n = \frac{n!\, a_n}{x(x+1)\ldots(x+n)}, \quad \bar{c}_n = \frac{x(x+1)\ldots(x+n)}{n!\, n^x}$$

gesetzt. Dann ist

$$\bar{c}_n - \bar{c}_{n+1} = \frac{1}{c_n} - \frac{1}{c_{n+1}} = -\frac{1}{c_n\, c_{n+1}}(c_n - c_{n+1}),$$

so daß wegen (15) auch

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\bar{c}_n - \bar{c}_{n+1}|$$

konvergiert, da die Konvergenz von

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n - c_{n+1}|$$

soeben gezeigt wurde. Daher ist nach dem Hilfssatz 1 die Dirichletsche Reihe

$$\Psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{b}_n \bar{c}_n$$

konvergent.

Der bewiesene Satz VI scheint bei oberflächlicher Betrachtung schon von Herrn Kluyver[1]) ausgesprochen zu sein. Wie

[1]) „Over de ontwikkeling van eene functie in eene faculteitenreeks“, Nieuw archief voor wiskunde, Ser. 2, Bd. 4, 1899, S. 74.

indessen aus Herrn Kluyvers Begründung hervorgeht, meint er nur den leichter beweisbaren

Satz VII: Die Punkte absoluter Konvergenz sind für die beiden Reihen

(1) $$\Omega(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!\, a_n}{x(x+1)\ldots(x+n)}$$

und

(14) $$\Psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$$

dieselben.

Beweis: Dies folgt ohne weiteres aus

(6) $$\lim_{n=\infty} \frac{n!}{x(x+1)\ldots(x+n)}\, n^x = \Gamma(x)$$

nach dem auf S. 165 angewendeten bekannten Konvergenzsatz.

Für Fakultätenreihen wie für Dirichletsche Reihen[1]) hat man zur Bestimmung der Konvergenzhalbebene nur die Grenzstelle der Konvergenz für reelle x zu bestimmen; da dies bei dem einfacheren Bau der Dirichletschen Reihen oft für diese leichter ist, sind die Sätze VI und VII von großem Nutzen für die Konstruktion spezieller Fakultätenreihen mit vorgeschriebenen Konvergenzeigenschaften.

Folgende Beispiele veranschaulichen die schon in § 1[2]) für λ und μ unterschiedenen Fälle und zeigen, daß jeder derselben vorkommen kann.

---

[1]) Der Jensensche Satz von der Existenz der Konvergenzhalbebene einer Dirichletschen Reihe $\Psi(x)$ folgt natürlich seinerseits aus den Sätzen I und VI. Aber sein direkter Beweis ist ganz einfach und beruht bloß auf dem Hilfssatz 1 und der für $\Re(x) > 0$ gültigen Ungleichung

$$\left|\frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x}\right| = \left| x \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^{x+1}} \right| \leq \frac{|x|}{n^{\Re(x)+1}}$$

oder statt dieser, was auch ausreicht, auf der Ungleichung

$$\left|\frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x}\right| = \frac{1}{n^{\Re(x)}} \left| 1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-x} \right| = \frac{1}{n^{\Re(x)}} \left| \frac{x}{n} + \frac{a_2}{n^2} + \cdots \right| < \frac{a}{n^{\Re(x)+1}}.$$

[2]) S. S. 166.

1. Es ist $\lambda = -\infty$, $\mu = -\infty$ für $a_n = \frac{1}{n!}$. In der Tat ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!\, n^x}$$

für jedes reelle x absolut konvergent.

2. Es ist λ endlich und $\mu = \lambda$ für $a_n = 1$.[1] In der Tat ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

für $x \leq 1$ divergent, für $x > 1$ absolut konvergent, so daß $\lambda = 1$, $\mu = 1$ ist.

3. Es ist λ endlich und $\lambda < \mu < \lambda + 1$ für die Fakultätenreihe, deren Koeffizienten folgendermaßen definiert sind:

für ungerade nichtquadratische n ist $a_n = 1$,
für gerade nichtquadratische n ist $a_n = -1$,
für ungerade quadratische n ist $a_n = 2$,
für gerade quadratische n ist $a_n = 0$.

In der Tat ist erstens die Reihe

$$(16)\quad 1 - \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} - \frac{1}{4^x} + \frac{1}{5^x} - \frac{1}{6^x} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$$

für $x < 0$ divergent, für $0 < x \leq 1$ bedingt konvergent, für $x > 1$ absolut konvergent; zweitens ist die Reihe

$$1 + \frac{1}{4^x} + \frac{1}{9^x} + \frac{1}{16^x} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2x}}$$

für $x < \frac{1}{2}$ divergent, für $x > \frac{1}{2}$ absolut konvergent. Die durch Addition beider Reihen entstehende Reihe

$$2 - \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{5^x} - \frac{1}{6^x} + \frac{1}{7^x} - \frac{1}{8^x} + \frac{2}{9^x} - \frac{1}{10^x} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$$

ist daher für $x \leq \frac{1}{2}$ divergent, für $\frac{1}{2} < x \leq 1$ bedingt kon-

[1]) Für Reihen mit positiven Koeffizienten ist natürlich stets $\mu = \lambda$.

vergent und für $x > 1$ absolut konvergent, so daß $\lambda = \frac{1}{2}$, $\mu = 1$, also $\mu = \lambda + \frac{1}{2}$ ist.

4. Es ist λ endlich und $\mu = \lambda + 1$ für $a_n = (-1)^{n+1}$; denn für die Reihe (16) ist $\lambda = 0$, $\mu = 1$.

5. Es ist $\lambda = \infty$, $\mu = \infty$ für $a_n = n!$ In der Tat ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^x}$$

für jedes reelle x divergent.

Folgende Beispiele zeigen unter Anwendung des Satzes VI, daß für das Verhalten einer Fakultätenreihe auf der Grenzgeraden die verschiedenen denkbaren Fälle [1]) möglich sind.

1. $\Omega(x)$ konvergiert in keinem Punkte der Grenzgeraden für $a_n = 1$. In der Tat ist bekanntlich [2])

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+vi}}$$

für jedes reelle v divergent.

2. $\Omega(x)$ konvergiert in allen Punkten der Grenzgeraden für

$$a_n = \frac{1}{\log^2 n} \quad (n \geq 2).$$

In der Tat ist die Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^x \log^2 n}$$

für $x < 1$ divergent, für $x = 1 + vi$ (absolut) konvergent.

3. $\Omega(x)$ konvergiert weder in allen Punkten der Grenzgeraden noch in keinem Punkte derselben, falls

---

[1]) S. S. 160.

[2]) Literatur s. in meiner Arbeit „über die zu einem algebraischen Zahlkörper etc.“, S. 105—107.

$a_n = 1$ für Primzahlen,
$a_n = 0$ für zusammengesetzte n

ist. In der Tat ist die über alle Primzahlen (in wachsender Reihenfolge) erstreckte Reihe

$$\sum_p \frac{1}{p^{1+vi}}$$

bekanntlich[1]) für $v = 0$ divergent, für alle anderen reellen v konvergent. Es gibt natürlich einfachere Beispiele; ich wählte das vorliegende, da es an sich von Interesse erscheint: zu den nicht zahlreichen, mit der Verteilung der Primzahlen zusammenhängenden Reihen, deren bedingte Konvergenz man beweisen kann, gehört nämlich jetzt z. B. die Reihe

$$\Omega(1+i) = \frac{2!}{(1+i)(2+i)(3+i)} + \frac{3!}{(1+i)(2+i)(3+i)(4+i)}$$
$$+ \frac{5!}{(1+i)\ldots(6+i)} + \cdots + \frac{p!}{(1+i)\ldots(p+1+i)} + \cdots$$

Das folgende Beispiel zeigt endlich, daß — im Gegensatz zu einer früher von Herrn Nielsen[2]) gemachten Bemerkung — aus der Konvergenz einer Fakultätenreihe für $x_0 = u_0 + v_0 i$ nicht die absolute Konvergenz in allen Punkten folgt, deren Abstand von der Geraden $\Re(x) = u_0$ „nicht kleiner als 1" ist. Die Dirichletsche Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^x \log n}$$

ist für $x = 1$ konvergent und konvergiert trotzdem für $x = 2$ nur bedingt, nicht absolut. Absolute Konvergenz ist also — durch

---

[1]) Literatur s. ebenda, S. 108—109.

[2]) „Recherches etc.", S. 429; in seiner Arbeit „sur la multiplication de deux séries de factorielles" (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, Ser. 5, Bd. 13_1, 1904, S. 71) spricht Herr Nielsen gleichfalls noch (mit vermeintlichem Beweis) den Satz aus: „Wenn $\Omega(x)$ konvergiert, so konvergiert $\Omega(x+1)$ absolut."

den Satz V — nur für $\Re(x-x_0)>1$, nicht für $\Re(x-x_0)\geqq 1$ gesichert.

Die durch Satz VI gelieferte Beziehung zwischen einer Fakultätenreihe und der zugehörigen Dirichletschen Reihe gestattet, die Abszisse λ der Grenzgeraden einer Fakultätenreihe (und damit auch die Abszisse μ der Grenzgeraden ihrer absoluten Konvergenz) in ähnlicher Weise mit Hilfe eines limes superior in geschlossener Form durch die Koeffizienten auszudrücken, wie Cauchy und Herr Hadamard es für Potenzreihen getan haben. Diese Darstellung folgt unmittelbar aus dem von Herrn Cahen[1]) bewiesenen Satz:

Wenn die Abszisse λ der Grenzgeraden einer Dirichletschen Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x} \tag{17}$$

$\geqq 0$ ist,[2]) so ist

$$\lambda=\limsup_{t=\infty}\frac{\log\left|\sum_{n=1}^{t}a_n\right|}{\log t}. \tag{18}$$

Folgendes ist der Cahensche Beweis der wichtigen Formel (18)[3]) in unwesentlich abgeänderter Gestalt.

1. Es ist nachzuweisen: wenn $\varkappa$ den Ausdruck auf der rechten Seite von (18) bezeichnet, wenn $\varkappa$ endlich und $\delta>0$ ist, so ist die Reihe (17) für $x=\varkappa+\delta$ konvergent. Es werde

---

[1]) l. c., S. 89 und 102.

[2]) Durch eine lineare Transformation der Variablen $x=x'-c$ läßt sich dies stets erreichen, falls die Grenzgerade überhaupt im Endlichen gelegen ist.

[3]) Für die allgemeineren Dirichletschen Reihen $\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{-\gamma_n x}$ beweist Herr Cahen (für $\lambda>0$) analog die Formel

$$\lambda=\limsup_{t=\infty}\frac{\log\left|\sum_{n=1}^{t}a_n\right|}{\gamma_t}.$$

$$\sum_{n=1}^{t} a_n = A_t$$

gesetzt. Dann ist wegen

$$\limsup_{t=\infty} \frac{\log |A_t|}{\log t} = \varkappa$$

von einer gewissen Stelle an

$$\frac{\log |A_t|}{\log t} < \varkappa + \frac{\delta}{2},$$

$$|A_t| < t^{\varkappa + \frac{\delta}{2}};$$

also ist wegen

$$\sum_{n=\varrho}^{\sigma} \frac{a_n}{n^x} = \sum_{n=\varrho}^{\sigma} \frac{A_n - A_{n-1}}{n^x}$$

$$= \sum_{n=\varrho}^{\sigma} A_n \left(\frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x}\right) - \frac{A_{\varrho-1}}{\varrho^x} + \frac{A_\sigma}{(\sigma+1)^x}$$

für $x = \varkappa + \delta$

$$\left| \sum_{n=\varrho}^{\sigma} \frac{a_n}{n^{\varkappa+\delta}} \right| < \sum_{n=\varrho}^{\sigma} n^{\varkappa+\frac{\delta}{2}} \frac{a}{n^{1+\varkappa+\delta}} + \frac{a(\varrho-1)^{\varkappa+\frac{\delta}{2}}}{\varrho^{\varkappa+\delta}} + \frac{a \cdot \sigma^{\varkappa+\frac{\delta}{2}}}{(\sigma+1)^{\varkappa+\delta}},$$

wo a von ϱ und σ unabhängig ist: hierin hat wegen der Konvergenz von

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{\delta}{2}}}$$

die rechte Seite für $\varrho = \infty$, $\sigma = \infty$ den Grenzwert 0, so daß, wie behauptet, die Reihe (17) für $x = \varkappa + \delta$ konvergiert.

2. Es ist zu zeigen: wenn die Reihe (17) für ein reelles $x > 0$ konvergiert und $\delta > 0$ ist, so ist von einer gewissen Stelle an

$$\frac{\log |A_t|}{\log t} < x + \delta,$$

d. h.

$$|A_t| < t^{x+\delta}.$$

In der Tat ist, falls

$$\sum_{n=1}^{t} \frac{a_n}{n^x} = B_t, \; B_{-1} = 0$$

gesetzt wird,

$$A_t = \sum_{n=1}^{t} \frac{a_n}{n^x} n^x = \sum_{n=1}^{t} (B_n - B_{n-1}) \, n^x$$
$$= \sum_{n=1}^{t} B_n (n^x - (n+1)^x) + B_t (t+1)^x,$$

also, da $|B_t|$ für alle t unterhalb einer Schranke B gelegen ist,

$$|A_t| < B \sum_{n=1}^{t} ((n+1)^x - n^x) + B(t+1)^x < 2\,B\,(t+1)^x,$$

also von einer gewissen Stelle an

$$|A_t| < t^{x+\delta}.$$

Damit erhalte ich also für Fakultätenreihen den

Satz VIII: Falls die Abszisse λ der Konvergenzgeraden einer Fakultätenreihe $\geqq 0$ ist, ist

$$\lambda = \limsup_{t=\infty} \frac{\log \left| \sum_{n=1}^{t} a_n \right|}{\log t}; \tag{18}$$

falls die Abszisse μ ihrer Grenzgeraden absoluter Konvergenz $\geqq 0$ ist, ist

$$\mu = \limsup_{t=\infty} \frac{\log \sum_{n=1}^{t} |a_n|}{\log t}. \tag{19}$$ [1]

(Offenbar folgt aus dem vorigen Beweise, daß diese Formeln auch in den Fällen $\lambda = \infty$, $\mu = \infty$ richtig sind.)

Beispielsweise ist für die auf S. 171, Nr. 3 angegebene Fakultätenreihe

---

[1] Ohne Benutzung des entsprechenden Cahenschen Satzes über Dirichletsche Reihen läßt sich der Satz VIII direkt auf dem Wege beweisen, der im § 6 für den Satz VIII" angewendet werden wird.

$$\sum_{n=1}^{t} a_n = \frac{1+(-1)^{t+1}}{2} + [\sqrt{t}],$$

also

$$\lim_{t=\infty} \frac{\left|\sum_{n=1}^{t} a_n\right|}{\sqrt{t}} = 1$$

und a fortiori

$$\lim_{t=\infty} \frac{\log\left|\sum_{n=1}^{t} a_n\right|}{\log t} = \frac{1}{2},$$

$$\lambda = \limsup_{t=\infty} \frac{\log\left|\sum_{n=1}^{t} a_n\right|}{\log t} = \frac{1}{2},$$

ferner

$$\sum_{n=1}^{t} |a_n| = t + [\sqrt{t}],$$

also

$$\lim_{t=\infty} \frac{\sum_{n=1}^{t} |a_n|}{t} = 1,$$

$$\mu = \limsup_{t=\infty} \frac{\log \sum_{n=1}^{t} |a_n|}{\log t} = \lim_{t=\infty} \frac{\log \sum_{n=1}^{t} |a_n|}{\log t} = 1.$$

Auf Grund des Satzes VIII lassen sich leicht Beispiele bilden, in welchen $\mu - \lambda$ jeden zwischen 0 und 1 gelegenen Wert hat.

Ich muß bei dieser Gelegenheit erwähnen, daß Herr Pincherle[1]) die Zahl μ auch mit einem limes superior in Verbindung gebracht hat; allerdings ist er nicht bis zur genauen Gleichung (19) gelangt, sondern er hat nur die leicht beweisbaren Ungleichungen

$$k < \mu \leq k + 1$$

gefunden, wo

[1]) „Sulle serie di fattoriali“, Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, Ser. 5, Bd. 11_1, 1902, S. 140—141.

$$k = \limsup_{t=\infty} \frac{\log |a_t|}{\log t}$$

gesetzt ist. Herr Pincherle bewies nämlich, daß $\Omega(x)$ für $\Re(x) < k$ divergiert, für $\Re(x) > k+1$ absolut konvergiert; daraus folgen die obigen Ungleichungen und, wenn λ eingeführt wird, die Ungleichungen

$$k < \lambda < \mu < k+1.$$

Dagegen begeht Herr Pincherle einen Irrtum,[1]) indem er meint, die Gleichung

$$\mu = k+1$$

bewiesen zu haben. Dieselbe braucht gar nicht erfüllt zu sein, wie folgendes einfache Beispiel zeigt: es sei $a_n = 1$ für quadratische n, $a_n = 0$ für nichtquadratische n; dann ist offenbar

$$k = \limsup_{t=\infty} \frac{\log |a_t|}{\log t} = 0,$$

und die durch den Satz VIII bestimmte Abszisse der Grenzgeraden absoluter Konvergenz

$$\mu = \limsup_{t=\infty} \frac{\log \sum_{n=1}^{t} |a_n|}{\log t} = \limsup_{t=\infty} \frac{\log [\sqrt{t}]}{\log t} = \frac{1}{2}.$$

§ 3.

Die Beziehung zwischen einer Fakultätenreihe und der zugehörigen Dirichletschen Reihe reicht noch tiefer als bloß bis zu der in Satz VI festgestellten Tatsache der gemeinsamen Konvergenzhalbebene und der gleichzeitigen Konvergenz bezw. Divergenz in allen Randpunkten. Es gilt nämlich in Bezug auf das analytische Verhalten der durch die Reihen definierten Funktionen der

---

[1]) l. c., S. 143—144, „Sulla sviluppabilità di una funzione in serie di fattoriali", ebenda, Bd. 12_2, 1903, S. 340, und „Sui limiti della convergenza di alcune espressioni analitiche", Rendiconto delle sessioni della R. Accademia delle scienze dell' Istituto di Bologna, Ser. 2, Bd. 8, 1904, S. 13.

Satz IX: Jede (von 0, -1, ... verschiedene) Stelle der Konvergenzgeraden $\Re(x) = \lambda$ der Reihen

$$(1) \qquad \Omega(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!\, a_n}{x(x+1)\dots(x+n)}$$

und

$$(14) \qquad \Psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$$

ist für beide (in der Halbebene $\Re(x) > \lambda$ durch $\Omega(x)$ und $\Psi(x)$ definierten) Funktionen regulär oder für beide singulär.

Es braucht natürlich keinen auf der Grenzgeraden gelegenen singulären Punkt zu geben.

Dem Beweise des Satzes IX schicke ich folgenden Hilfssatz aus der Theorie der Gammafunktion voraus:

Hilfssatz 4: Es sei für jedes komplexe x und jedes ganzzahlige $n \geqq 1$ eine Funktion $\varphi(x, n)$ durch die Gleichung

$$(20) \qquad \frac{n!\, n^x}{\Gamma(x)\, x(x+1)\dots(x+n)} = 1 - \frac{x+x^2}{2n} + \frac{\varphi(x,n)}{n^2} \text{ [1]}$$

definiert. Wenn $\mathfrak{G}$ ein im Endlichen gelegenes Gebiet der x-Ebene ist, ist $|\varphi(x, n)|$ für alle x in $\mathfrak{G}$ und alle $n = 1, 2, \dots$ unterhalb einer endlichen (von x und n unabhängigen) Schranke A gelegen.

Erster (direkter) Beweis des Hilfssatzes 4: Es ist, falls C die Eulersche Konstante bezeichnet,

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = e^{Cx} x \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1+\frac{x}{\nu}\right) e^{-\frac{x}{\nu}} = e^{Cx} x \prod_{\nu=1}^{n} \frac{x+\nu}{\nu} e^{-\frac{x}{\nu}} \cdot \prod_{\nu=n+1}^{\infty} \left(1+\frac{x}{\nu}\right) e^{-\frac{x}{\nu}},$$

$$(21) \qquad \frac{n!\, n^x}{\Gamma(x) x(x+1)\dots(x+n)} = e^{x\left(C+\log n - \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu}\right)} \prod_{\nu=n+1}^{\infty} \left(1+\frac{x}{\nu}\right) e^{-\frac{x}{\nu}}.$$

[1] Die linke Seite von (20) stellt für jedes n eine ganze transzendente Funktion von x dar, $\varphi(x, n)$ also gleichfalls.

Eine Konstante c sei so gewählt, daß für alle x in $\mathfrak{G}$

$$|x| < c$$

ist. Da für $|y| \leq \frac{1}{2}$

$$1 + y = e^{y - \frac{1}{2} y^2 + \vartheta |y|^3} \qquad (|\vartheta| \leq 1)$$

ist,[1] so ergibt sich für $\nu > 2c$ und alle x in $\mathfrak{G}$

$$\left(1 + \frac{x}{\nu}\right) e^{-\frac{x}{\nu}} = e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\nu^2} + \vartheta \frac{|x|^3}{\nu^3}},$$

also für $n > 2c$ und alle x in $\mathfrak{G}$

$$(22) \qquad \prod_{\nu=n+1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{\nu}\right) e^{-\frac{x}{\nu}} = e^{-\frac{x^2}{2} \sum\limits_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2} + \vartheta_1 c^3 \sum\limits_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{1}{\nu^3}} \qquad (|\vartheta_1| \leq 1).$$

Nun ist

$$(23) \qquad \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2} = \int_n^{\infty} \frac{dz}{z^2} - \frac{\vartheta_2}{n^2} = \frac{1}{n} - \frac{\vartheta_2}{n^2} \qquad (0 < \vartheta_2 < 1)$$

und

$$(24) \qquad \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{1}{\nu^3} < \int_n^{\infty} \frac{dz}{z^3} = \frac{1}{2n^2};$$

aus (22), (23) und (24) ergibt sich für $n > 2c$ und alle x in $\mathfrak{G}$

$$(25) \qquad \prod_{\nu=n+1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{\nu}\right) e^{-\frac{x}{\nu}} = e^{-\frac{x^2}{2n} + \vartheta_3 (c^2 + c^3) \frac{1}{n^2}} \qquad (|\vartheta_3| \leq 1).$$

Ferner ist bekanntlich

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu} = \log n + C + \frac{1}{2n} - \frac{\vartheta_4}{n^2} \qquad (0 < \vartheta_4 < 1),$$

---

[1]) Denn

$$\left| -y + \frac{1}{2} y^2 + \log(1 + y) \right| = \left| \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \cdots \right| < \frac{1}{2} (|y|^3 + |y|^4 + \cdots)$$

$$= \frac{|y|^3}{2(1 - |y|)} \leq |y|^3.$$

also

$$(26) \qquad e^{x\left(C+\log n - \sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\nu}\right)} = e^{-\frac{x}{2n}+\frac{\vartheta_5 c}{n^2}} \qquad (|\vartheta_5| < 1).$$

Aus (21), (25) und (26) folgt für alle $n > 2c$ und alle x in $\mathfrak{G}$

$$\frac{n!\,n^x}{\Gamma(x)\,x\,(x+1)\ldots(x+n)} = e^{-\frac{x+x^2}{2n}+\vartheta_6(c+c^2+c^3)\frac{1}{n^2}} \qquad (|\vartheta_6| < 1).$$

Mit anderen Worten, es ist

$$\frac{n!\,n^x}{\Gamma(x)\,x\,(x+1)\ldots(x+n)} = e^{-\frac{x+x^2}{2n}+\frac{\eta}{n^2}},$$

wo $|\eta|$ für alle $n > 2c$ und alle x in $\mathfrak{G}$ unterhalb einer endlichen Schranke gelegen ist. Daraus folgt

$$(20) \qquad \frac{n!\,n^x}{\Gamma(x)\,x\,(x+1)\ldots(x+n)} = 1 - \frac{x+x^2}{2n} + \frac{\varphi(x,n)}{n^2},$$

wo $|\varphi(x,n)|$ für $n > 2c$ und alle x in $\mathfrak{G}$ unterhalb einer endlichen Schranke liegt. Für die endlich vielen $n \leq 2c$ und alle x in $\mathfrak{G}$ liegt das durch (20) bestimmte $\varphi(x,n)$ gleichfalls unterhalb einer endlichen Schranke, womit der Hilfssatz 4 bewiesen ist.

Zweiter Beweis des Hilfssatzes 4: Aus bekannten Eigenschaften der Gammafunktion läßt sich der Hilfssatz auf vielfache Arten als Korollar herleiten. Ich gehe z. B. von dem Satze[1]) von Stieltjes aus: „für nicht negative $y = |y|\,e^{\omega i}$ ist

$$(27) \qquad \log\Gamma(y) = \left(y-\frac{1}{2}\right)\log y - y + \log\sqrt{2\pi} + \frac{1}{12\,y} + R(y),$$

wo

$$|R(y)| < \frac{1}{360\,|y|^3\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^4}$$

ist". Nach (27) ist für alle x in $\mathfrak{G}$ und alle $n > c$[2])

[1]) Literatur s. Nielsen, „Handbuch etc.", S. 208.

[2]) c bezeichnet eine Zahl, welche größer als die absoluten Beträge aller x in $\mathfrak{G}$ ist; alsdann ist sicher $x+n$ nicht negativ.

$$\log \Gamma(x+n) = \left(x+n-\frac{1}{2}\right)\log(x+n) - x - n + \log\sqrt{2\pi}$$
$$+ \frac{1}{12(x+n)} + \frac{\eta_1}{n^3},$$

wo η_1 (desgl. in der Folge $\eta_2, \eta_3, \ldots$) eine Größe bezeichnet, die für alle x in $\mathfrak{G}$ und alle $n > c$ dem absoluten Betrage nach unterhalb einer endlichen Schranke gelegen ist. Außerdem ist nach dem schon von Stirling bewiesenen Spezialfall $y = n$ der Formel (27)

$$\log n! = \log n + \log \Gamma(n)$$
$$= \left(n+\frac{1}{2}\right)\log n - n + \log\sqrt{2\pi} + \frac{1}{12n} + \frac{\eta_2}{n^3},$$

folglich

$$\log \frac{n!\, n^x}{\Gamma(x)\, x(x+1)\ldots(x+n)} = \log \frac{n!\, e^{x\log n}}{(x+n)\,\Gamma(x+n)}$$
$$= \left(n+\frac{1}{2}\right)\log n - n + \log\sqrt{2\pi} + \frac{1}{12n} + x\log n - \log(x+n)$$
$$- \left(x+n-\frac{1}{2}\right)\log(x+n) + x + n - \log\sqrt{2\pi} - \frac{1}{12(x+n)} + \frac{\eta_3}{n^3}$$
$$= x - \left(x+n+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{x}{n}\right) + \frac{1}{12n} - \frac{1}{12(x+n)} + \frac{\eta_3}{n^3}$$
$$= x - \left(n+x+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{x}{n} - \frac{x^2}{2n^2} + \frac{\eta_4}{n^3}\right) + \frac{1}{12n} - \frac{1}{12n} + \frac{\eta_5}{n^2}$$
$$= x - x - \frac{x(2x+1)}{2n} + \frac{x^2}{2n} + \frac{\eta_6}{n^2} = -\frac{x+x^2}{2n} + \frac{\eta_6}{n^2},$$
$$\frac{n!\, n^x}{\Gamma(x)\, x(x+1)\ldots(x+n)} = e^{-\frac{x+x^2}{2n} + \frac{\eta_6}{n^2}} = 1 - \frac{x+x^2}{2n} + \frac{\varphi(x,n)}{n^2},$$

wo $|\varphi(x,n)|$ für alle x in $\mathfrak{G}$ und $n > c$, also auch für alle x in $\mathfrak{G}$ und alle $n > 1$ unterhalb einer endlichen Schranke liegt.

Beweis des Satzes IX: Wenn man die Gleichung (20) mit $\frac{a_n}{n^x}$ multipliziert und über alle $n = 1, 2, \ldots$ summiert, so ergibt sich für $\Re(x) > \lambda$

$$\frac{\Omega(x)}{\Gamma(x)} = \frac{1}{\Gamma(x)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!\, a_n}{x(x+1)\ldots(x+n)}$$

$$= \frac{a_0}{x\,\Gamma(x)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n^x} - \frac{(x+x^2)\,a_n}{2\,n^{x+1}} + \frac{\varphi(x,n)\,a_n}{n^{x+2}} \right);$$

da

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x} = \Psi(x)$$

und

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x+1}} = \Psi(x+1)$$

für $\Re(x) > \lambda$ konvergieren, so ist

$$\frac{\Omega(x)}{\Gamma(x)} = \frac{a_0}{x\,\Gamma(x)} + \Psi(x) - \frac{x+x^2}{2}\Psi(x+1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(x,n)\,a_n}{n^{x+2}}. \tag{28}$$

Hierin ist

$$\frac{a_0}{x\,\Gamma(x)} - \frac{x+x^2}{2}\,\Psi(x+1)$$

für alle Punkte der Halbebene $\Re(x) > \lambda - 1$, also gewiß für $\Re(x) = \lambda$ regulär. Ferner ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(x,n)\,a_n}{n^{x+2}}$$

in jedem endlichen im Innern der Halbebene $\Re(x) > \lambda - 1$ gelegenen Gebiete $\mathfrak{G}$[1]) gleichmäßig konvergent; denn in $\mathfrak{G}$ ist nach dem Hilfssatz 4

---

[1]) Es sollen also alle Punkte von $\mathfrak{G}$ den zwei Bedingungen $\Re(x) \geqq \lambda - 1 + \varepsilon \quad (\varepsilon > 0)$ und $|x| < c$ genügen.

$$|\varphi(x, n)| < A,$$

$$\left|\frac{\varphi(x, n)\, a_n}{n^{x+2}}\right| \leq \frac{A\, |a_n|}{n^{\Re(x)+2}} \leq \frac{A\, |a_n|}{n^{\lambda+1+\varepsilon}},$$

und die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^{\lambda+1+\varepsilon}}$$

konvergiert bekanntlich.[1]) Die Gleichung (28) lehrt also, daß die für $\Re(x) > \lambda$ durch die Differenz

$$\Omega(x) - \Gamma(x)\Psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!\, a_n}{x(x+1)\ldots(x+n)} - \Gamma(x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$$

definierte analytische Funktion in der Halbebene $\Re(x) > \lambda - 1$, also insbesondere auf der Geraden $\Re(x) = \lambda$ regulär ist, mit etwaigem Ausschluß der Punkte $0, -1, \ldots$, welche Pole erster Ordnung oder reguläre Punkte sind. Folglich ist jeder Punkt $\lambda + vi$ (mit etwaigem Ausschluß von λ, falls $\lambda = 0, -1, \ldots$ ist) für beide durch $\Omega(x)$ und $\Psi(x)$ definierten Funktionen regulär oder für beide singulär, womit der Satz IX bewiesen ist.[2])

Die Analogie zwischen beiden Funktionen läßt sich aber noch weiter verfolgen. Beide Beweismethoden des Hilfssatzes 4 zeigen, daß für jedes ganzzahlige positive k eine Gleichung

$$(29) \qquad \begin{aligned} &\frac{n!\, n^x}{\Gamma(x)\, x(x+1)\ldots(x+n)} \\ &= F_0(x) + \frac{F_1(x)}{n} + \cdots + \frac{F_k(x)}{n^k} + \frac{\varphi(x, n)}{n^{k+1}} \end{aligned}$$

besteht, wo

$$F_0(x) = 1,\ F_1(x) = -\frac{x + x^2}{2},\ F_2(x), \ldots, F_k(x)$$

---

[1]) Nach den Sätzen V und VII oder nach dem (vgl. Cahen, l. c., S. 92) direkt leicht beweisbaren Satze, daß die Breite des Streifens bedingter Konvergenz bei einer Dirichletschen Reihe ≤ 1 ist.

[2]) Wenn der Punkt λ für $\Psi(x)$ singulär ist, so ist er es auch für $\Omega(x)$.

ganze rationale Funktionen von x sind und wo für alle x in $\mathfrak{G}$ und alle $n = 1, 2, \ldots$

$$|\varphi(x, n)| < A$$

ist.

In der Tat folgt dies z. B. nach der ersten Methode aus der Gleichung (21), wenn man für $\nu > 2c$

$$\left(1 + \frac{x}{\nu}\right) e^{-\frac{x}{\nu}} = e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\nu^2} + \frac{1}{3}\frac{x^3}{\nu^3} - \cdots + \frac{(-1)^k}{k+1}\frac{x^{k+1}}{\nu^{k+1}} + \vartheta \frac{|x|^{k+2}}{\nu^{k+2}}}$$

setzt, wo $|\vartheta| < 1$ ist, und die Relationen berücksichtigt

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu} = \log n + C + \frac{C_1}{n} + \cdots + \frac{C_k}{n^k} + \frac{\vartheta_1 C_{k+1}}{n^{k+1}} \qquad (|\vartheta_1| < 1),$$

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{1}{\nu^l} = \frac{A_{l,l-1}}{n^{l-1}} + \frac{A_{l,l}}{n^l} + \cdots + \frac{A_{l,k}}{n^k} + \frac{\vartheta_2 A_{l,k+1}}{n^{k+1}} \qquad (|\vartheta_2| \leq 1),$$

wo die C und die A gewisse von n unabhängige Konstanten sind und l eine der Zahlen $2, 3, \ldots, k+2$ bezeichnet. So ergibt sich zunächst eine Gleichung

$$\text{(30)} \quad \log \frac{n!\, n^x}{\Gamma(x)\, x(x+1)\ldots(x+n)} = \frac{G_1(x)}{n} + \cdots + \frac{G_k(x)}{n^k} + \frac{\eta}{n^{k+1}},$$

wo $G_1(x), \ldots, G_k(x)$ ganze rationale Funktionen sind und für alle x in $\mathfrak{G}$ und alle $n > 2c$

$$|\eta| < B$$

ist; aus (30) folgt das Bestehen von (29).

Es ist leicht einzusehen, daß in (30)

$$\text{(31)} \qquad G_\nu(x) = \frac{(-1)^\nu}{\nu(\nu+1)} \varphi_{\nu+1}(x+1)$$

ist, wo $\varphi_\nu(x)$ das sogenannte Bernoullische Polynom ν^{ten} Grades

$$\varphi_\nu(x) = x^\nu - \frac{\nu}{2} x^{\nu-1} + \binom{\nu}{2} B_1 x^{\nu-2} - \binom{\nu}{4} B_2 x^{\nu-4} + \ldots ^{1)}$$

---

[1]) Die Reihe ist so lange fortzusetzen, als der Exponent > 0 ist.

ist (in welchem $B_1, B_2, \ldots$ die Bernoullischen Zahlen bezeichnen). In der Tat ist für ganzzahlige positive x bekanntlich

$$\varphi_\nu(x) = \nu(1^{\nu-1} + 2^{\nu-1} + \cdots + (x-1)^{\nu-1}),$$

also für ganzzahlige positive x und $n > x$

$$\log \frac{1}{\Gamma(x)} \frac{n!\, n^x}{x(x+1)\ldots(x+n)} = \log \frac{n!\, n^x}{(x+n)!}$$

$$= \log \frac{n \cdot n \cdots n}{(n+1)(n+2)\ldots(n+x)} = -\sum_{\varrho=1}^{x} \log\left(1+\frac{\varrho}{n}\right)$$

$$= \sum_{\varrho=1}^{x} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu \varrho^\nu}{\nu\, n^\nu} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu\, n^\nu} \sum_{\varrho=1}^{x} \varrho^\nu = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{n^\nu} \frac{\varphi_{\nu+1}(x+1)}{\nu(\nu+1)}.$$

Damit ist (31) für ganzzahlige positive x, also für alle x bewiesen. Übrigens läßt sich dieser Zusammenhang der semikonvergenten Entwickelung (30) mit den Bernoullischen Funktionen auch aus den bekannten Formeln des Herrn Sonin[1]) ablesen.

Was die Polynome $F_k(x)$ betrifft, so hängen sie eng mit den sogenannten Stirlingschen Polynomen k^{ten} Grades $\psi_k(x)$ zusammen, deren Theorie von Herrn Nielsen sehr übersichtlich im fünften Kapitel seines Handbuches dargestellt worden ist. Wenn die Ausdrücke $\mathfrak{C}_n^k$ durch die für ganzzahlige positive x und $|n| > x$ gültige Potenzreihe

$$\frac{1}{n(n+1)\ldots(n+x)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \mathfrak{C}_{x+1}^k}{n^{x+1+k}},$$ [2])

definiert sind, so ist

$$\mathfrak{C}_{x+1}^0 = 1$$
$$\mathfrak{C}_{x+1}^k = (-1)^{k+1} x(x+1)\ldots(x+k)\, \psi_{k-1}(-x-1)\ (k > 0).$$ [3])

---

[1]) „Bernoullische Polynome und ihre Anwendungen“ (russisch), Warschauer Universitätsnachrichten, 1888; „Sur les polynômes de Bernoulli“, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 116, 1896, S. 137.

[2]) Es ist dies die Gleichung (9) auf S. 68 des Handbuchs, wenn in dieser n statt x, $x+1$ statt n, k statt s geschrieben wird.

[3]) l. c., S. 74, (16).

Da nun für ganzzahlige positive x und $n > x$

$$\frac{1}{\Gamma(x)} \frac{n!\, n^x}{x(x+1)\ldots(x+n)} = \frac{n!\, n^x}{(x+n)!} = \frac{n^{x+1}}{n(n+1)\ldots(n+x)}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \mathfrak{C}^k_{x+1}}{n^k}$$

ist, so ist für ganzzahlige $x > 0$, also allgemein die in (29) auftretende Funktion

$$F_k(x) = -x(x+1)\ldots(x+k)\,\varphi_{k-1}(-x-1) \quad (k > 0).$$

Für meinen Zweck kommt es nur darauf an, daß die $F_k(x)$ in (29) überhaupt ganze rationale Funktionen sind. Die Relation (29) ergibt, wenn man mit $\frac{a_n}{n^x}$ multipliziert und über alle $n = 1, 2, \ldots$ summiert, für $\Re(x) > \lambda$

$$(32) \qquad \begin{aligned} \frac{\Omega(x)}{\Gamma(x)} &= \frac{a_0}{x\,\Gamma(x)} + F_0(x)\,\Psi(x) + F_1(x)\,\Psi(x+1) \\ &+ \cdots + F_k(x)\,\Psi(x+k) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(x,n)\,a_n}{n^{x+k+1}}; \end{aligned}$$

hierin ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(x,n)\,a_n}{n^{x+k+1}}$$

für eine gewisse Umgebung jeder Stelle der Halbebene $\Re(x) > \lambda - k$ gleichmäßig konvergent. Falls also z. B. die durch $\Psi(x)$ definierte Funktion für $\Re(x) > \lambda - 10$ existiert und regulär ist, so lehrt die Gleichung (32), daß die durch $\frac{\Omega(x)}{\Gamma(x)}$ definierte Funktion für $\Re(x) > \lambda - 10$ existiert und regulär ist. Falls $\Psi(x)$ eine ganze transzendente Funktion definiert, definiert also $\Omega(x)$ eine in der ganzen Ebene existierende eindeutige analytische Funktion, welche keine anderen singulären Punkte haben kann als Pole erster Ordnung in $0, -1, -2, \ldots$ Ein Beispiel hierfür liefern die beiden wohlbekannten Funktionen, welche den Werten

$$a_n = (-1)^n$$

entsprechen und für $\Re(x) > 0$ durch die Reihen

$$\Psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^x} = -1 + \frac{1}{2^x} - \frac{1}{3^x} + \frac{1}{4^x} - \cdots,$$

$$\Omega(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{x(x+1)\ldots(x+n)}$$

definiert sind. In der Tat ist bekanntlich einerseits die durch

$$\Psi(x) = -\left(1 - \frac{2}{2^x}\right)\left(1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{4^x} + \cdots\right) \qquad (\Re(x) > 1)$$

definierte Funktion

$$-\left(1 - \frac{2}{2^x}\right)\zeta(x)$$

eine ganze transzendente Funktion, und andererseits ist[1])

$$\Omega(x) = \int_0^1 \frac{z^{x-1}}{2-z}\, dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \frac{1}{x+n},$$

wo der letztere Summenausdruck eine bis auf die Pole erster Ordnung $0, -1, \ldots$ in der ganzen Ebene reguläre Funktion darstellt.

§ 4.

Auf S. 179 ist schon bemerkt worden, daß auf der Konvergenzgeraden einer Fakultätenreihe kein singulärer Punkt der durch sie definierten analytischen Funktion zu liegen braucht. Diese Tatsache war bereits von Herrn Pincherle[2]) beachtet worden. Um so mehr Interesse beansprucht der

Satz X: Wenn alle Koeffizienten einer Fakultätenreihe mit endlicher Grenzgeraden $\Re(x) = \lambda$ von einer gewissen Stelle an reell und ≥ 0 sind, so ist der Punkt $x = \lambda$ eine singuläre Stelle der Funktion.

Erster (direkter) Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann $\lambda > 0$ angenommen werden; denn anderenfalls braucht man statt

---

[1]) Vgl. z. B. Nielsen, „Handbuch etc.“, S. 246.

[2]) S. die auf S. 178, Anm. 1 zuletzt genannte Arbeit.

$$(1) \qquad \Omega(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!\, a_n}{x(x+1)\ldots(x+n)}$$

nur die Fakultätenreihe

$$(12) \qquad \begin{aligned} x(x+1)\ldots(x+m)\left(\Omega(x) - \sum_{n=0}^{m} \frac{n!\, a_n}{x(x+1)\ldots(x+n)}\right) \\ = \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{n!\, a_n}{(x+m+1)\ldots(x+n)}, \end{aligned}$$

wo m eine ganze Zahl $> -1-\lambda$ ist, als Funktion von $x+m+1 = y$ zu betrachten und auf die Reihe

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{n!\, a_n}{(x+m+1)\ldots(x+n)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!\, b_k}{y(y+1)\ldots(y+k)}$$

mit der Grenzgeraden $\Re(y) = \lambda + m + 1 > 0$ den Satz anzuwenden. Auf Grund von (12) kann man auch ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß gleich von Anfang an, also für alle $n \geqq 0$ die Ungleichung

$$a_n \geqq 0$$

erfüllt ist.

Da die Reihe (1) nach Satz III in der Konvergenzhalbebene beliebig oft gliedweise differentiiert werden darf, ergibt sich für $\Re(x) > \lambda$

$$\Omega'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n!\, a_n \left(-\frac{1}{x^2(x+1)\ldots(x+n)} - \frac{1}{x(x+1)^2\ldots(x+n)} - \cdots - \frac{1}{x(x+1)\ldots(x+n)^2}\right),$$

$$\Omega''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n!\, a_n \left(\frac{2}{x^3(x+1)\ldots(x+n)} + \frac{1}{x^2(x+1)^2\ldots(x+n)} + \cdots\right)$$

u. s. f. Man sieht, daß in $\Omega^{(k)}(x)$ für reelle $x > \lambda$ die Glieder das Vorzeichen $(-1)^k$ oder 0 haben, je nachdem $a_n > 0$ oder $= 0$ ist; jedenfalls treten in $(-1)^k\, \Omega^{(k)}(x)$ keine negativen Glieder auf. Wäre nun $x = \lambda$ eine reguläre Stelle der Funktion, so würde die in der Umgebung von $x = \lambda + 1$ gültige Potenzreihe

$$(33)\qquad \Omega(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Omega^{(k)}(\lambda+1)}{k!}(x-\lambda-1)^k$$

einen Konvergenzradius $r > 1$ haben. Es sei p so gewählt, daß

$$p > 0,\quad p < \lambda,\quad p < r-1$$

ist; wegen $p < r-1$ würde die Reihe auf der rechten Seite von (33) für $x = \lambda - p$ konvergieren; diese Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Omega^{(k)}(\lambda+1)}{k!}(1+p)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1+p)^k}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} n!\, a_n (-1)^k \left(\frac{d^k \dfrac{1}{x(x+1)\ldots(x+n)}}{dx^k} \right)_{x=\lambda+1}$$

ist eine Doppelreihe, deren Glieder sämtlich $\geqq 0$ sind. Daher konvergiert auch die durch Vertauschung der Summationsfolge entstehende Reihe

$$(34)\qquad \sum_{n=0}^{\infty} n!\, a_n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1-p)^k}{k!} \left(\frac{d^k \dfrac{1}{x(x+1)\ldots(x+n)}}{dx^k} \right)_{x=\lambda+1}.$$

Nun ist für jedes n, wenn die rationale Funktion von x

$$\frac{1}{x(x+1)\ldots(x+n)} = f(x)$$

gesetzt wird, für $|x-\lambda-1| < \lambda+1$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-\lambda-1)^k}{k!} f^{(k)}(\lambda+1),$$

also speziell für $x = \lambda - p$

$$\frac{1}{(\lambda-p)(\lambda-p+1)\ldots(\lambda-p+n)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1-p)^k}{k!} f^{(k)}(\lambda+1),$$

so daß die mit (34) identische Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!\, a_n}{(\lambda-p)(\lambda-p+1)\ldots(\lambda-p+n)} = \Omega(\lambda-p)$$

konvergieren würde, gegen die Voraussetzung, daß $\Re(x) = \lambda$ die Konvergenzgerade von $\Omega(x)$ ist.

Zweiter Beweis: Der Satz X ergibt sich unmittelbar, wenn ich meinen kürzlich publizierten[1]) analogen Satz als bekannt voraussetze: der reelle Punkt der Konvergenzgeraden einer Dirichletschen Reihe mit reellen, nicht negativen Koeffizienten ist eine singuläre Stelle der Funktion. Wenn dieser Satz mit dem Satz IX verbunden wird, so ergibt sich daraus ohne weiteres der zu beweisende Satz; denn $x = \lambda$ ist eine singuläre Stelle der durch die zugehörige Dirichletsche Reihe definierten Funktion.

Ich will noch bemerken, daß im Falle der Divergenz von $\Omega(\lambda)$ der Satz X leichter zu beweisen ist. Wenn alle $a_n \geqq 0$ angenommen werden und $\lambda > 0$ ist, könnte $\Omega(\lambda)$ nur gegen $+\infty$ divergieren, und es ist nicht schwer, analog zu einer bekannten Eigenschaft der Potenzreihen zu beweisen, daß alsdann bei Annäherung von rechts

$$\lim_{x=\lambda} \Omega(x) = +\infty$$

ist, also λ keine reguläre Stelle der Funktion sein kann. Aber die obigen beiden Beweise gelten auch im Falle der Konvergenz von $\Omega(\lambda)$.

Eine letzte Anwendung des Satzes IX will ich zu dem Zwecke machen, eine Fakultätenreihe zu konstruieren, welche über ihre Grenzgerade nicht fortsetzbar ist. Hierzu genügt es offenbar nach Satz IX, eine Dirichletsche Reihe mit dieser Eigenschaft anzugeben; aber in der Literatur habe ich noch kein solches Beispiel erwähnt gefunden. Es läßt sich analog der durch Herrn Lerch bekannten nicht fortsetzbaren Potenzreihe

$$x + x^2 + x^4 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} x^{2^k}$$

leicht eine Dirichletsche Reihe der verlangten Art bilden: ich behaupte nämlich, daß die Dirichletsche Reihe

[1]) „Über einen Satz von Tschebyschef", Mathematische Annalen, Bd. 61, 1905, S. 536.

$$\frac{1}{2^x} + \frac{1}{4^x} + \frac{1}{16^x} + \frac{1}{256^x} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2^{2^k})^x}$$

über ihre Grenzgerade $\Re(x) = 0$ nicht fortsetzbar ist. Hierzu ist es hinreichend, nachzuweisen, daß alle Punkte $\frac{1}{\log 2} \frac{l\pi}{2^m} i$ (l ganz, $m > 0$ ganz) singulär sind, da diese auf der Grenzgeraden dicht verteilt liegen. Und hierfür reicht es hin, zu zeigen, daß für jeden solchen Punkt vi, wenn $x = vi + x'$ gesetzt wird, die entstehende Dirichletsche Reihe in x' (mit der Konvergenzgeraden $\Re(x') = 0$) von einer gewissen Stelle an positive Koeffizienten hat. Dies ist der Fall; denn das allgemeine Glied dieser Reihe ist

$$\frac{1}{2^{2^k(vi+x')}} = \frac{e^{-\frac{1}{\log 2}\frac{l\pi}{2^m}2^k \log 2 \cdot i}}{(2^{2^k})^{x'}},$$

und der Exponent von e ist für alle $k \geqq m+1$ ein Multiplum von $2\pi i$.

§ 5.

Über Binomialkoeffizientenreihen

$$W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-n)}{n!}{}^{1)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \binom{x-1}{n}$$

lassen sich durchweg die analogen Eigenschaften zu denen der Fakultätenreihen mit den in §§ 1—4 angewandten Mitteln beweisen. Herr Nielsen behandelt die Reihen $W(x)$ auf S. 125—127 seines Handbuches, gelangt jedoch dort nicht zu dem Satz, welcher dem Satz I entspricht, sondern beweist nur die Analoga zu den Sätzen IV und V über absolute Konvergenz. Tatsächlich findet man genau wie in den §§ 1—4 mit den näher anzugebenden Abänderungen in den Beweisen die 10 Sätze, welche den Sätzen I bis X entsprechen und mit I' bis X' numeriert sein mögen.

---

1) Unter dem ersten Gliede wird a_0 verstanden.

Zunächst gilt der bereits 1884 von Herrn Jensen[1]) ohne Ausführung des Beweises publizierte

Satz I': Wenn $W(x_0)$ konvergiert und x_0 von $1, 2, \ldots$ verschieden ist, so konvergiert $W(x_1)$ für $\Re(x_1) > \Re(x_0)$.

Der Beweis verläuft ganz wie der des Satzes I: nur ist hier

$$b_n = a_n \frac{(x_0-1)\ldots(x_0-n)}{n!}, \; c_n = \frac{(x_1-1)\ldots(x_1-n)}{(x_0-1)\ldots(x_0-n)} = \frac{(-x_1+1)\ldots(-x_1+n)}{(-x_0+1)\ldots(-x_0+n)}$$

zu setzen und die Gleichung

$$\lim_{n=\infty} c_n \; n^{\Re(x_1-x_0)} = \lim_{n=\infty} \left| \frac{(-x_1+1)\ldots(-x_1+n)}{(-x_0+1)\ldots(-x_0+n)} \right| n^{\Re(x_1-x_0)}$$

$$(35) \qquad = \left| \frac{x_0 \Gamma(-x_0)}{x_1 \Gamma(-x_1)} \right| \text{[2])}$$

nebst

$$c_n - c_{n+1} = c_n \frac{x_1 - x_0}{-x_0 + n + 1}$$

zu verwenden.

Aus Satz I' folgt die Existenz der Konvergenzhalbebene im Sinne von S. 159—160; nur sind hier die außerhalb derselben etwa gelegenen Punkte 1, 2, ... den Konvergenzpunkten zuzuzählen.

Satz II' lautet wie Satz II und wird ebenso bewiesen. Er besagt, daß eine Binomialkoeffizientenreihe in einer gewissen Umgebung jeder Stelle in ihrer Konvergenzhalbebene gleichmäßig konvergiert. Dies gilt auch von den in der Konvergenzhalbebene gelegenen ganzen positiven Zahlen $x = m$, da die Reihe

$$\frac{1}{(x-1)\ldots(x-m)} \left(W(x) - \sum_{n=0}^{m-1} a_n \frac{(x-1)\ldots(x-n)}{n!} \right)$$

$$= \sum_{n=m}^{\infty} a_n \frac{(x-m-1)\ldots(x-n)}{n!}$$

[1]) l. c., S. 71—72.

[2]) Für $x_0 = 0$ bezw. $x_1 = 0$ ist unter dem Zähler bezw. Nenner der rechten Seite von (35) der Wert 1 zu verstehen.

wieder eine Binomialkoeffizientenreihe mit der Variablen $x-m=y$ und der Konvergenzhalbebene $\Re(y) > \lambda - m$ darstellt.

Aus Satz II′ folgt unmittelbar der Satz III′, nach welchem die Reihe $W(x)$ in ihrer Konvergenzhalbebene eine reguläre Funktion darstellt und beliebig oft gliedweise differentiiert werden kann.

Satz IV′ ergibt sich wie Satz IV; er besagt, daß das Gebiet der absoluten Konvergenz eine Halbebene (mit oder ohne Einschluß der Grenzgeraden) ist.

Die Sätze I′, II′, III′, IV′ sind schon von Herrn Bendixson[1]) bewiesen worden, da sie in seinen entsprechenden Sätzen[2]) über die Reihen von der Gestalt (2) enthalten sind.

Satz V′, nach welchem die Breite des Streifens bedingter Konvergenz ≤ 1 ist, ergibt sich wie Satz V.

Satz VI′ lautet: In jedem (von 1, 2, ... verschiedenen) Punkte sind die Binomialkoeffizientenreihe

$$W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x-1)\ldots(x-n)}{n!}$$

und die Dirichletsche Reihe

$$\Psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n a_n}{n^x}$$

gleichzeitig konvergent oder gleichzeitig divergent.

Dieser Satz wird wie Satz VI bewiesen, wenn man im ersten Teil des Beweises berücksichtigt, daß für

$$c_n = \frac{(-1)^n (x-1)\ldots(x-n)\, n^x}{n!}$$

$$(36) \qquad c_n - c_{n+1} = c_n \left(1 + \frac{(x-n-1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}{n+1}\right)$$

[1]) l. c., S. 19, 22, 23, 24.

[2]) S. § 6 des Folgenden.

ist. Denn der Klammerausdruck auf der rechten Seite von (36) ist für $n \geqq 2$ in die Reihe entwickelbar

$$1 + \frac{-1 + \frac{x-1}{n}}{1 + \frac{1}{n}} \left(1 + \frac{x}{n} + \frac{\alpha_2}{n^2} + \cdots\right)$$

$$= 1 + \left(-1 + \frac{x-1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{\beta_2}{n^2} + \cdots\right)\left(1 + \frac{x}{n} + \frac{\alpha_2}{n^2} + \cdots\right)$$

$$= \frac{\gamma_2}{n^2} + \frac{\gamma_3}{n^3} + \cdots$$

Analog verläuft der Beweis des zweiten Teiles im Anschluß an S. 169.

Ohne Mühe ergibt sich Satz VII′, nach welchem die Punkte absoluter Konvergenz für $W(x)$ und $\Psi(x)$ (abgesehen von $1, 2, \ldots$) dieselben sind.

Aus Satz VI′ folgt[1]) der

Satz VIII′: Falls die Abszisse λ der Konvergenzgeraden von $W(x)$ nicht negativ ist, so ist

$$\lambda = \limsup_{t=\infty} \frac{\log \left| \sum_{n=1}^{t} (-1)^n a_n \right|}{\log t};$$

falls die Abszisse μ der Grenzgeraden absoluter Konvergenz $\geqq 0$ ist, so ist

$$\mu = \limsup_{t=\infty} \frac{\log \sum_{n=1}^{t} |a_n|}{\log t}.$$

Herr Pincherle[2]) ist auch hier[3]) der irrtümlichen Ansicht, es sei

$$\mu = \limsup_{t=\infty} \frac{\log |a_t|}{\log t} + 1 = k + 1.$$

---

[1]) Der Satz VIII′ läßt sich auch direkt durch die Schlüsse beweisen, welche auf S. 203 ff. für den Satz VIII″ angewendet werden.

[2]) l. c. (s. S. 177, Anm. 1), S. 419.

[3]) Vgl. S. 178.

und er nennt die Halbebene $\Re(x) > k + 1$ den (absoluten) Konvergenzbereich von $W(x)$.

Ferner gilt der Satz IX', nach welchem jeder (von 1, 2, ... verschiedene) Punkt der Grenzgeraden für $W(x)$ und $\Psi(x)$ beidemal regulär oder beidemal singulär ist. Dies folgt aus der Relation, welche sich aus (20) durch Vertauschung von x mit $-x$ ergibt und

$$\frac{1}{-x\Gamma(-x)}\,\frac{(-1)^n n!}{(x-1)\ldots(x-n)}\,\frac{1}{n^x} = 1 + \frac{x-x^2}{2n} + \frac{\varphi_1(x,n)}{n^2}$$

lautet; denn dies liefert

$$\frac{(x-1)\ldots(x-n)}{n!} = \frac{1}{-x\cdot\Gamma(-x)}\,\frac{(-1)^n}{n^x}\,\frac{1}{1+\frac{x-x^2}{2n}+\frac{\varphi_1(x,n)}{n^2}}$$

$$= \frac{1}{-x\Gamma(-x)}\,\frac{(-1)^n}{n^x}\left(1-\frac{x-x^2}{2n}+\frac{\varphi_2(x,n)}{n^2}\right),$$

wo $\varphi_2(x,n)$ in jedem endlichen, die Punkte 1, 2, ... im Innern und auf dem Rande nicht enthaltenden Gebiet unterhalb einer endlichen, von x und n unabhängigen Schranke liegt. Für $\Re(x) > \lambda$ ist also

$$W(x) = a_0 + \frac{1}{-x\Gamma(-x)}\,\Psi(x) + \frac{1-x}{2\Gamma(-x)}\,\Psi(x+1)$$

$$-\frac{1}{x\Gamma(-x)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\varphi_2(x,n)a_n}{n^{x+2}},$$

was die Behauptung enthält, wenn man die Überlegungen von S. 183—184 anstellt.[1])

Satz X' endlich besagt, daß der reelle Punkt $x = \lambda$ auf der Grenzgeraden von $W(x)$ singulär ist, falls $(-1)^n a_n$ von einer gewissen Stelle an $\geqq 0$ ist und λ keine positive ganze Zahl ist. Dies folgt ohne weiteres aus Satz IX' und aus der auf S. 191 zitierten Eigenschaft der Dirichletschen Reihen. Für

---

[1]) Wenn der Punkt λ für $\Psi(x)$ regulär ist, so ist er es auch für $W(x)$.

ganzzahliges $\lambda > 0$ gilt der Satz nicht, wie das einfache Beispiel der Binomialkoeffizientenreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{x-1}{n} = 1 - (x-1) + \frac{(x-1)(x-2)}{2!} - \cdots$$

mit der Grenzgeraden $\Re(x) = 1$ zeigt, welche in ihrer Konvergenzhalbebene die ganze transzendente Funktion 0 darstellt.

§ 6.

Es mögen nun kurz die verallgemeinerten Fakultätenreihen

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{(x+\gamma_1)\ldots(x+\gamma_n)}$$

und die verallgemeinerten Binomialkoeffizientenreihen

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (x-\gamma_1)(x-\gamma_2)\ldots(x-\gamma_n)$$

behandelt werden; hierin sollen $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ positive, monoton ins Unendliche wachsende Größen bezeichnen, für welche die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n}$$

divergiert.[1])

Aus dieser Annahme folgt leicht, daß nach Annahme einer positiven Größe δ für alle hinreichend großen n

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\gamma_\nu^2} < \delta \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\gamma_\nu} \tag{37}$$

ist. Denn für alle $\nu \geq \nu_0$ ist

$$\gamma_\nu > \frac{2}{\delta},$$

$$\frac{1}{\gamma_\nu^2} < \frac{\delta}{2\gamma_\nu},$$

[1]) Man kann auch andere lohnende Annahmen über die γ_n machen. Herr Jensen hat solche Fälle a. a. O. (S. 72) noch besonders erwähnt, und Herr Bendixson hat einige derselben (l. c.) behandelt.

also für alle $n \geq \nu_0$

$$\sum_{\nu=\nu_0}^{n} \frac{1}{\gamma_\nu^2} < \frac{\delta}{2} \sum_{\nu=\nu_0}^{n} \frac{1}{\gamma_\nu} \leq \frac{\delta}{2} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\gamma_\nu},$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\gamma_\nu^2} < \frac{\delta}{2} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\gamma_\nu} + \sum_{\nu=1}^{\nu_0-1} \frac{1}{\gamma_\nu^2},$$

und für alle hinreichend großen n ist hierin

$$\sum_{\nu=1}^{\nu_0-1} \frac{1}{\gamma_\nu^2} < \frac{\delta}{2} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\gamma_\nu},$$

so daß (37) erfüllt ist.

Es gilt nun zunächst der

Satz I'': Wenn $F(x)$, bezw. $G(x)$, für $x = x_0$ konvergiert und $\Re(x_1) > \Re(x_0)$ ist, so konvergiert $F(x_1)$, bezw. $G(x_1)$. (Hierbei werden für $F(x)$ die Stellen $-\gamma_n$, für $G(x)$ die Stellen γ_n von der Betrachtung ausgeschlossen.)

Beweis: 1. Für $F(x)$ werde

$$b_n = \frac{A_n}{(x_0+\gamma_1)\ldots(x_0+\gamma_n)}, \quad c_n = \frac{(x_0+\gamma_1)\ldots(x_0+\gamma_n)}{(x_1+\gamma_1)\ldots(x_1+\gamma_n)}$$

gesetzt, so daß

$$c_n - c_{n+1} = c_n \frac{x_1 - x_0}{x_1 + \gamma_{n+1}}$$

ist. Nach dem Hilfssatz 1 handelt es sich lediglich um den Nachweis der Konvergenz von

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n - c_{n+1}|;$$

also genügt es a fortiori, die Konvergenz von

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|c_n|}{\gamma_n}$$

zu beweisen. Es ist

$$\Re \log \left(1 - \frac{x_1 - x_0}{x_1 + \gamma_\nu}\right) = \Re \left(- \frac{x_1 - x_0}{x_1 + \gamma_\nu} + \frac{\eta_1}{(x_1 + \gamma_\nu)^2}\right),$$

wo $|\eta_1|$[1]) für alle ν unterhalb einer endlichen Schranke liegt. Daher ist

$$\Re \log \left(1 - \frac{x_1 - x_0}{x_1 + \gamma_\nu}\right) = - \frac{\Re (x_1 - x_0)}{\gamma_\nu} + \frac{\eta_2}{\gamma_\nu^2},$$

$$|c_n| = \prod_{\nu=1}^{n} \left| \frac{x_0 + \gamma_\nu}{x_1 + \gamma_\nu} \right| = \prod_{\nu=1}^{n} \left| 1 - \frac{x_1 - x_0}{x_1 + \gamma_\nu} \right| = e^{\sum\limits_{\nu=1}^{n} \Re \log \left(1 - \frac{x_1 - x_0}{x_1 + \gamma_\nu}\right)}$$

$$(38) \qquad = e^{-\Re (x_1 - x_0) \sum\limits_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\gamma_\nu} + \eta_3 \sum\limits_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\gamma_\nu^2}}.$$

Nach (37) ist für alle hinreichend großen n

$$\eta_3 \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\gamma_\nu^2} < \frac{1}{2} \Re (x_1 - x_0) \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\gamma_\nu},$$

also

$$(39) \qquad |c_n| < e^{-\frac{1}{2} \Re (x_1 - x_0) \sum\limits_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\gamma_\nu}},$$

und es reicht für unseren Zweck aus, zu beweisen, daß die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n} e^{-\frac{1}{2} \Re (x_1 - x_0) \sum\limits_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\gamma_\nu}}$$

konvergiert, oder, falls

$$\frac{1}{2} \Re (x_1 - x_0) \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\gamma_\nu} = \beta_n$$

gesetzt wird, daß die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\beta_n - \beta_{n-1}) e^{-\beta_n}$$

konvergiert. Dies folgt tatsächlich aus

[1]) Desgl. in der Folge $|\eta_2|$ für alle ν und $|\eta_3|$ für alle n.

$$(\beta_n - \beta_{n-1})\, e^{-\beta_n} < \frac{\beta_n - \beta_{n-1}}{\beta_n^2} < \frac{\beta_n - \beta_{n-1}}{\beta_n \beta_{n-1}} = \frac{1}{\beta_{n-1}} - \frac{1}{\beta_n}.$$

2. Wird

$$b_n = A_n (x_0 - \gamma_1) \ldots (x_0 - \gamma_n),$$

$$c_n = \frac{(x_1 - \gamma_1) \ldots (x_1 - \gamma_n)}{(x_0 - \gamma_1) \ldots (x_0 - \gamma_n)} = \frac{(-x_1 + \gamma_1) \ldots (-x_1 + \gamma_n)}{(-x_0 + \gamma_1) \ldots (-x_0 + \gamma_n)}$$

gesetzt, so ist wegen $\Re(-x_0) > \Re(-x_1)$ der Nachweis des Satzes I″ für $G(x)$ analog dem obigen Nachweise für $F(x)$.

Für die Reihen $G(x)$ hat Herr Bendixson[1]) den Satz I″ und ebenso die bezüglichen Teile der Sätze II″, III″, IV″ schon bewiesen, wenn auch unnötigerweise unter Heranziehung der Weierstraßschen ganzen transzendenten Funktion

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{\gamma_n}\right) e^{\sum_{\nu=1}^{m_n} \frac{1}{\nu} \left(\frac{x}{\gamma_n}\right)^\nu},$$

welche die γ_n zu Nullstellen besitzt.

Aus Satz I″ folgt die Existenz einer Konvergenzhalbebene.

Satz II″. In einer gewissen Umgebung jeder Stelle der Konvergenzhalbebene konvergiert $F(x)$ bezw. $G(x)$ gleichmäßig.[2])

Beweis: Es genügt (vgl. den Beweis des Satzes II), für $F(x)$ zu zeigen: Wenn die Reihe in x_0 konvergiert, so konvergiert sie gleichmäßig in jedem endlichen Gebiete $\mathfrak{G}$, welches der Halbebene $\Re(x) \geqq \Re(x_0) + p$ angehört (wo p eine positive Größe bezeichnet) und keinen der Punkte $-\gamma_n$ enthält (auch nicht auf dem Rande). In der Tat bezeichnet in

$$\Re \log\left(1 - \frac{x - x_0}{x + \gamma_\nu}\right) = \Re\left(-\frac{x - x_0}{x + \gamma_\nu} + \frac{\eta}{(x + \gamma_\nu)^2}\right)$$

η eine für alle x in $\mathfrak{G}$ und alle ν dem absoluten Betrage nach

[1]) l. c., S. 19, 22, 23, 24.

[2]) Für $F(x)$ sind hierbei die Stellen $-\gamma_n$ auszuschließen.

unterhalb einer endlichen Schranke gelegene Größe. Die Formeln auf S. 199 ergeben offenbar, wenn x statt x_1 gesetzt wird, daß für

$$c_n = \frac{(x_0 + \gamma_1) \ldots (x_0 + \gamma_n)}{(x + \gamma_1) \ldots (x + \gamma_n)}$$

und alle hinreichend großen n

$$|c_n| < e^{-\frac{1}{2} p \sum\limits_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\gamma_\nu}}$$

ist, welches x in $\mathfrak{G}$ auch gewählt sei. Hieraus folgt die gleichmäßige Konvergenz von

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|c_n|}{\gamma_n},$$

also von

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| \left| \frac{x - x_0}{x + \gamma_{n+1}} \right| = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n - c_{n+1}|$$

in $\mathfrak{G}$. Der Hilfssatz 3 ergibt also für $F(x)$ — und ganz ebenso für $G(x)$ — den Satz II″.

Aus Satz II″ folgt Satz III″, nach welchem $F(x)$ und $G(x)$ in ihrer Konvergenzhalbebene (nach etwaigem Ausschluß der Punkte $-\gamma_n$ für $F(x)$) reguläre analytische Funktionen darstellen und beliebig oft gliedweise differentiiert werden dürfen.

Aus der in (39) enthaltenen Gleichung

$$\lim_{n=\infty} \left| \frac{(x_0 + \gamma_1) \ldots (x_0 + \gamma_n)}{(x_1 + \gamma_1) \ldots (x_1 + \gamma_n)} \right| = 0 \qquad (\Re(x_1 - x_0) > 0)$$

folgt der Satz IV″, nach welchem für $F(x)$ und $G(x)$ auch das Gebiet der absoluten Konvergenz eine Halbebene ist.

Satz V hat kein Analogon, nach welchem die Breite des Streifens bedingter Konvergenz stets unterhalb einer endlichen Schranke gelegen oder auch nur endlich wäre. Vielmehr lautet der entsprechende

Satz V'': Wenn λ und μ die Abszissen der Grenzgeraden bedingter und absoluter Konvergenz von $F(x)$ (bezw. $G(x)$) sind und

$$\limsup_{t=\infty} \frac{\log t}{\sum\limits_{n=1}^{t} \frac{1}{\gamma_n}} = \tau$$

endlich ist, so ist

$$\mu - \lambda < \tau.^{1)}$$

Beweis: Es sei $F(x_0)$ (bezw. $G(x_0)$) konvergent und

$$\Re(x_1) - \Re(x_0) = \tau + 3p, \; p > 0.$$

Dann ist zu zeigen, daß $F(x_1)$ (bezw. $G(x_1)$) absolut konvergiert. Der Quotient der allgemeinen Glieder für x_1 und x_0 ist

$$c_n = \frac{(x_0+\gamma_1)\ldots(x_0+\gamma_n)}{(x_1+\gamma_1)\ldots(x_1+\gamma_n)}, \text{ bezw. } c_n = \frac{(-x_1+\gamma_1)\ldots(-x_1+\gamma_n)}{(-x_0+\gamma_1)\ldots(-x_0+\gamma_n)},$$

und es genügt, die Konvergenz von

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$$

nachzuweisen. Nach (37) und (38) ist von einem gewissen n an

$$|c_n| < e^{-(\tau+3p)\sum\limits_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\gamma_\nu} + p\sum\limits_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\gamma_\nu}} = e^{-(\tau+2p)\sum\limits_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\gamma_\nu}};$$

nach der Definition von τ ist für alle hinreichend großen n

$$\frac{\log n}{\sum\limits_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\gamma_\nu}} < \tau + p;$$

also ist von einem gewissen n an

$$|c_n| < e^{-\frac{\tau+2p}{\tau+p}\log n} = \frac{1}{n^{1+\frac{p}{\tau+p}}},$$

woraus die Behauptung folgt.

---

[1]) Für $\gamma_n = n$ ist $\tau = 1$; wenn $\tau = \infty$ ist, ist der Satz trivial.

Es hat kein erhebliches Interesse, die analogen Untersuchungen zu den Sätzen VI, VII und IX auszuführen, da die zum Vergleich heranzuziehende Reihe im allgemeinen keine Dirichletsche wäre.

Dagegen erscheint es wohl von Bedeutung, daß sich die Abszissen λ und μ der Grenzgeraden für die betrachteten Reihen im Sinne des Satzes VIII durch einen geschlossenen Ausdruck darstellen lassen.

Es mögen die Reihen $F(x)$ und $G(x)$ in der Form

$$F(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \gamma_1 \ldots \gamma_n}{(x+\gamma_1)\ldots(x+\gamma_n)},$$

$$G(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{(x-\gamma_1)\ldots(x-\gamma_n)}{\gamma_1 \ldots \gamma_n}$$

geschrieben werden, was nur eine Änderung der Bezeichnung ist. Dann gilt der

Satz VIII″: Falls $\lambda \geqq 0$ ist, ist für $F(x)$

$$\lambda = \limsup_{t=\infty} \frac{\log \left| \sum_{n=1}^{t} a_n \right|}{\sum_{n=1}^{t} \frac{1}{\gamma_n}}, \tag{40}$$

für $G(x)$

$$\lambda = \limsup_{t=\infty} \frac{\log \left| \sum_{n=1}^{t} (-1)^n a_n \right|}{\sum_{n=1}^{t} \frac{1}{\gamma_n}}; \tag{41}$$

falls $\mu \geqq 0$ ist, ist für $F(x)$ und $G(x)$

$$\mu = \limsup_{t=\infty} \frac{\log \sum_{n=1}^{t} |a_n|}{\sum_{n=1}^{t} \frac{1}{\gamma_n}}. \tag{42}$$

Beweis: Es brauchen offenbar nur die Formeln (40) und (41) für λ bewiesen zu werden; denn alsdann folgt der Wert (42) von μ durch ihre Anwendung auf die Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \,|\, \gamma_1 \cdots \gamma_n}{(x+\gamma_1)\dots(x+\gamma_n)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \,|\, a_n \,|\, \frac{(x-\gamma_1)\dots(x-\gamma_n)}{\gamma_1 \cdots \gamma_n},$$

welche für reelle x nur absolut, nicht bedingt konvergieren können, da ihre Glieder von einer gewissen Stelle an durchweg $\geqq 0$ oder durchweg $\leqq 0$ sind.

Es möge zunächst die Gleichung (40) bewiesen werden:

1. Wenn

$$\limsup_{t=\infty} \frac{\log \left| \sum_{n=1}^{t} a_n \right|}{\sum_{n=1}^{t} \frac{1}{\gamma_n}} = \varkappa$$

endlich und $\delta > 0$ ist, so ist zu zeigen, daß (falls $\varkappa + \delta$ mit keinem $-\gamma_n$ zusammenfällt) $F(\varkappa + \delta)$ konvergiert. Es ist von einer gewissen Stelle an

$$\frac{\log \left| \sum_{n=1}^{t} a_n \right|}{\sum_{n=1}^{t} \frac{1}{\gamma_n}} < \varkappa + \frac{\delta}{2},$$

also, wenn

$$\sum_{n=1}^{t} a_n = A_t$$

gesetzt wird,

$$|A_t| < e^{\left(\varkappa + \frac{\delta}{2}\right) \sum_{n=1}^{t} \frac{1}{\gamma_n}}. \tag{43}$$

Ferner ist

$$\frac{1}{\left(1 + \frac{\varkappa + \delta}{\gamma_1}\right) \cdots \left(1 + \frac{\varkappa + \delta}{\gamma_n}\right)} = e^{-\sum_{\nu=1}^{n} \log\left(1 + \frac{\varkappa + \delta}{\gamma_\nu}\right)}$$

$$= e^{-(\varkappa + \delta) \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\gamma_\nu} + \eta \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\gamma_\nu^2}},$$

also, da für alle hinreichend großen n nach (37)

$$\left| \eta \right| \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\gamma_\nu^2} < \frac{\delta}{4} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\gamma_\nu}$$

ist, von einer gewissen Stelle an

$$\left|\frac{1}{\left(1+\frac{\varkappa+\delta}{\gamma_1}\right)\cdots\left(1+\frac{\varkappa+\delta}{\gamma_n}\right)}\right| < e^{-\left(\varkappa+\frac{3}{4}\delta\right)\sum\limits_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\gamma_\nu}}. \tag{44}$$

Nun ist

$$\sum_{n=\varrho}^{\sigma}\frac{a_n\gamma_1\cdots\gamma_n}{(x+\gamma_1)\ldots(x+\gamma_n)} = \sum_{n=\varrho}^{\sigma}\frac{A_n-A_{n-1}}{\left(1+\frac{x}{\gamma_1}\right)\ldots\left(1+\frac{x}{\gamma_n}\right)}$$

$$= \sum_{n=\varrho}^{\sigma} A_n\frac{1}{\left(1+\frac{x}{\gamma_1}\right)\ldots\left(1+\frac{x}{\gamma_n}\right)}\cdot\frac{x}{x+\gamma_{n+1}}$$

$$-\frac{A_{\varrho-1}}{\left(1+\frac{x}{\gamma_1}\right)\ldots\left(1+\frac{x}{\gamma_\varrho}\right)} + \frac{A_\sigma}{\left(1+\frac{x}{\gamma_1}\right)\ldots\left(1+\frac{x}{\gamma_{\sigma+1}}\right)}.$$

Für alle hinreichend großen ϱ und $\sigma \geqq \varrho$ ist also nach (43) und (44)

$$\left|\sum_{n=\varrho}^{\sigma}\frac{a_n\gamma_1\cdots\gamma_n}{(\varkappa+\delta+\gamma_1)\ldots(\varkappa+\delta+\gamma_n)}\right| < \sum_{n=\varrho}^{\sigma} e^{\left(\varkappa+\frac{\delta}{2}\right)\sum\limits_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\gamma_\nu}}\, e^{-\left(\varkappa+\frac{3}{4}\delta\right)\sum\limits_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\gamma_\nu}}\cdot\frac{2(\varkappa+\delta)}{\gamma_{n+1}}$$

$$+e^{\left(\varkappa+\frac{\delta}{2}\right)\sum\limits_{\nu=1}^{\varrho-1}\frac{1}{\gamma_\nu}}\, e^{-\left(\varkappa+\frac{3}{4}\delta\right)\sum\limits_{\nu=1}^{\varrho}\frac{1}{\gamma_\nu}} + e^{\left(\varkappa+\frac{\delta}{2}\right)\sum\limits_{\nu=1}^{\sigma}\frac{1}{\gamma_\nu}}\, e^{-\left(\varkappa+\frac{3}{4}\delta\right)\sum\limits_{\nu=1}^{\sigma+1}\frac{1}{\gamma_\nu}}$$

$$=2(\varkappa+\delta)\sum_{n=\varrho}^{\sigma}\frac{1}{\gamma_{n+1}}e^{-\frac{1}{4}\delta\sum\limits_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\gamma_\nu}} + e^{-\frac{1}{4}\delta\sum\limits_{\nu=1}^{\varrho-1}\frac{1}{\gamma_\nu}-\left(\varkappa+\frac{3}{4}\delta\right)\frac{1}{\gamma_\varrho}} + e^{-\frac{1}{4}\delta\sum\limits_{\nu=1}^{\sigma}\frac{1}{\gamma_\nu}-\left(\varkappa+\frac{3}{4}\delta\right)\frac{1}{\gamma_{\sigma+1}}}.$$

Die drei Glieder dieses Ausdruckes haben für $\varrho=\infty$, $\sigma=\infty$ den Grenzwert 0 (ersteres nach den Feststellungen von S. 199 bis 200), so daß die Konvergenz von $F(\varkappa+\delta)$ bewiesen ist.

2. Es ist zu zeigen: wenn $x>0$ ist, $F(x)$ konvergiert und δ eine beliebig gegebene positive Größe ist, so ist von einer gewissen Stelle an

$$\frac{\log|A_t|}{\sum\limits_{n=1}^{t}\frac{1}{\gamma_n}} < x+\delta,$$

d. h.

$$|A_t| < e^{(x+\delta)\sum\limits_{n=1}^{t}\frac{1}{\gamma_n}}.$$

Es werde

$$\sum_{n=1}^{t} \frac{a_n \gamma_1 \ldots \gamma_n}{(x+\gamma_1)\ldots(x+\gamma_n)} = B_t,\ B_{-1} = 0$$

gesetzt; dann ist

$$A_t = \sum_{n=1}^{t} a_n = \sum_{n=1}^{t} \frac{a_n \gamma_1 \ldots \gamma_n}{(x+\gamma_1)\ldots(x+\gamma_n)} \cdot \frac{(x+\gamma_1)\ldots(x+\gamma_n)}{\gamma_1 \ldots \gamma_n}$$

$$= \sum_{n=1}^{t} (B_n - B_{n-1}) \left(1+\frac{x}{\gamma_1}\right)\ldots\left(1+\frac{x}{\gamma_n}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{t} B_n \left\{\left(1+\frac{x}{\gamma_1}\right)\ldots\left(1+\frac{x}{\gamma_n}\right) - \left(1+\frac{x}{\gamma_1}\right)\ldots\left(1+\frac{x}{\gamma_{n+1}}\right)\right\}$$

$$+ B_t \left(1+\frac{x}{\gamma_1}\right)\ldots\left(1+\frac{x}{\gamma_{t+1}}\right).$$

Da nach Voraussetzung

$$\lim_{n=\infty} B_n = F(x) - a_0$$

existiert, ist für alle n

$$|B_n| < B,$$

also

$$|A_t| < B \sum_{n=1}^{t} \left\{\left(1+\frac{x}{\gamma_1}\right)\ldots\left(1+\frac{x}{\gamma_{n+1}}\right) - \left(1+\frac{x}{\gamma_1}\right)\ldots\left(1+\frac{x}{\gamma_n}\right)\right\}$$

$$+ B\left(1+\frac{x}{\gamma_1}\right)\ldots\left(1+\frac{x}{\gamma_{t+1}}\right)$$

$$= 2B\left(1+\frac{x}{\gamma_1}\right)\ldots\left(1+\frac{x}{\gamma_{t+1}}\right) - B\left(1+\frac{x}{\gamma_1}\right)$$

$$< 2Be^{x\left(\frac{1}{\gamma_1}+\ldots+\frac{1}{\gamma_{t+1}}\right)},$$

also für alle hinreichend großen t

$$|A_t| < e^{(x+\delta)\sum\limits_{n=1}^{t}\frac{1}{\gamma_n}}.$$

Der Beweis des Satzes VIII" für die Reihen $G(x)$, also der Formel (41) ist genau derselbe, wenn man im ersten Teile von der Formel

$$\sum_{n=\varrho}^{\sigma} a_n \frac{(x-\gamma_1)\ldots(x-\gamma_n)}{\gamma_1\ldots\gamma_n} = \sum_{n=\varrho}^{\sigma}(A_n - A_{n-1})\left(1-\frac{x}{\gamma_1}\right)\ldots\left(1-\frac{x}{\gamma_n}\right)$$

ausgeht, wo

$$A_t = \sum_{n=1}^{t}(-1)^n a_n$$

ist, und im zweiten Teile von

$$A_t = \sum_{n=1}^{t}(B_n - B_{n-1})\frac{1}{\left(1-\frac{x}{\gamma_1}\right)\ldots\left(1-\frac{x}{\gamma_n}\right)},$$

wo

$$B_t = \sum_{n=1}^{t} a_n \frac{(x-\gamma_1)\ldots(x-\gamma_n)}{\gamma_1\ldots\gamma_n},\quad B_{-1}=0$$

ist. Da das Produkt

$$\left(1-\frac{x}{\gamma_1}\right)\ldots\left(1-\frac{x}{\gamma_n}\right)$$

bei gegebenem positiven $x\ (\neq \gamma_1, \gamma_2 \ldots)$ von einem gewissen Index an konstantes Vorzeichen besitzt und dem absoluten Betrage nach abnimmt, so folgt die Behauptung im zweiten Teil mit unwesentlicher Abänderung aus

$$A_t = \sum_{n=1}^{t} B_n \left(\frac{1}{\left(1-\frac{x}{\gamma_1}\right)\ldots\left(1-\frac{x}{\gamma_n}\right)} - \frac{1}{\left(1-\frac{x}{\gamma_1}\right)\ldots\left(1-\frac{x}{\gamma_{n+1}}\right)}\right)$$
$$+ \frac{B_t}{\left(1-\frac{x}{\gamma_1}\right)\ldots\left(1-\frac{x}{\gamma_{t+1}}\right)}$$

mit Hilfe der Ungleichung

$$|A_t| < c + 2B \frac{1}{\left(1 - \frac{x}{\gamma_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{x}{\gamma_{t+1}}\right)}.$$

Endlich gilt für Reihen $F(x)$ bezw. $G(x)$ ein den früheren Sätzen X und X' entsprechender Satz X'', nach welchem im Falle $a_n \geqq 0$ bezw. $(-1)^n a_n > 0$ (für alle n von einer gewissen Stelle an) der reelle Punkt λ der Grenzgeraden eine singuläre Stelle der Funktion ist. (Für $G(x)$ wird hierbei λ von allen γ_n verschieden angenommen.)

In der Tat ist für die Reihen $F(x)$ der erste (direkte) Beweis des Satzes X wörtlich anwendbar, und für die Reihen $G(x)$ ergibt sich ebenso — da ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\lambda < 0$ angenommen werden kann — der Beweis auf Grund der Tatsache, daß aus

$$G(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \frac{(\gamma_1 - x) \ldots (\gamma_n - x)}{\gamma_1 \cdots \gamma_n}$$

durch gliedweises Differentiieren für $G^{(k)}(x)$ eine Reihe entsteht, in welcher der mit $(-1)^n a_n$ multiplizierte Ausdruck für $x = 0$ (und überhaupt für alle x zwischen λ und γ_1) Null ist oder das Vorzeichen $(-1)^k$ besitzt.

§ 7.

Herr Pincherle[1]) hat in einer kürzlich erschienenen ausführlichen Arbeit die Integrale

$$(45) \qquad \int_0^a \varphi(t)\, t^{x-1}\, dt$$

behandelt, wo $a > 0$ ist und $\varphi(t)$ eine für $0 < t < a$ stetige reelle oder komplexe Funktion der reellen Variablen t bezeichnet. Einige der von ihm bewiesenen Eigenschaften dieser Integrale entsprechen den Sätzen I, II, III, IV über Fakultäten-

[1]) l. c. (s. S. 155, Anm. 1).

reihen; seine Beweise sind — mit einer nachher anzugebenden Ausnahme — denkbarst einfach und so kurz, daß ich sie zunächst wiederholen will, um alsdann diejenigen neuen Eigenschaften hinzuzufügen, welche den Sätzen VIII und X über Fakultätenreihen entsprechen.

Durch die Substitution

$$t = \frac{a}{\tau}$$

geht das Integral

$$\int\limits_{\delta}^{a} \varphi(t)\, t^{x-1}\, d\, t,$$

wo $0 < \delta < a$ ist, in

$$-\int\limits_{\frac{a}{\delta}}^{1} \varphi\left(\frac{a}{\tau}\right) \frac{a^{x-1}}{\tau^{x-1}} \frac{d\,\tau}{\tau^2} = a^{x-1} \int\limits_{1}^{\frac{a}{\delta}} \frac{\varphi\left(\frac{a}{\tau}\right)}{\tau}\, \tau^{-x}\, d\,\tau$$

über, wo

$$\frac{\varphi\left(\frac{a}{\tau}\right)}{\tau} = \psi(\tau)$$

eine für $\tau \geq 1$ stetige Funktion von τ bezeichnet. Also ist die Theorie der Integrale (45) identisch mit der Theorie der Integrale

$$\int\limits_{1}^{\infty} \psi(t)\, t^{-x}\, d\, t,$$

und ich will alle Betrachtungen für diese Schreibweise der Integrale anstellen, auf die auch Herr Pincherle Bezug nimmt.

Es ist ihm nicht entgangen, daß die Funktion $\varphi(t)$ bezw. $\psi(t)$ nicht stetig zu sein braucht. Ich mache demgemäß folgende allgemeinere Annahme: $\psi(t)$ ist für alle endlichen reellen $t \geq 1$ eindeutig definiert, in jedem endlichen Intervalle $t = (1 \ldots \omega)$ hat $|\psi(t)|$ eine endliche obere Grenze, und $\psi(t)$ ist über jedes solche Intervall integrierbar. Alsdann zerfallen alle komplexen $x = u + v\,i$ in zwei Klassen:

1. Die durch das Integral

$$\int\limits_{1}^{\omega} \psi(t)\, t^{-x}\, d\, t$$

für jedes $\omega > 1$ definierte Funktion[1]) von ω besitzt für $\omega = \infty$ einen Grenzwert.

2. Dies ist nicht der Fall.

Im ersteren Falle nennt man das Integral

$$\mathfrak{J}(x) = \int_1^\infty \psi(t)\, t^{-x}\, dt$$

konvergent.

Dann gilt der

Satz I''': Wenn $\mathfrak{J}(x_0)$ konvergiert und $\Re(x_1) > \Re(x_0)$ ist, so konvergiert $\mathfrak{J}(x_1)$.

Dieser Satz ist zuerst von Herrn Pincherle[2]) bewiesen worden. Die Herren Phragmén,[3]) Franel[4]) und Lerch,[5]) denen Herr Pincherle[6]) die Entdeckung des Satzes zuschreibt, sprechen tatsächlich nur von denjenigen $x_1 = x_0 + p$, wo $p > 0$ ist. Allerdings ist der Nachweis für $\Re(p) > 0$ ganz analog.[7]) Folgendes ist für den Satz I''' der Lerch-Pincherlesche

---

[1]) In der Tat ist das Produkt zweier integrierbarer Funktionen bekanntlich integrierbar; wenn $\psi(t) = \psi_1(t) + i\,\psi_2(t)$ ist (wo $\psi_1(t)$ und $\psi_2(t)$ reell sind), so existieren die beiden eigentlichen reellen Integrale

$$\int_1^\omega (\psi_1(t)\cos(v\log t) + \psi_2(t)\sin(v\log t))\, t^{-u}\, dt,$$

$$\int_1^\omega (-\psi_1(t)\sin(v\log t) + \psi_2(t)\cos(v\log t))\, t^{-u}\, dt.$$

[2]) l. c., S. 14.

[3]) „Sur le domaine de convergence de l'intégrale infinie $\int_0^\infty F(ax)e^{-a}da$", Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'académie des sciences, Paris, Bd. 132, 1901, S. 1396.

[4]) Die entsprechende Mitteilung Herrn Franels ist von Herrn Hurwitz auf S. 364—365 seiner Arbeit publiziert: „Sur quelques applications géométriques des séries de Fourier", Annales scientifiques de l'école normale supérieure, Ser. 3, Bd. 19, 1902.

[5]) „Sur un point de la théorie des fonctions génératrices d'Abel", Acta mathematica, Bd. 27, 1903, S. 345.

[6]) l. c., S. 13.

[7]) Die von Herrn Nielsen in seiner Arbeit „Elementare Herleitung einiger Formeln aus der Theorie der Gammafunktion" (Monatshefte für Mathematik und Physik, Bd. 15, 1904, S. 316) gegebene Begründung für die Sätze I''' und II''' des Textes ist unzureichend. Seine auf S. 325

Beweis: Wenn

$$\int_1^\omega \psi(t)\, t^{-x_0}\, dt = \Psi(\omega)$$

gesetzt wird, existiert nach Voraussetzung

$$\lim_{\omega=\infty} \Psi(\omega),$$

so daß insbesondere $|\Psi(\omega)|$ für alle $\omega \geqq 1$ unterhalb einer endlichen Schranke A gelegen ist. Es besteht nun die Gleichung

$$(46)\qquad \int_1^\omega \psi(t) t^{-x_1} dt = \Psi(\omega)\omega^{-x_1+x_0} + (x_1 - x_0)\int_1^\omega \Psi(t) t^{-x_1+x_0-1}\, dt.$$

Wegen $\Re(x_1) > \Re(x_0)$ ist

$$\lim_{\omega=\infty} \Psi(\omega)\,\omega^{-x_1+x_0} = 0;$$

wegen

$$|\Psi(t)| < A$$

konvergiert das Integral

$$\int_1^\infty \Psi(t)\, t^{-x_1+x_0-1}\, dt;$$

also folgt aus (46) die behauptete Konvergenz des Integrals

$$\mathfrak{J}(x_1) = \int_1^\infty \psi(t)\, t^{-x_1}\, dt$$

und zugleich die Relation

---

des „Handbuches" gemachte Angabe, Herr Pincherle habe die Konvergenz des Integrales für $\Re(x_1) \geqq \Re(x_0)$ nachgewiesen, ist nicht richtig; Herr Pincherle spricht — mit Recht — nur von der Konvergenz für $\Re(x_1) > \Re(x_0)$, und für $\Re(x_1) = \Re(x_0)$ braucht das Integral nicht zu konvergieren. Endlich schreibt Herr Nielsen a. a. O. (S. 325) irrtümlich mir die Priorität der Bemerkung zu, daß der Satz I''' auch ohne Voraussetzung der Stetigkeit von $\psi(t)$ gilt.

$$\int_1^\infty \psi(t)\, t^{-x_1}\, dt = (x_1 - x_0) \int_1^\infty \Psi(t)\, t^{-x_1+x_0-1}\, dt.$$

Aus Satz I‴ folgt für das Integral $\mathfrak{Z}(x)$ die Existenz einer Konvergenzhalbebene, deren Abszisse λ natürlich auch $-\infty$ oder $+\infty$ sein kann.

Satz II‴: In jedem endlichen Gebiete $\mathfrak{G}$, welches innerhalb der Konvergenzhalbebene liegt, ist das Integral $\mathfrak{Z}(x)$ gleichmäßig konvergent.

Beweis (nach Herrn Pincherle): Nach Voraussetzung gibt es zwei positive Konstanten p und q, so daß für alle x in $\mathfrak{G}$

$$\Re(x) \geq \lambda + 2p, \quad |x| < q$$

ist. Es sei

$$x_0 = \lambda + p,$$

$$\int_1^\omega \psi(t)\, t^{-x_0}\, dt = \Psi(\omega).$$

Dann folgt wegen

$$|\Psi(\omega)| < A$$

aus

$$\int_{\omega_0}^{\omega_1} \psi(t)\, t^{-x}\, dt = \Psi(\omega_1)\, \omega_1^{-x+x_0} - \Psi(\omega_0)\, \omega_0^{-x+x_0}$$

$$+ (x - x_0) \int_{\omega_0}^{\omega_1} \Psi(t)\, t^{-x+x_0-1}\, dt$$

die Ungleichung

$$\left| \int_{\omega_0}^{\omega_1} \psi(t)\, t^{-x}\, dt \right| < \frac{A}{\omega_1^p} + \frac{A}{\omega_0^p} + (q + \lambda + p)\, A \int_{\omega_0}^{\omega_1} \frac{dt}{t^{p+1}},$$

deren rechte Seite gegen Null konvergiert, falls ω_0 und ω_1 ins Unendliche rücken. Damit ist der Satz bewiesen.

Der Satz II‴ führt zum

Satz III‴: $\mathfrak{Z}(x)$ stellt in seiner Konvergenzhalbebene eine reguläre analytische Funktion von x dar und darf in jener Halbebene beliebig oft unter dem Integralzeichen differentiiert werden.

Um zu zeigen, daß $\mathfrak{J}(x)$ eine analytische Funktion von x ist, beweist Herr Pincherle unnötigerweise zuerst, daß das durch Differentiieren unter dem Integralzeichen entstehende Integral für $\Re(x) > \lambda$ konvergiert und zwar in einer gewissen Umgebung jeder Stelle gleichmäßig; er wendet dann einen Satz von Scheeffer[1]) an, nach welchem daraus der analytische Charakter von $\mathfrak{J}(x)$ folgt. Jener Nachweis der Konvergenz (und zumal der gleichmäßigen Konvergenz) ist jedoch überflüssig, da statt des Scheefferschen Satzes ein viel weittragenderer Satz von Herrn de la Vallée Poussin[2]) zur Verfügung steht; ich mache hier zu Herrn Pincherles Beweisführung die analoge Bemerkung wie auf S. 163, Anm. 1 gegenüber Herrn Cahen, und es erscheint mir prinzipiell wichtig, diese Dinge zu erwähnen, obgleich im vorliegenden Fall die Untersuchung des durch Differentiieren unter dem Integralzeichen entstehenden Integrals keine Mühe macht.

Der Satz von Herrn de la Vallée Poussin[3]) lautet:

Es sei n eine Zahl, welche unstetig oder stetig ins Unendliche wächst, $f(x, n)$ für jedes in Betracht kommende n eine in einem zusammenhängenden Gebiete $\mathfrak{G}$ reguläre analytische Funktion von x. Es existiere für alle x in $\mathfrak{G}$ der Grenzwert

$$\lim_{n=\infty} f(x, n) = f(x),$$

und zwar konvergiere $f(x, n)$ für alle x in $\mathfrak{G}$ gleichmäßig gegen $f(x)$.

---

[1]) „Über einige bestimmte Integrale, betrachtet als Funktionen eines komplexen Parameters", Habilitationsschrift, München, 1883, S. 5–6.

[2]) „Sur les applications de la notion de convergence uniforme dans la théorie des fonctions d'une variable complexe", Annales de la société scientifique de Bruxelles, Bd. 17, Teil 2, 1893, S. 324—325.

[3]) Herr de la Vallée Poussin beweist ihn durch Anwendung der — von ihm wiedergefundenen — Moreraschen Umkehrung des Cauchyschen Satzes. Für den Fall, daß n alle positiven ganzen Zahlen durchläuft, stellen 1. und 2. den auf S. 163—164 erwähnten Weierstraßschen Satz dar.

1. Dann ist $f(x)$ in $\mathfrak{G}$ eine reguläre analytische Funktion von x.

2. Es ist für $k = 1, 2, 3, \ldots$ in $\mathfrak{G}$

$$\lim_{n=\infty} \frac{d^k f(x,n)}{d x^k} = \frac{d^k f(x)}{d x^k}.$$

3. Bei gegebenem k konvergiert $\frac{d^k f(x, n)}{d x^k}$ gegen $f^{(k)}(x)$ für jedes innerhalb $\mathfrak{G}$ gelegene Gebiet $\mathfrak{G}'$ gleichmäßig.

Durch Anwendung von 1. und 2. ergibt sich folgender Beweis des Satzes III''': Es werde

$$f(x,n) = \int_1^n \psi(t)\, t^{-x}\, d t$$

gesetzt, wo n alle positiven Werte ≥ 1 durchläuft; $\mathfrak{G}$ sei ein beliebiges, in der Halbebene $\Re(x) > \lambda$ gelegenes, zusammenhängendes Gebiet. Nach Satz II''' konvergiert $f(x,n)$ in $\mathfrak{G}$ gleichmäßig gegen $\mathfrak{Z}(x)$; ferner ist $f(x,n)$ bei konstantem n eine in $\mathfrak{G}$ reguläre analytische Funktion von x; denn[1]) es ist die gliedweise Integration der unendlichen Reihe

$$\psi(t)\, t^{-x} = \psi(t) - \psi(t) \log t \cdot x + \frac{\psi(t) \log^2 t}{2!} x^2 - \cdots$$

über das Intervall $(1 \ldots n)$ erlaubt, und die hierdurch entstehende Reihe stellt sogar eine ganze transzendente Funktion von x dar. Nach 1. ist also

$$\lim_{n=\infty} f(x,n) = \mathfrak{Z}(x) = \int_1^\infty \psi(t)\, t^{-x}\, d t$$

in $\mathfrak{G}$, also überhaupt für $\Re(x) > \lambda$ eine reguläre analytische Funktion; nach 2. ist in $\mathfrak{G}$, also für $\Re(x) > \lambda$

$$\frac{d^k \mathfrak{Z}(x)}{d x^k} = \int_1^\infty \psi(t)\,(-\log t)^k\, t^{-x}\, d t,$$

womit der Satz III''' bewiesen ist.

---

[1]) Man braucht hierzu nicht einmal die von Herrn de la Vallée Poussin aus seinem Satze gezogenen allgemeinen Folgerungen über Integrale mit einem komplexen Parameter.

Aus

$$|\psi(t)\, t^{-x_1}| = |\psi(t)\, t^{-x_0}| \frac{1}{t^{\Re(x_1 - x_0)}}$$

ergibt sich ohne weiteres der

Satz IV‴: Der Bereich absoluter Konvergenz von

$$\mathfrak{Z}(x) = \int_1^\infty \psi(t)\, t^{-x}\, dt$$

ist eine Halbebene $\Re(x) > \mu$ mit eventuellem Einschluß des Randes.

Diesen bekannten Sätzen füge ich nun die Analoga zu den Sätzen VIII und X über Fakultätenreihen hinzu.

Die Bestimmung der Abszissen λ und μ der Grenzgeraden bedingter und unbedingter Konvergenz ergibt sich durch den

Satz VIII‴: Falls $\lambda \geqq 0$ ist, ist

$$\lambda = \limsup_{\omega = \infty} \frac{\log \left| \int_1^\omega \psi(t)\, dt \right|}{\log \omega}; \tag{47}$$

falls $\mu \geqq 0$ ist, ist

$$\mu = \limsup_{\omega = \infty} \frac{\log \int_1^\omega |\psi(t)|\, dt}{\log \omega}. \tag{48}$$

Beweis: Es braucht nur die Formel (47) bewiesen zu werden; denn aus ihr ergibt sich (48) durch Anwendung auf das Integral $\int_1^\infty |\psi(t)|\, t^{-x}\, dt$.

1. Es werde

$$\limsup_{\omega = \infty} \frac{\log \left| \int_1^\omega \psi(t)\, dt \right|}{\log \omega} = \varkappa$$

gesetzt, und es sei $\varkappa$ endlich, $\delta > 0$; dann soll die Konvergenz von

$$\mathfrak{Z}(\varkappa + \delta) = \int_1^\infty \psi(t)\, t^{-\varkappa - \delta}\, dt$$

gezeigt werden. Wenn

$$\int_1^\omega \psi(t)\,dt = \Phi(\omega)$$

gesetzt wird, ist

$$(49)\quad \int_1^\omega \psi(t)\,t^{-\varkappa-\delta}\,dt = \Phi(\omega)\,\omega^{-\varkappa-\delta} + (\varkappa+\delta)\int_1^\omega \Phi(t)\,t^{-\varkappa-\delta-1}\,dt.$$

Von einer gewissen Stelle an ist

$$|\Phi(\omega)| < \omega^{\varkappa+\frac{\delta}{2}};$$

daher ist

$$\lim_{\omega=\infty} \Phi(\omega)\,\omega^{-\varkappa-\delta} = 0,$$

und das Integral

$$\int_1^\infty \Phi(t)\,t^{-\varkappa-\delta-1}\,dt$$

ist (sogar absolut) konvergent, da von einer gewissen Stelle an

$$|\Phi(t)\,t^{-\varkappa-\delta-1}| < t^{\varkappa+\frac{\delta}{2}}\,t^{-\varkappa-\delta-1} = \frac{1}{t^{1+\frac{\delta}{2}}}$$

ist; nach (49) existiert also, wie behauptet,

$$\lim_{\omega=\infty} \int_1^\omega \psi(t)\,t^{-\varkappa-\delta}\,dt = \mathfrak{Z}(\varkappa+\delta).$$

2. Es sei $x > 0$ und $\mathfrak{Z}(x)$ konvergent, $\delta > 0$; dann ist zu zeigen, daß von einer gewissen Stelle an

$$|\Phi(\omega)| < \omega^{x+\delta}$$

ist. Falls

$$\int_1^\omega \psi(t)\,t^{-x}\,dt = \Psi(\omega)$$

gesetzt wird, ergibt sich

$$\Phi(\omega) = \int_1^\omega \psi(t)\,dt = \int_1^\omega \psi(t)\,t^{-x}\cdot t^x\,dt = \Psi(\omega)\,\omega^x - x\int_1^\omega \Psi(t)\,t^{x-1}\,dt,$$

also wegen

$$|\Psi(\omega)| < B \qquad \text{(für alle } \omega \geq 1)$$

$$|\Phi(\omega)| < B\,\omega^x + B\,x\int_1^\omega t^{x-1}\,dt = B\,\omega^x + B(\omega^x - 1) < 2\,B\,\omega^x,$$

folglich von einer gewissen Stelle an

$$|\Phi(\omega)| < \omega^{x+\delta},$$

womit der Satz VIII''' bewiesen ist.

Endlich gilt der — von mir bereits publizierte[1]) —

Satz X''': Wenn für alle t von einer gewissen Stelle an $(t > a)$

$$\psi(t) \geq 0$$

ist und das Integral

$$\mathfrak{J}(x) = \int_1^\infty \psi(t)\,t^{-x}\,dt$$

eine im Endlichen gelegene Konvergenzgerade[2]) $\Re(x) = \lambda$ besitzt, so ist $x = \lambda$ eine singuläre Stelle der in der Halbebene $\Re(x) > \lambda$ durch das Integral $\mathfrak{J}(x)$ definierten analytischen Funktion.

Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann $a = 1$ angenommen werden, da

$$\int_1^a \psi(t)\,t^{-x}\,dt$$

eine ganze transzendente Funktion von x ist. Nach Satz III''' ist nun, mindestens für $|x - \lambda - 1| < 1$,

$$\mathfrak{J}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-\lambda-1)^k}{k!}\,\mathfrak{J}^{(k)}(\lambda+1)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda+1-x)^k}{k!} \int_1^\infty \psi(t)\,t^{-\lambda-1}\log^k t\,dt.$$

Wäre $x = \lambda$ eine reguläre Stelle, so wäre der Konvergenzradius r dieser Potenzreihe > 1. Es sei p so gewählt, daß

$$p > 0,\ 1 + p < r$$

[1]) l. c. (s. S. 191, Anm. 1), S. 548.

[2]) Natürlich muß hier $\mu = \lambda$ sein.

ist. Dann wäre die Potenzreihe für $x = \lambda - p$ konvergent. Da alle Elemente in

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1+p)^k}{k!} \int_1^{\infty} \psi(t)\, t^{-\lambda-1} \log^k t\, dt$$

$\geqq 0$ sind, ist die Vertauschung von Summation und Integration erlaubt; es konvergiert also das Integral

$$\int_1^{\infty} \psi(t)\, t^{-\lambda-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1+p)^k}{k!} \log^k t\, dt = \int_1^{\infty} \psi(t)\, t^{-\lambda-1}\, e^{(1+p)\log t}\, dt$$

$$= \int_1^{\infty} \psi(t)\, t^{-\lambda+p}\, dt = \mathfrak{Z}(\lambda - p),$$

gegen die Voraussetzung, daß λ die Abszisse der Grenzgeraden von $\mathfrak{Z}(x)$ ist. Daher ist, wie behauptet, $x = \lambda$ eine singuläre Stelle der Funktion.

Sitzung der math.-phys. Klasse vom 3. März 1906.

1. Herr R. Hertwig hält einen Vortrag über: „Weitere Untersuchungen über die Ursachen der Geschlechtsbestimmung bei den Fröschen.“ Derselbe wird anderweitig zur Veröffentlichung gelangen.

Herr Hertwig macht darin weitere Mitteilungen über die Untersuchungen, welche er über die Entwicklung des Urogenitalsystems bei Fröschen und Kröten angestellt hat, unter besonderer Berücksichtigung der Veränderungen, welche durch Überreife der Eier hervorgerufen werden.

2. Herr L. Burmester referiert: „Über eine Theorie der geometrisch-optischen Gestalttäuschungen.“

Diese merkwürdigen Gestalttäuschungen, die man seit nahe 300 Jahren vereinzelt beobachtet hat, aber noch nicht mit Erfolg untersucht wurden, sind dadurch charakterisiert, daß an einem monokular betrachteten, körperlichen Gebilde das Fernere näher und das Nähere ferner erscheint, daß somit das Vertiefte erhaben und das Erhabene vertieft gesehen wird. Den Beobachtungen zufolge stehen Objektgebilde und entsprechendes Truggebilde in involutorischer reliefperspektiver Beziehung. Denn die Verbindungsgeraden der entsprechenden Objektpunkte und Trugpunkte gehen durch den Gesichtspunkt, den Drehpunkt des beobachtenden Auges; die entsprechenden Objektgeraden und Truggeraden sowie die entsprechenden Objektebenen und Trugebenen schneiden sich in einer Neutralebene. Ferner gehen die Truggeraden, welche parallelen Objektgeraden entsprechen,

durch einen zugehörigen Trugfluchtpunkt; und alle Trugfluchtpunkte befinden sich in einer zur Neutralebene parallelen Ebene, die den Abstand des Gesichtspunktes von der Neutralebene halbiert. Demnach kann das subjektive Truggebilde, welches einem beobachteten Objektgebilde entspricht, im voraus konstruiert, also auch als körperliches Gebilde hergestellt und mit dem wahrgenommenen subjektiven Truggebilde sukzessiv verglichen werden, um die Theorie zu bestätigen. Umgekehrt erscheint infolge der involutorischen Beziehung das körperlich hergestellte Truggebilde, wenn es an die Stelle des erschienenen subjektiven Truggebildes gesetzt wird, durch die Gestalttäuschung wieder in der Gestalt des von seiner Stelle weggenommenen ursprünglichen Objektgebildes.

Ein wichtiges Kennzeichen des erschienenen Truggebildes ist, daß bei ruhendem Gesichtspunkt einer Drehung des Objektgebildes eine entgegengesetzte Drehung des Truggebildes mit gestaltlicher Veränderung entspricht, daß bei ruhendem Objektgebilde und bewegtem Gesichtspunkt das Truggebilde in seltsamer Bewegung und gestaltlicher Veränderung erscheint. Diese Bewegungsvorgänge und diese gestaltlichen Veränderungen werden durch die Theorie erklärt und durch die Beobachtungen auch bestätigt. Die Gestalttäuschungen und die damit zusammenhängenden mannigfaltigen Erscheinungen wurden an einigen, aus weißem Karton hergestellten, monokular betrachteten Objektgebilden demonstriert: z. B. an einem einfachen, schräg gesehenen rechteckigen Blatt, welches an einem Stab befestigt ist, an einem geknickten rechteckigen Blatt, an einem Hohlwürfel und Vollwürfel sowie an einer kleinen Treppe, die alle durch die Gestalttäuschungen umgestülpt in veränderter Gestalt und veränderter Beleuchtung erscheinen; ferner an Hohlformen von Reliefs und Masken, die besonders leicht erhaben gesehen werden.

Die Abhandlung über diese Theorie der geometrisch-optischen Gestalttäuschungen wird in der „Zeitschrift für Psychologie und Physiologie der Sinnesorgane“ erscheinen.

3. Herr Alfr. Pringsheim legt eine Arbeit von Herrn Fritz Hartogs vor: „Einige Folgerungen aus der Cauchyschen Integralformel bei Funktionen mehrerer Veränderlichen."

Durch Übertragung der Cauchyschen Randintegral-Darstellung auf Funktionen von zwei oder mehreren Veränderlichen gewinnt der Verfasser verschiedene in der Theorie der Funktionen einer Veränderlichen keinerlei Analogon besitzende Theoreme, welche gestatten, aus dem regulären Verhalten solcher Funktionen in gewissen beschränkten Bereichen die Regularität in merklich erweitertem Umfange zu erschließen und bestimmte Aussagen über die eventuelle Verteilung singulärer Stellen zu machen.



Einige Folgerungen aus der Cauchyschen Integralformel bei Funktionen mehrerer Veränderlichen.

Von **F. Hartogs.**

(*Eingelaufen 3. März.*)

Ist eine analytische Funktion $f(x)$ für alle dem Bereiche B der x-Ebene (einschl. Begrenzung) angehörenden Werte der komplexen Veränderlichen x eindeutig und regulär, so gilt nach Cauchy für alle x, welche inneren Punkten dieses Bereiches entsprechen, die Beziehung:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(\xi)}{\xi - x}\, d\xi,$$

das Integral erstreckt über die (im gehörigen Sinne zu durchlaufende) vollständige Begrenzung C des Bereiches B.

Durch zweimalige Anwendung dieser Formel erhält man für analytische Funktionen $f(x, y)$ zweier unabhängiger komplexer Veränderlichen x und y unter geeigneten Voraussetzungen die analoge Beziehung:

$$f(x, y) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int\limits_C \int\limits_{C'} \frac{f(\xi, \eta)}{(\xi - x)(\eta - y)}\, d\xi\, d\eta,$$

bei welcher x einen inneren Punkt des Bereiches B der x-Ebene, y einen solchen des Bereiches B' der y-Ebene bedeutet, und ξ die vollständige Begrenzung C des Bereiches B, η diejenige C' des Bereiches B' durchläuft.

Wie nun eine genauere Untersuchung zeigt, ist es, um die Gültigkeit dieser Formel nachzuweisen, gar nicht nötig zu

wissen, daß $f(x, y)$ im vollen Gebiete (B, B') regulär sei; vielmehr genügt es zu diesem Zwecke schon, wenn von $f(x, y)$ nur feststeht, daß es sich in einem gewissen Teilgebiete desselben regulär verhalte. Da aber andererseits der Ausdruck auf der rechten Seite der Gleichung — unter der Voraussetzung, daß wenigstens jeder Punkt (ξ, η) des Integrationsgebietes jenem Teilgebiete angehöre, — allemal eine im vollen Gebiete (B, B') eindeutige und reguläre analytische Funktion von x und y darstellt, so ergeben sich auf diese Weise ganz unmittelbar einige bemerkenswerte Sätze, auf welche, wie es scheint, die Aufmerksamkeit bisher noch nicht gelenkt worden ist.[1])

Bedeutet Γ eine irgendwie definierte Gesamtheit von Wertsystemen (x, y), so sagen wir im folgenden, der Funktionszweig (oder auch kurz die Funktion) $f(x, y)$ verhalte sich „im Gebiete Γ eindeutig und regulär“, wenn es möglich ist, jedem Punkte $x = x'$, $y = y'$ von Γ ein so kleines Kreisgebiet $|x - x'| < \varrho$, $|y - y'| < \varrho'$ zuzuordnen, daß die von x und y abhängige Größe $f(x, y)$

1. für jede Stelle (x, y), welche einem oder mehreren dieser Kreisgebiete angehört, noch eindeutig erklärt sei,

2. innerhalb jedes einzelnen Kreisgebietes mit einer nach ganzen positiven Potenzen von $x - x'$ und $y - y'$ fortschreitenden und daselbst absolut konvergierenden Reihe dem Werte nach übereinstimme.

Stellt Γ speziell eine abgeschlossene Punktmenge dar, so ist es, wie leicht zu zeigen, dann auch stets möglich, die Wahl der Größen ϱ und ϱ' so zu treffen, daß keine einzige von ihnen kleiner sei als eine gewisse feste positive Größe a.

Das Analoge gilt für den Fall beliebig vieler Veränderlichen.

---

[1]) Die betreffenden Sätze hat der Verfasser zum Teil schon in seiner Inaugural-Dissertation (München 1903) auf anderem Wege hergeleitet. (S. daselbst Kap. VI.)

1.

Es sei in der x-Ebene ein beliebiger Bereich B[1]), desgleichen in der y-Ebene ein beliebiger Bereich B' vorgelegt. Die Randkurven dieser Bereiche mögen mit C bezw. C' bezeichnet werden, und es stelle $y = y_0$ irgend einen festen, dem Bereiche B' angehörenden Punkt dar. Wir wollen alsdann annehmen, es stehe von dem Zweige $f(x, y)$ einer analytischen Funktion der beiden unabhängigen Veränderlichen x und y lediglich fest, daß er sich in dem ganzen Gebiete eindeutig und regulär verhalte, welches besteht

a) aus allen Stellen (x, y), für welche x der Begrenzung C des Bereiches B und y gleichzeitig dem Bereiche B' angehört, und

b) aus allen Stellen (x, y_0), für welche x dem Bereiche B angehört.

Es gibt alsdann zunächst, da B eine abgeschlossene Punktmenge darstellt, eine positive Größe k derart, daß $f(x, y)$ auch noch an allen Stellen (x, y), für welche x dem Bereiche B angehört und y der Bedingung $|y - y_0| < k$ genügt, eindeutig und regulär ist; die Gesamtheit aller inneren Punkte y von B', für welche zugleich $|y - y_0| < k$ gilt, heiße K.

---

[1]) Unter einem „Bereich B“ der x-Ebene werde im folgenden stets eine abgeschlossene Punktmenge von der Beschaffenheit verstanden, daß a) jeder Punkt x derselben entweder selbst ein innerer Punkt der Menge ist (d. h. daß alle Punkte eines genügend kleinen Kreises mit dem Mittelpunkte x ebenfalls zu B gehören) oder doch als Häufungsstelle von inneren Punkten erscheint, und daß b) je zwei innere Punkte von B stets durch eine aus einer endlichen Anzahl geradliniger Stücke zusammengesetzte Linie miteinander verbunden werden können, welche ganz aus inneren Punkten von B besteht. Die Gesamtheit der Begrenzungspunkte von B (also derjenigen Punkte von B, welche nicht zugleich innere sind) möge die „Begrenzung“ oder die „Randkurve“ C des Bereiches B heißen; sie stellt ebenfalls eine abgeschlossene Punktmenge dar. In der entsprechenden Weise mögen B' und C' in der y-Ebene erklärt sein. Endlich möge ein „Bereich B“ der 4-dimensionalen xy-Mannigfaltigkeit in Bezug auf die letztere die analogen Eigenschaften besitzen wie ein Bereich B in Bezug auf die 2-dimensionale x-Mannigfaltigkeit.

Wird nun der Einfachheit halber fürs erste vorausgesetzt, daß die Begrenzung C des Bereiches B und ebenso diejenige C' des Bereiches B' durch je eine endliche Anzahl von stetigen rektifizierbaren Kurven gebildet werde, so hat man, solange y auf das Gebiet K beschränkt bleibt und x einen inneren Punkt des Bereiches B bedeutet:

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi, y)}{\xi - x} d\xi,$$

das Integral über die vollständige Begrenzung C des Bereiches B erstreckt. Des weiteren ist aber, wenn ξ irgend einen Punkt von C bezeichnet und y seine bisherige Bedeutung beibehält:

$$f(\xi, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} \frac{f(\xi, \eta)}{\eta - y} d\eta,$$

das Integral erstreckt über die Begrenzung von B'. Somit ergibt sich:

$$f(x, y) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_C d\xi \int_{C'} \frac{f(\xi, \eta)}{(\xi - x)(\eta - y)} d\eta.$$

Der auf der rechten Seite dieser Gleichung stehende Ausdruck, welcher hiernach im ganzen Innern des Gebietes (B, K) mit $f(x, y)$ übereinstimmt, stellt aber eine im Innern des vollen Gebietes (B, B') eindeutige und reguläre analytische Funktion von x und y dar.[1] Infolge der bezüglich $f(x, y)$ geltenden Voraussetzungen nämlich ist die Größe unter dem doppelten Integralzeichen, solange x einen inneren Punkt von B, y einen solchen von B' bezeichnet, eine im ganzen Integrationsgebiete stetige Funktion der Integrationsveränderlichen ξ, η, und daher besitzt das Doppelintegral auch noch für alle diese Werte von

[1] Ein direkter Nachweis hierfür ergibt sich auch aus gewissen allgemeinen Sätzen über Integrale von Funktionen, welche zugleich analytische Funktionen eines oder mehrerer Parameter sind. (Vgl. für den einfachsten Fall Enzykl. d. math. Wiss. II B 1, Nr. 6, p. 22 sowie die Anfangsbemerkung in Nr. 43.)

x und y jedenfalls einen wohlbestimmten endlichen Wert. Des weiteren kann aber, wenn $x = x_1$, $y = y_1$ irgend ein festes derartiges Wertepaar bedeutet, $\frac{f(\xi, \eta)}{(\xi - x)(\eta - y)}$ durch eine nach ganzen positiven Potenzen von $x - x_1$ und $y - y_1$ fortschreitende Doppelreihe ersetzt werden, deren Koeffizienten von x und y unabhängig sind, und welche bei geeigneter Beschränkung der absoluten Beträge von $x - x_1$ und $y - y_1$ absolut, sowie in Bezug auf alle in Betracht kommenden Wertsysteme ξ, η gleichmäßig konvergiert. Diese sämtlichen Eigenschaften der Reihe bleiben auch dann noch bestehen, wenn man dieselbe, was bei passender Anordnung ihrer Terme möglich ist, als einfach unendliche Reihe auffaßt. Durch gliedweise Integration dieser letzteren erhält man dann in der Tat die Entwicklung des Doppelintegrals nach positiven ganzen Potenzen von $x - x_1$ und $y - y_1$, und zwar konvergiert die so sich ergebende (zunächst als einfach unendlich gedachte) Reihe sicherlich absolut, wenn man noch die obere Schranke für die absoluten Beträge von $x - x_1$ und $y - y_1$ beliebig wenig verkleinert; die Reihe kann somit, wenn man will, auch wieder als absolut konvergente Doppelreihe aufgefaßt werden.

Hieraus geht aber hervor, daß der betrachtete Ausdruck die Funktion $f(x, y)$ bezw. ihre analytische Fortsetzung auch noch im Innern des vollen Gebietes (B, B') darstellen muß; $f(x, y)$ verhält sich also notwendig auch noch in der Umgebung jedes im Innern des Gebietes (B, B') gelegenen Punktes (x, y) regulär.

Läßt man jede spezielle Annahme bezüglich der Begrenzung der Bereiche B und B' fallen, so kann man in folgender Weise zum Ziele gelangen. Aus den Voraussetzungen folgt zunächst die Existenz einer positiven, von Null verschiedenen Größe a von der Beschaffenheit, daß, sobald $x = x'$, $y = y'$ irgend eine der unter a) oder b) genannten Stellen bedeutet, $f(x, y)$ noch in jedem Gebiete $|x - x'| < a$, $|y - y'| < a$ eindeutig definiert und regulär ist. Die x-Ebene werde nun auf irgend eine Weise in kongruente Quadrate von der Seitenlänge

$\frac{1}{3}a$ eingeteilt, und das von allen denjenigen Quadraten, welche im Innern oder längs der Begrenzung irgend einen Punkt von B enthalten, überdeckte Gebiet (einschl. Begrenzung) mit B_1 bezeichnet. Jeder Punkt von B ist alsdann innerer Punkt von B_1, und jeder nicht zu B gehörige Punkt von B_1, speziell also jeder Begrenzungspunkt von B_1 ist von einem gewissen Punkte des Bereiches B und daher auch von einem gewissen Punkte der Begrenzung C desselben um weniger als $\frac{1}{2}a$ entfernt. Auf die nämliche Weise möge aus dem Bereich B' der y-Ebene der erweiterte Bereich B'_1 gebildet werden. Offenbar ist es alsdann, ohne daß die Voraussetzungen ihre Gültigkeit verlieren, gestattet, in denselben die Bereiche B und B' durchweg durch B_1 bezw. B'_1 zu ersetzen. Nach dem oben Bewiesenen verhält sich somit der betrachtete Funktionszweig $f(x, y)$ im Innern des Gebietes (B_1, B'_1), also sicher im vollen Gebiete (B, B') regulär.

Wir können demnach den folgenden Satz aussprechen:

Es sei C die Begrenzung eines beliebigen Bereiches B der x-Ebene und $y = y_0$ irgend ein dem Bereiche B' der y-Ebene angehöriger Punkt. Verhält sich alsdann der Zweig $f(x, y)$ einer analytischen Funktion von x und y in demjenigen Gebiete eindeutig und regulär, welches aus allen unter a) und b) genannten Punkten besteht, so verhält sich die Fortsetzung[1]) desselben auch noch im vollen Gebiete (B, B') eindeutig und regulär.

Ein zweiter Beweis für diesen Satz, bei welchem nur einfache Integrale auftreten, möge hier noch angedeutet werden.

Es werde die oben benutzte Einteilung der x-Ebene in Quadrate von der Seitenlänge $\frac{1}{3}a$ wieder aufgenommen und das von allen denjenigen Quadraten, welche im Innern oder längs der Begrenzung irgend einen Punkt von B_1 aufweisen,

---

[1]) Dabei handelt es sich selbstredend nur um solche Fortsetzungen, welche man erhält, ohne daß x den Bereich B und y den Bereich B' verläßt.

überdeckte Gebiet (inkl. Begrenzung) mit B_2 bezeichnet. Der Bereich B_2 enthält dann den Bereich B_1 in seinem Innern, und jeder nicht zu B gehörige Punkt von B_2 ist von einem gewissen Punkte von B und daher auch von einem gewissen Punkte von C um weniger als a entfernt. Der nicht zu B_1 gehörige Teil von B_2 möge (einschl. seiner Begrenzung) mit S bezeichnet werden. $f(x, y)$ verhält sich alsdann im Gebiete (S, B') eindeutig und regulär und es gilt somit:

$$(1)\quad 2\pi i\, f(x, y) = \int\limits_{(S)} \frac{f(\xi, y)}{\xi - x}\, d\xi = \int\limits_{(B_2)} \frac{f(\xi, y)}{\xi - x}\, d\xi - \int\limits_{(B_1)} \frac{f(\xi, y)}{\xi - x}\, d\xi,$$

wobei x irgend einen inneren Punkt des Gebietes S, y irgend einen Punkt von B' bezeichnet, und die Integrale jedesmal über die vollständige Begrenzung des in Parenthese angegebenen Gebietes zu erstrecken sind.

Andererseits verhält sich $f(x, y)$ im Gebiete $(B_2, |y - y_0| < a)$ eindeutig und regulär, und es gilt somit, solange $|y - y_0| < a$ ist,

$$\int\limits_{(B_1)} \frac{f(\xi, y)}{\xi - x}\, d\xi = 0$$

für jeden nicht zu B_1 gehörigen Wert von x. Da aber für jeden solchen Wert von x dieses Integral eine im Bereiche B' durchweg reguläre analytische Funktion von y darstellt, so verschwindet es auch für j e d e s dem Bereiche B' angehörige y, und die rechte Seite der Gleichung (1) reduziert sich somit stets auf ihr erstes Glied. Dieses, welches demnach im Gebiete (S, B') mit $2\pi i\, f(x, y)$ dem Werte nach übereinstimmt, stellt aber eine im Innern des ganzen Gebietes (B_2, B_1'), speziell also im vollen Gebiete (B, B') eindeutige und reguläre analytische Funktion von x und y dar.

2.

Über die Verteilung der singulären Stellen bei den analytischen Funktionen zweier Veränderlichen sagt der soeben bewiesene Satz folgendes aus:

Es sei C die Randkurve irgend eines Bereiches B der x-Ebene, welcher den Nullpunkt enthält. Ist als-

dann der Punkt $x=0$, $y=0$ für einen gewissen Zweig $f(x, y)$ einer analytischen Funktion von x und y eine singuläre Stelle, während dieser Zweig sich eindeutig und regulär verhält an jeder Stelle $(x, 0)$, für welche x auf C liegt, so gibt es eine Zahl $l>0$ derart, daß zu jedem Punkte $y=y_0$ des Kreises $|y|<l$ eine singuläre Stelle (x_0, y_0) jenes Zweiges existiert, für welche x_0 dem Bereiche B angehört.

Infolge der über $f(x, y)$ gemachten Voraussetzungen existiert nämlich jedenfalls eine positive Größe l von der Beschaffenheit, daß $f(x, y)$ noch im Gebiete $(C, |y|<l)$ eindeutig und regulär ist. Die so bestimmte Größe l genügt aber dann zugleich den Anforderungen des Satzes. Ist nämlich $y=y_0$ irgend ein der Bedingung $|y_0| \leq l$ genügender Wert, und verhielte sich entgegen der Behauptung $f(x, y)$ in der Umgebung einer jeden Stelle (x, y_0) regulär, für welche x dem Bereiche B angehört, so müßte nach dem in Nr. 1 bewiesenen Satze $f(x, y)$ auch im vollen Bereiche $(B, |y| \leq l)$ eindeutig und regulär sein, während ja der Punkt $x=0$, $y=0$ für $f(x, y)$ eine singuläre Stelle sein sollte.

Durch Spezialisierung ergibt sich aus obigem Satze der folgende:

Ist der Punkt $x=0$, $y=0$ eine singuläre Stelle für den Funktionszweig $f(x, y)$, gibt es jedoch in einer gewissen Nachbarschaft dieses Punktes für $f(x, y)$ keine weitere singuläre Stelle, deren y-Koordinate Null ist, oder gibt es wenigstens innerhalb jedes beliebig kleinen Kreises um $x=0$ noch Bereiche B, welche den Punkt $x=0$ enthalten, und deren Randpunkte mit $y=0$ sämtlich reguläre Stellen für $f(x, y)$ ergeben, so läßt sich zu jeder beliebig kleinen positiven Zahl k stets eine zweite l derart angeben, daß zu jedem Punkte $y=y_0$ des Kreises $|y|<l$ mindestens eine singuläre Stelle (x_0, y_0) jenes Funktionszweiges existiert, welche der Bedingung $|x_0|<k$ genügt.

3.

Ist ein beliebiger Bereich B der x-Ebene sowie ein beliebiger Bereich B' der y-Ebene vorgelegt und steht von dem Zweige $f(x, y)$ einer analytischen Funktion fest, daß er sich in demjenigen Gebiete eindeutig und regulär verhalte, welches aus allen Begrenzungsstellen des Bereiches $\mathsf{B} = (B, B')$ besteht (d. h. sowohl aus allen Stellen (x, y), für welche x der Randkurve von B und y dem Bereiche B' als auch aus allen denjenigen, für welche x dem Bereiche B und y der Randkurve von B' angehört), so ist nach dem in Nr. 1 bewiesenen Satze $f(x, y)$ notwendig auch im vollen Bereiche B eindeutig und regulär. Dieser Satz läßt sich nun auf völlig beliebige Bereiche B [1]) der xy-Mannigfaltigkeit übertragen; doch werden wir uns hierbei auf die Betrachtung eindeutiger analytischer Funktionen beschränken. Der Satz lautet alsdann:

Liegt ein beliebiger Bereich B der xy-Mannigfaltigkeit vor und steht von der eindeutigen analytischen Funktion $f(x, y)$ fest, daß sie sich an jeder Begrenzungsstelle (x, y) des Bereiches B regulär verhalte, so verhält sie sich auch im vollen Bereiche B regulär.

Beweis. Da die Begrenzung von B eine abgeschlossene Menge von Punkten (x, y) darstellt, so läßt sich zunächst wiederum eine positive Größe a angeben, so beschaffen, daß wenn (x', y') irgend eine Begrenzungsstelle von B bedeutet, $f(x, y)$ auch noch in jedem Gebiete $|x - x'| < a$, $|y - y'| < a$ regulär ist.

Die Gesamtheit der y-Koordinaten aller Punkte von B bildet offenbar einen Bereich B' der y-Ebene. Ist $y = y_0$ ein Randpunkt von B' (oder auch ein beliebiger Punkt von B', welcher von einem Randpunkte um weniger als a entfernt ist), so ist $f(x, y)$ sicher in der Umgebung jeder dem Bereiche B angehörenden Stelle (x, y) regulär, deren y-Koordinate gleich y_0 ist. Wüßte man, daß das nämliche auch von jedem be-

---

[1]) Siehe p. 225, Fußnote [1]).

liebigen Punkte $y = y_0$ des Bereiches B' gilt, so wäre damit die Behauptung erwiesen. Die gegenteilige Annahme führt aber in der Tat auf einen Widerspruch. Gäbe es nämlich auch Punkte $y = y_1$ von B', für welche jene Aussage nicht zuträfe, so müßten speziell auch zwei Punkte $y = y_0$ und $y = y_1$ des Bereiches B' nachweisbar sein, von denen der erste, y_0, jene Bedingung erfüllt, der andere, y_1, hingegen nicht, und deren Entfernung voneinander zugleich kleiner ist als $\frac{1}{2}a$. Es soll nun der Nachweis geführt werden, daß — entgegen der soeben gemachten Annahme — $f(x, y)$ dann auch in der Umgebung einer jeden dem Bereiche B angehörenden Stelle regulär sein muß, deren y-Koordinate gleich y_1 ist.

Ist (x_1, y_1) eine beliebige solche Stelle, so unterscheiden wir drei Fälle, je nachdem der Punkt (x_1, y_0) erstens ein Begrenzungspunkt von B, zweitens ein innerer Punkt von B ist, oder drittens dem Bereiche B überhaupt nicht angehört.

Im ersten Falle ist $f(x, y)$ im Gebiete $|x - x_1| < a$, $|y - y_0| < a$ durchweg regulär, also speziell auch in der Umgebung der Stelle (x_1, y_1).

Im dritten Falle gibt es, da zwar der Punkt (x_1, y_1) dem Bereiche B angehört, der Punkt (x_1, y_0) hingegen nicht, auf der geradlinigen Verbindungsstrecke der Punkte y_0 und y_1 mindestens einen Zwischenpunkt y_2 derart, daß (x_1, y_2) ein Begrenzungspunkt von B ist. Dann verhält sich $f(x, y)$ im Gebiete $|x - x_1| < a$, $|y - y_2| < a$ durchweg regulär, also speziell auch in der Umgebung der Stelle (x_1, y_1).

Im zweiten Falle endlich bedeute X die Gesamtheit aller Stellen x, für welche (x, y_0) ein innerer Punkt von B ist; die Gesamtheit aller derjenigen Punkte von X, welche mit dem (gleichfalls zu X gehörenden) Punkte x_1 durch eine aus einer endlichen Anzahl von Geraden zusammengesetzte, aus lauter Punkten von X bestehende Linie verbunden werden können, bilden nebst ihren Häufungsstellen alsdann einen Bereich B der x-Ebene und zwar von folgender Beschaffenheit: Ist x irgend ein Punkt von B, so gehört der Punkt (x, y_0) dem Bereiche B an; ist speziell x ein Punkt der Randkurve C von B,

so ist der Punkt (x, y_0) (da er nicht innerer Punkt von **B** sein kann) sicher ein Begrenzungspunkt von **B**. Demnach ist $f(x, y)$ in dem ganzen Gebiete regulär, welches besteht: a) aus allen Stellen (x, y), für welche x der Kurve C, y dem Bereiche $|y - y_0| < \frac{2}{3} a$ angehört; b) aus allen Stellen (x, y_0), für welche x dem Bereiche B angehört. Nach dem Satze von Nr. 1 ist infolgedessen $f(x, y)$ auch im vollen Gebiete $(B, |y - y_0| < \frac{2}{3} a)$ regulär, also speziell in der Umgebung der Stelle (x_1, y_1).

4.

Der in Nr. 1 bewiesene Satz läßt noch nach einer anderen Richtung hin eine Verallgemeinerung zu. Die bei der Voraussetzung desselben unter b) definierte Gesamtheit von Stellen (x, y_0) kann nämlich ersetzt werden durch eine anderweitige Gesamtheit, bei welcher die y-Koordinate nicht mehr ungeändert bleibt, sondern ihren Wert gleichzeitig mit x ändert (ohne jedoch den Bereich B' jemals zu verlassen). Allerdings kann man sich schon an den einfachsten Beispielen von Singularitäten unmittelbar davon überzeugen, daß diese Abhängigkeit keineswegs völlig willkürlicher Natur sein (etwa Unstetigkeiten aufweisen) darf, sowie ferner, daß die Gestalt mindestens eines der Bereiche B, B' gewissen Beschränkungen unterworfen werden muß.[1]) Wir werden im folgenden annehmen,

[1]) Es sei z. B. $f(x, y) = \frac{1}{x - y}$. Wählt man nun etwa für B den Bereich $|x| < 2$, für B' den Bereich $|y| \leq 1$ (so daß $f(x, y)$ im Gebiete (C, B') regulär ist), und setzt des weiteren $\psi(x) = 0$ für jeden von Null verschiedenen, dem Bereiche B angehörenden Wert x, dagegen $\psi(0)$ gleich irgend einer von Null verschiedenen Konstanten, so verhält sich $f(x, y)$ in der Umgebung jeder Stelle $(x, \psi(x))$ regulär und es sind somit alle Voraussetzungen erfüllt; nichtsdestoweniger ist $f(x, y)$ im Bereiche (B, B') nicht durchweg regulär. — Wählt man andererseits für B den Kreisring $1 < |x| \leq 4$, für B' den Kreisring $2 < |x| \leq 3$ und setzt durchweg $\psi(x) = -x$, so sind wiederum alle Voraussetzungen erfüllt, ohne daß $f(x, y)$ im Gebiete (B, B') durchweg regulär wäre. Damit der Satz gültig sei, muß zum mindesten e i n e r der beiden Bereiche B und B' einfach zusammenhängend sein.

daß die y-Koordinate eine eindeutige analytische Funktion $\psi(x)$ der x-Koordinate sei, und ferner eine besondere Voraussetzung über die Gestalt des Bereiches B' hinzufügen.

Es sei $y = \psi(x)$ eine im Bereiche B der x-Ebene eindeutige und reguläre analytische Funktion von x, so beschaffen, daß, solange x dem Bereiche B angehört, der Punkt $y = \psi(x)$ im **Innern** des Bereiches B' der y-Ebene gelegen sei. Von dem Zweige $f(x, y)$ einer analytischen Funktion von x und y stehe fest, daß er sich in dem ganzen Gebiete eindeutig und regulär verhalte, welches besteht:

a) aus allen Stellen (x, y), für welche x der Begrenzung C des Bereiches B und y gleichzeitig dem Bereiche B' angehört, und

b) aus allen Stellen (x, y), für welche x dem Bereiche B angehört und gleichzeitig $y = \psi(x)$ ist.

Der Bereich B' besitze überdies die Eigenschaft, daß seine Begrenzung mit jeder Geraden der y-Ebene höchstens zwei Punkte oder eine einzige geradlinige Strecke gemein habe. Alsdann ist $f(x, y)$ auch im vollen Bereiche (B, B') eindeutig und regulär.

Beweis. Die positive Größe β möge so bestimmt werden, daß, wenn $x = x'$, $y = y'$ irgend eine der unter a) oder b) genannten Stellen bedeutet, $f(x, y)$ noch im Bereiche $|x - x'| < \beta$, $|y - y'| < \beta$ eindeutig und regulär sei. Eine zweite positive Größe α sei nicht größer als β, werde jedoch, was stets möglich ist, überdies noch so klein angenommen, daß, wenn $x = x'$ einen völlig beliebigen Punkt von B bezeichnet, für alle x des Gebietes $|x - x'| < \alpha$:

1. die Funktion $\psi(x)$ noch eindeutig und regulär sei,
2. der Punkt $y = \psi(x)$ dem Bereiche B' noch angehöre,
3. die Ungleichung $|\psi(x) - \psi(x')| < \frac{1}{2}\beta$ gelte.

Mittels dieser Größe α mögen alsdann wie in Nr. 1 aus B die Bereiche B_1, B_2 und S konstruiert werden.

Da $f(x, y)$ alsdann im Gebiete (S, B') eindeutig und regulär ist, so hat man zunächst ebenso wie in Nr. 1 die Beziehung:

$$(1) \qquad 2\pi i\, f(x, y) = \int_{(B_2)} \frac{f(\xi, y)}{\xi - x}\, d\xi - \int_{(B_1)} \frac{f(\xi, y)}{\xi - x}\, d\xi,$$

wobei x irgend einen inneren Punkt des Gebietes S, y einen beliebigen Punkt von B' bedeutet.

Ist andererseits $x = x_1$ ein beliebiger Punkt von B_1, so gibt es jedenfalls einen Punkt $x = x_0$ von B derart, daß $|x_1 - x_0| < \alpha$; infolge obiger Annahmen gehört also der Punkt $\psi(x_1)$ dem Bereiche B' noch an und es gilt gleichzeitig

$$|\psi(x_1) - \psi(x_0)| < \tfrac{1}{2}\beta.$$

Setzt man daher, unter $\bar{y}$ irgend einen festen Punkt des Bereiches B' verstehend,

$$\Psi_t(x) = \psi(x) + t(\bar{y} - \psi(x))$$

und bezeichnet mit D den Durchmesser eines Kreises, welcher den ganzen Bereich B' umfaßt, so gilt sicher noch:

$$|\Psi_t(x_1) - \psi(x_0)| < \beta,$$

solange t dem absoluten Betrage nach kleiner bleibt als $\frac{\beta}{2D}$. $f(x, y)$ verhält sich nun im Gebiete $|x - x_0| < \beta$, $|y - \psi(x_0)| < \beta$ eindeutig und regulär, speziell also in der Umgebung des Punktes $(x_1, \Psi_t(x_1))$. Da überdies $\psi(x)$ im Bereiche B_1 eindeutig und regulär ist, so stellt demnach $f(x, \Psi_t(x))$, solange nur $|t| < \frac{\beta}{2D}$, eine im Bereiche B_1 eindeutige und reguläre analytische Funktion von x dar, und es gilt somit:

$$\int_{(B_1)} \frac{f(\xi, \Psi_t(\xi))}{\xi - x}\, d\xi = 0 \qquad \left(|t| < \frac{\beta}{2D}\right)$$

für jeden außerhalb B_1 gelegenen Punkt x.

Ist nun t_0 irgend ein der Bedingung $0 \leqq t_0 < 1$ genügender reeller Wert, ξ irgend ein Punkt der Begrenzung des Bereiches B_1, so gehört der Punkt $\psi(\xi)$ und daher auch der

Punkt $\Psi_{t_0}(\xi)$ dem Bereiche B' noch an; wird sodann die Größe t auf das Gebiet $|t - t_0| < \frac{\beta}{D}$ beschränkt, so gilt

$$|\Psi_t(\xi) - \Psi_{t_0}(\xi)| = |t - t_0| \, |\bar{y} - \varphi(\xi)| < \beta$$

und demnach verhält sich die Funktion $f(x, y)$ in der Umgebung des Punktes $(\xi, \Psi_t(\xi))$ noch eindeutig und regulär.[1]) Daraus folgt aber, daß das zuletzt betrachtete Integral — unter x nach wie vor einen außerhalb B_1 gelegenen Punkt verstanden — in jedem Gebiete $|t - t_0| < \frac{\beta}{D}$ $(0 \leq t_0 \leq 1)$ eine reguläre analytische Funktion von t darstellt. Da diese Funktion aber für $|t| < \frac{\beta}{2D}$ verschwindet, so muß sie auch für alle betrachteten Werte von t verschwinden, speziell also für $t = 1$. Mithin reduziert sich die rechte Seite von Gleichung (1) auf ihr erstes Glied; dieses aber stellt — aus genau denselben Gründen wie in Nr. 1 — eine im vollen Gebiete (B_2, B') eindeutige und reguläre Funktion von x und y dar.

5.

Die sämtlichen bisher erwähnten Sätze lassen sich auch auf den Fall beliebig vieler Veränderlichen ausdehnen. Als Grundlage kann dabei der in Nr. 1 bewiesene Satz dienen, wenn derselbe zuvor noch auf eine etwas allgemeinere Form gebracht wird. Liegt nämlich eine analytische Funktion der Veränderlichen $x, y, u, v, w, \ldots$ vor, so kann man, wenn man in der x- und in der y-Ebene die in Nr. 1 gebrauchten Bezeichnungen beibehält, während die Gebiete $G, G', \ldots$ der u-, v-, ... Ebene lediglich der Beschränkung unterliegen sollen, daß sie abgeschlossene Punktmengen darstellen,[2]) jenem Satze die folgende Gestalt geben:

---

[1]) ξ ist nämlich von einem gewissen Punkte der Randkurve C, und $\Psi_t(\xi)$ von dem zu B' gehörigen Punkte $\Psi_{t_0}(\xi)$ um weniger als β entfernt.

[2]) G braucht also nicht notwendig einen 2-dimensionalen Bereich

(A.) Steht von dem Zweige $f(x, y, u, v, \ldots)$ einer analytischen Funktion der Veränderlichen $x, y, u, v, \ldots$ fest, daß er sich in dem ganzen Gebiete eindeutig und regulär verhält, welches besteht

a) aus allen Stellen $(x, y, u, v, \ldots)$, welche durch das Symbol $(C, B', G, G', \ldots)$, sowie

b) aus allen denjenigen, welche durch das Symbol $(B, y_0, G, G', \ldots)$ bezeichnet werden,

so verhält sich die Fortsetzung dieses Zweiges auch noch in dem vollen Gebiete $(B, B', G, G', \ldots)$ eindeutig und regulär.

Da nämlich das in der Voraussetzung erwähnte Gebiet eine abgeschlossene Menge von Punkten $(x, y, u, v, \ldots)$ darstellt, so ist es wiederum möglich, eine positive Größe a so zu wählen, daß, sobald $(x', y', u', v', \ldots)$ irgend einen Punkt dieses Gebietes bedeutet, $f(x, y, u, v, \ldots)$ auch noch in jedem Gebiete $|x - x'| < a, \ldots, |u - u'| < a, \ldots$ eindeutig und regulär sei. Mittels dieser Größe a mögen nun genau wie in Nr. 1 aus dem Bereiche B der x-Ebene die Bereiche B_1, B_2, S, aus dem Bereiche B' der y-Ebene der Bereich B'_1 und schließlich in analoger Weise aus den Bereichen $G, G', \ldots$ die Bereiche $G_1, G'_1, \ldots$ konstruiert werden. Denkt man sich nun den Größen $u, v, \ldots$ bestimmte, den bezüglichen Bereichen $G_1, G'_1, \ldots$ angehörige Werte beigelegt, so besteht, wie in Nr. 1 (p. 229) bewiesen, jedenfalls die Beziehung:

$$2\pi i\, f(x, y, u, v, \ldots) = \int\limits_{(B_2)} \frac{f(\xi, y, u, v, \ldots)}{\xi - x}\, d\xi,$$

wobei x einen inneren Punkt von S, y einen Punkt von B' bedeutet. Die rechte Seite dieser Gleichung stellt aber eine im Innern des vollen Gebietes $(B_2, B'_1, G_1, G'_1, \ldots)$, also speziell im ganzen Gebiete $(B, B', G, G', \ldots)$ eindeutige und reguläre analytische Funktion von $x, y, u, v, \ldots$ dar.

---

darzustellen, sondern kann z. B. auch die Gesamtheit der Punkte einer Kurve, eventuell auch bloß einen einzigen Punkt bedeuten.

Es mögen nun $x_1, x_2, \ldots x_n$ n komplexe Veränderliche bedeuten, und es sei $0 < \mu < \nu < n$. Ein „Bereich B“ der x_ϱ-Ebene werde im folgenden stets mit B_ϱ, seine Randkurve mit C_ϱ bezeichnet; $x_\varrho = x_\varrho^0$ bedeute durchweg einen festen Punkt des Bereiches B_ϱ: endlich möge G_ϱ eine abgeschlossene Menge von Punkten x_ϱ darstellen. Es gilt alsdann zunächst die folgende Verallgemeinerung des obigen Satzes:

(B.) Steht von dem Zweige $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ einer analytischen Funktion der Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ fest, daß er sich in dem ganzen Gebiete eindeutig und regulär verhalte, welches besteht

a) aus allen Stellen

$$(C_1, C_2, \ldots C_\mu, B_{\mu+1}, B_{\mu+2}, \ldots B_\nu, G_{\nu+1}, \ldots G_n),$$

b) aus allen Stellen

$$(B_1, B_2, \ldots B_\mu, x_{\mu+1}^0, x_{\mu+2}^0, \ldots x_\nu^0, G_{\nu+1}, \ldots G_n),$$

so verhält sich die Fortsetzung desselben auch in dem vollen Gebiet $(B_1, B_2, \ldots B_\nu, G_{\nu+1}, \ldots G_n)$ eindeutig und regulär.

Der spezielle Fall dieses Satzes, welcher der Annahme $\mu = 1$ (oder auch der Annahme $\nu = \mu + 1$) entspricht, ergibt sich nämlich ohne weiteres durch mehrmalige Anwendung des vorhergehenden Satzes (A); durch wiederholte Anwendung des so gewonnenen speziellen Satzes ergibt sich sodann der Satz in seiner allgemeinen Fassung.

Durch wiederholte Anwendung des Satzes (B) kann man dann endlich noch folgende weitergehende Verallgemeinerung gewinnen:

(C.) $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ verhalte sich in demjenigen Gebiete eindeutig und regulär, welches besteht

a_1) aus allen Stellen $(C_1, C_2, \ldots C_{n-2}, C_{n-1}, B_n)$,
a_2) aus allen Stellen $(C_1, C_2, \ldots C_{n-2}, B_{n-1}, x_n^0)$,
a_3) aus allen Stellen $(C_1, C_2, \ldots B_{n-2}, x_{n-1}^0, x_n^0)$,
— — — — — — — — — — —
a_n) aus allen Stellen $(B_1, x_2^0, \ldots x_{n-2}^0, x_{n-1}^0, x_n^0)$.

Alsdann verhält sich $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ auch im vollen Gebiete $(B_1, B_2, \ldots B_n)$ eindeutig und regulär.

Was den Satz von Nr. 2 betrifft, so können auch bei diesem sowohl an Stelle von x, als auch an Stelle von y beliebig viele Veränderliche treten. Der Satz erscheint alsdann in der folgenden Form, welche sich unmittelbar als Folgerung aus dem Satze (B.) ergibt:

Es sei C_ϱ ($\varrho = 1, 2, \ldots \mu$) die Randkurve irgend eines Bereiches B_ϱ der x_ϱ-Ebene, welcher den Nullpunkt enthält. Ist alsdann der Punkt $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ eine singuläre Stelle für den Zweig $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ einer analytischen Funktion, während dieser Zweig sich in dem ganzen Gebiete eindeutig und regulär verhält, das aus den Stellen $(C_1, C_2, \ldots C_\mu, 0, 0, \ldots 0)$ besteht, so gibt es eine Zahl $l > 0$ derart, daß zu jedem den Bedingungen $|x^0_{\mu+1}| < l, \ldots |x^0_n| < l$ genügenden Wertsystem $x^0_{\mu+1}, x^0_{\mu+2}, \ldots x^0_n$ eine singuläre Stelle $(x^0_1, x^0_2, \ldots x^0_n)$ jenes Zweiges existiert, für welche x^0_1 dem Bereiche $B_1, \ldots, x^0_\mu$ dem Bereiche B_μ angehört.

Der Satz von Nr. 3 gilt unverändert für einen beliebigen Bereich B der $(x_1, x_2, \ldots x_n)$-Mannigfaltigkeit. Der Beweis ergibt sich ohne weiteres aus dem dortigen, indem man an Stelle von y $n-1$ Veränderliche treten läßt.

Was schließlich die Betrachtungen von Nr. 4 betrifft, so kann man diesen zunächst den folgenden allgemeineren Satz an die Seite stellen:

(D.) Der Funktionszweig $f(x, y, z, \ldots;\ u, v, \ldots)$ verhalte sich eindeutig und regulär in dem ganzen Gebiete, welches besteht

a) aus allen Stellen $(C, B', B'', \ldots;\ G, G', \ldots)$,

b) aus allen Stellen $(B, \psi(x), \chi(x), \ldots;\ G, G', \ldots)$.

Dabei mögen die Bereiche $B', B'', \ldots$ und die Funktionen $\psi(x), \chi(x), \ldots$ analogen Beschränkungen unterworfen sein, wie sie in Nr. 4 bezüglich des Bereiches B' und der Funktion $\psi(x)$ galten, während $G, G', \ldots$ wieder beliebige abgeschlossene Mengen von Punkten der u-, v-, ... Ebene bedeuten. Als-

dann verhält sich $f(x, y, z, \ldots; u, v, \ldots)$ auch im vollen Gebiete $(B, B', B'' \ldots; G, G', \ldots)$ eindeutig und regulär.

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus dem in Nr. 4 mitgeteilten, indem man an Stelle der dortigen Veränderlichen y die Veränderlichen $y, z, \ldots$ treten läßt.

Es möge nun weiterhin angenommen werden, daß jede der Größen $\psi, \chi, \ldots$ überdies noch von $u, v, \ldots$ abhängig sei und zwar für jedes dem Gebiete $G, G', \ldots$ angehörige Wertsystem $u, v, \ldots$ als Funktion von x betrachtet die bisher verlangten Eigenschaften besitze, ferner aber eine im Gebiete $B, G, G', \ldots$ stetige Funktion der Veränderlichen $x, u, v, \ldots$ darstelle. Auch dann bleibt der obige Satz (D) noch unverändert bestehen.

Zum Beweise wähle man zunächst eine Größe $\beta > 0$ derart, daß, wenn $(x', y', z', \ldots; u', v', \ldots)$ eine beliebige der unter a) oder b)[1]) genannten Stellen bedeutet, $f(x, y, z, \ldots; u, v, \ldots)$ noch in jedem Gebiete $|x - x'| < \beta, \ldots; |u - u'| < \beta, \ldots$ eindeutig und regulär sei. Eine zweite Größe $\alpha > 0$ kann alsdann so bestimmt werden, daß, sobald x einen Punkt von B, u, u' zwei der Bedingung $|u - u'| < \alpha$ genügende Punkte von G, analog v, v' zwei der Bedingung $|v - v'| < \alpha$ genügende Punkte von $G', \ldots$ bedeuten, stets die Beziehungen $|\psi(x, u', v' \ldots) - \psi(x, u, v, \ldots)| < \beta$, $|\chi(x, u', v', \ldots) - \chi(x, u, v, \ldots)| < \beta, \ldots$ stattfinden.

Es werde nun in der u-Ebene eine Einteilung in Quadrate Q von der Seitenlänge $\frac{1}{2}\alpha$ vorgenommen und derjenige Teil von G, welcher irgend einem, Q_0, dieser Quadrate (inkl. Begrenzung) angehört, mit G_0, irgend ein Punkt von G_0 mit u_0 bezeichnet. Analog verfahre man in der v-Ebene u. s. f. Dann ist es offenbar gestattet, in den Voraussetzungen des Satzes überall $G, G', \ldots$ durch $G_0, G'_0, \ldots$ und gleichzeitig $\psi(x, u, v, \ldots)$, $\chi(x, u, v, \ldots), \ldots$ durch $\psi(x, u_0, v_0, \ldots)$, $\chi(x, u_0, v_0, \ldots), \ldots$ zu

[1]) In der Zeile b) sind $\psi(x)$, $\chi(x), \ldots$ jetzt durch $\psi(x, u, v, \ldots)$, $\chi(x, u, v, \ldots), \ldots$ ersetzt gedacht.

ersetzen, ohne daß dieselben ihre Gültigkeit verlieren. Nach dem Satze (D.) ist daher $f(x, y, z, \ldots; u, v, \ldots)$ in dem ganzen Gebiete $(B, B', B'', \ldots; G_0, G_0', \ldots)$ eindeutig und regulär und somit, da die Quadrate $Q_0, Q_0', \ldots$ beliebig gewählt werden konnten, auch in dem ganzen Gebiete $(B, B', B'', \ldots; G, G', \ldots)$.

Durch wiederholte Anwendung dieses Satzes ergibt sich dann schließlich jeder der beiden folgenden:

(D'.) Es sei $0 < \mu < n$. Der Funktionszweig $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ verhalte sich eindeutig und regulär in dem ganzen Gebiete, welches besteht

a) aus allen Stellen $(C_1, C_2, \ldots C_\mu, B_{\mu+1}, \ldots B_n)$,

b) aus allen Stellen

$(B_1, B_2, \ldots B_\mu, \psi_{\mu+1}(x_1, \ldots x_\mu), \ldots \psi_n(x_1, \ldots x_\mu))$.

Dabei sollen die Bereiche $B_{\mu+1}, \ldots, B_n$ die erwähnte spezielle Eigenschaft besitzen, die Funktionen $\psi_\varrho(x_1, \ldots x_\mu)$ $(\varrho = \mu + 1, \ldots, n)$ aber im Gebiete $B_1, B_2, \ldots, B_\mu$ eindeutig und regulär sein, und der Punkt $x_\varrho = \psi_\varrho(x_1, \ldots, x_\mu)$, so lange das Wertsystem $x_1, \ldots, x_\mu$ dem Gebiete $B_1, \ldots, B_\mu$ angehört, im Innern des Bereiches B_ϱ gelegen sein. Alsdann ist $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ auch im vollen Gebiete $(B_1, B_2, \ldots B_n)$ eindeutig und regulär.

(D''.) Der Funktionszweig $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ verhalte sich eindeutig und regulär in dem Gebiete, welches besteht

a$_1$) aus allen Stellen $(C_1, C_2, \ldots, C_{n-2}, C_{n-1}, B_n)$,
a$_2$) aus allen Stellen $(C_1, C_2, \ldots, C_{n-2}, B_{n-1}, \psi_n)$,
a$_3$) aus allen Stellen $(C_1, C_2, \ldots, B_{n-2}, \psi_{n-1}, \psi_n)$,
— — — — — — — — — — —
a$_n$) aus allen Stellen $(B_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-2}, \psi_{n-1}, \psi_n)$.

Dabei sollen die Bereiche $B_2, B_3, \ldots, B_n$ die erwähnte spezielle Eigenschaft besitzen, die Größen $\psi_\varrho = \psi_\varrho(x_1, x_2, \ldots, x_{\varrho-1})$ $(\varrho = 2, 3, \ldots, n)$ Funktionen von $x_1, x_2, \ldots, x_{\varrho-1}$ darstellen, welche im Gebiete $B_1, B_2, \ldots, B_{\varrho-1}$ eindeutig und regulär sind.[1]

[1] Doch treten bei der Aufstellung der in irgend einer der n Zeilen

und der Punkt $x_\varrho = \psi_\varrho(x_1, x_2, \ldots, x_{\varrho-1})$, so lange das Wertsystem $x_1, x_2, \ldots, x_{\varrho-1}$ dem Gebiete $B_1, B_2, \ldots, B_{\varrho-1}$ angehört, im Innern des Bereiches B_ϱ gelegen sein. Alsdann ist $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ auch im vollen Gebiete $(B_1, B_2, \ldots, B_n)$ eindeutig und regulär.

genannten Gesamtheit von Stellen als Argumente einer der Funktionen ψ_ϱ jedesmal nur diejenigen Wertsysteme $x_1, x_2, \ldots, x_{\varrho-1}$ tatsächlich auf, welche dem in der nämlichen Zeile aufgeführten Gebiete der $(x_1, x_2, \ldots, x_{\varrho-1})$-Mannigfaltigkeit angehören.

Sitzungsberichte

der

Königl. Bayer. Akademie der Wissenschaften.

Mathematisch-physikalische Klasse.

Sitzung vom 5. Mai 1906.

1. Herr Aurel Voss hält einen Vortrag: „Über Flächen, welche durch Systeme geodätischer Kreise von konstanten Radien in infinitesimale Rhomben zerlegt werden."

Er sprach über diejenigen Flächen, welche durch zwei Scharen von Kurven mit bezüglich konstanter geodätischer Krümmung in infinitesimale Rhomben zerlegt werden. Je nachdem diese beiden Krümmungen voneinander verschieden, oder untereinander gleich resp. entgegengesetzt gleich, oder endlich beide gleich Null sind, ergeben sich Flächengattungen, die auch bei anderen geometrischen Untersuchungen auftreten, und deren Eigenschaften hier unter neuen Gesichtspunkten erscheinen.

2. Herr Hermann Ebert legt eine weitere Arbeit des K. Reallehrers Dr. Anton Endrös in Traunstein: „Die Seeschwankungen (Seiches) des Chiemsees" vor.

Die Schwingungsbewegungen dieses Sees sind deshalb von besonderem Interesse, weil hier erstmalig ein See untersucht wurde, der keine ausgesprochene Längsrichtung und dazu noch

viele Buchten und eine größere Insel besitzt. Die 5jährigen Beobachtungen mit mehreren selbst registrierenden Limnimetern an 19 verschiedenen Punkten des Sees haben ergeben, daß die Schwingungen des Chiemsees mit denjenigen einer schwingenden Platte verglichen werden können, während diejenigen der Langsseen ähnlich den Schwingungen einer Saite sind, daß also Schwingungen der Wassermasse kreuz und quer dort anzutreffen sind. Da aber der See eine ganz unregelmäßige Umrißform hat, also als eine Platte mit vielen Auszackungen und sogar Ausschnitten, den Inseln, sich darstellt, so geben die eingezeichneten Knotenlinien, ähnlich den Chladnischen Klangfiguren, ein verwickeltes Liniensystem. Der Chiemsee hat allein 3 uninodale Seiches von 54 Minuten, 41 Minuten und 36 Minuten mittlerer Dauer. Außerdem wurden noch 14 weitere Schwingungen geringerer Periodendauer beobachtet, welche als mehrknotige Schwingungen in der einen oder anderen Richtung, teils nur südlich teils nur nördlich der Herreninsel und häufig in beiden Richtungen schwingen. Zugleich konnte der Einfluß der Tieferlegung des Seespiegels, welche in die Beobachtungszeit fällt, auch wissenschaftlich nutzbar gemacht werden, also gleichsam ein Experiment größten Stiles angestellt werden. Die Änderung der Schwingungsverhältnisse sind bedeutende, da sich die schwingende Platte stark verkleinert und neue Einschnitte in Gestalt von Landzungen und größere Ausschnitte durch Vergrößerung der Inseln und sogar zwei neue durch zwei weitere Inseln erhalten hat, so daß die Dauer der Schwingungen sich merklich geändert hat, einzelne Seiches überhaupt nicht mehr auftreten, dafür neue Schwingungen anzutreffen sind. Im ganzen haben wohl diese zum Teil schwierigen Untersuchungen am Chiemsee unsere Kenntnisse über die Seichesbewegungen der Seen wesentlich gefördert, und dürften in ihrer Verallgemeinerung für die schwebenden Probleme an anderen Seen sowohl als auch für die stehenden Schwingungen in den Meeren, wie in der Arbeit kurz angedeutet ist, nutzbar gemacht werden können.

3. Herr Ferdinand Lindemann überreicht eine zweite zu den Abhandlungen zur Elastizitätstheorie gehörige Abhandlung von Herrn Professor Artur Korn: „Die Eigenschwingungen eines elastischen Körpers mit ruhender Oberfläche."

Nach der allgemeinen Lösung des elastischen Gleichgewichtsproblems für den Fall, daß die Verrückungen an der Oberfläche gegeben sind, konnte in der zweiten Abhandlung zu der Frage nach den Eigenschwingungen übergegangen werden, deren ein elastischer Körper bei ruhender Oberfläche fähig ist. Es ergibt sich nur die Existenz einer unendlichen Zahl solcher Eigenschwingungen, und jeder Eigenschwingung ist ein ganz bestimmtes Triplet von Funktionen des von dem elastischen Körper eingenommenen Raumes und eine ganz bestimmte Zahl zugeordnet, aus der sich sofort die Schwingungsdauer der betreffenden Eigenschwingung berechnen läßt. Die Untersuchungen dieser Abhandlungen beweisen die Existenz dieser Funktionentripel und den für die Elastizitätstheorie wichtigen Satz, daß jedes beliebige Triplet von Funktionen, die in dem gegebenen Raume gewisse Stetigkeitseigenschaften erfüllen, nach diesen elastischen Funktionentripeln entwickelbar sind. Mit Hilfe dieser Entwickelungen können alle Bewegungsprobleme der Elastizitätstheorie für den Fall, daß die Geschwindigkeiten an der Oberfläche des elastischen Körpers gegeben sind, in sehr allgemeiner Weise gelöst werden. Die Theorie stellt eine Analogie der sogenannten harmonischen Funktionen Poincarés dar, die Analogie, wie sie gerade in der Elastizitätstheorie gebraucht wird.

4. Herr Richard Hertwig legt eine für die Denkschriften bestimmte Arbeit des Herrn Dr. W. Kükenthal, Professors der Zoologie in Breslau: über „Japanische Alcyonaceen" vor.

Dieselbe behandelt vornehmlich das reiche Material, welches Herr Dr. Doflein, II. Konservator der Staatssammlung, auf seiner Reise nach Japan gesammelt hat. Zur Ergänzung wurden Materialien herangezogen, welche teils von Herrn

Professor HABERER der Staatssammlung geschenkt worden waren teils aus den Museen von Wien, Berlin und Hamburg stammten. Die Untersuchungen lieferten eine neue Bestätigung für die Ansicht, daß die japanische Meeresfauna einen eigenartigen Charakter besitzt. Von den 33 Arten, welche in der Arbeit beschrieben werden, sind nicht weniger als 21 für die Wissenschaft neu. Manche sonst verbreitete Familien wie die Alcyoniden sind in Japan kaum vertreten, andere wie die Nidulinen und die Nephthyiden haben umgekehrt gerade hier eine besondere Entfaltung erfahren. Der auffallend große Reichtum an Arten auf einem verhältnismäßig eng begrenzten Gebiet erklärt sich aus den besonderen Tiefen- und Strömungsverhältnissen des Meeres.

Über diejenigen Flächen, welche durch zwei Scharen von Kurven konstanter geodätischer Krümmung in infinitesimale Rhomben zerlegt werden.

Von **A. Voss.**

(Eingelaufen 21. Mai.)

Über Eigenschaften von Kurvenscharen konstanter geodätischer Krümmung auf krummen Flächen habe ich bereits vor längerer Zeit den folgenden Satz ausgesprochen, der die Verallgemeinerung eines bekannten Satzes von Liouville bildet:[1])

„Schneiden sich zwei Kurvensysteme von den konstanten geodätischen Krümmungen γ_1 und γ_2 auf einer Fläche überall unter konstantem Winkel, so ist die Fläche von negativer konstanter Krümmung.“ Nur in dem ganz speziellen Falle, wo die Krümmungen γ_1, γ_2 gleichzeitig Null sind, also die beiden Kurvenscharen in geodätische Linien übergehen, wird die Krümmung gleich Null, oder die Fläche developpabel.

In der folgenden Note untersuche ich nun die Form des Längenelementes derjenigen Flächen, welche durch ein Kurvensystem von den konstanten geodätischen Krümmungen γ_1, γ_2 in infinitesimale Rhomben geteilt werden — Flächen mit infinitesimaler rhombischer Teilung[2]) durch

[1]) Vgl. Über die Fundamentalgleichungen der Flächentheorie, diese Sitzungsber. Bd. XXII, p. 268, 1892; desgleichen die Inauguraldissertation von F. Probst, Über Flächen mit isogonalen Systemen von geodätischen Kreisen. Würzburg 1893.

[2]) Statt dessen soll auch einfach rhombische Teilung gesagt werden.

geodätische Kreise von konstanten Radien, wie man auch sagen könnte.[1])

---

[1]) Es seien hier noch folgende Bemerkungen über infinitesimale Teilung in Rhomben angeführt. Aus jedem rhombischen System

$$ds^2 = e(du^2 + dv^2) + 2f\,du\,dv$$

erhält man ein Orthogonalsystem

$$\left(\frac{e+f}{2}\right) du'^2 + \left(\frac{e-f}{2}\right) dv'^2,$$

wenn man

$$u' = u + v, \quad v' = u - v$$

setzt, vermöge der Diagonalkurven der Rhomben. Umgekehrt erhält man auch aus jedem Orthogonalsystem

$$e_1\,du_1^2 + g_1\,dv_1^2$$

durch die Substitution

$$u' = u + v, \quad v' = u - v$$

das rhombische System

$$(e_1 + g_1)\,(du^2 + dv^2) + 2\,du\,dv\,(e_1 - g_1).$$

Die Auffindung aller Kurvensysteme, welche eine Fläche in infinitesimale Rhomben zerlegen, ist daher identisch mit der Ermittelung aller Orthogonalsysteme.

Es gehört ferner zu jeder Kurvenschar eine unendliche Anzahl anderer Scharen, welche mit der ersten eine rhombische Teilung bewirken.

Ist nämlich

$$ds^2 = e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2$$

das Längenelement, und geht dasselbe durch die Substitutionen

$$u = u_1, \quad v_1 = \psi(u, v)$$

in

$$ds^2 = e_1\,(du_1^2 + dv_1^2) + 2\,du_1\,dv_1\,f_1$$

über, so ist

$$e = e_1\,(1 + \psi_u^2) + 2\,\psi_u\,f_1,$$

$$f = e_1\,\psi_u\,\psi_v + \psi_v\,f_1,$$

$$g = e_1\,\psi_v^2.$$

Hieraus folgt durch Elimination von f_1 und e_1 die partielle Differentialgleichung

$$e\,\psi_v^2 - 2f\,\psi_u\,\psi_v + g\,\psi_u^2 = g,$$

d. h. man hat unter Anwendung des Symboles Δ für den ersten Differentialparameter

$$\Delta(\psi) = \Delta(u).$$

Man überzeugt sich leicht, daß nicht auf jeder Fläche derartige Systeme möglich sind, sondern daß nur Flächen eines charakteristischen Längenelementes solche Systeme zulassen, und auf die Bestimmung dieses letzteren kann es hier allein ankommen, da die geforderte Eigenschaft allen zueinander isometrisch zugeordneten Flächen gleichmäßig zukommt.

§ 1.

Flächen mit infinitesimal rhombischer Teilung durch Kurven, deren konstante geodätische Krümmungen weder gleich noch entgegengesetzt gleich sind.

Bezeichnet man das Quadrat des Längenelementes auf der Fläche mit

$$ds^2 = e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2, \tag{1}$$

so sind bekanntlich die geodätischen Krümmungen der Koordinatenlinien $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ oder g_u und g_v gegeben durch[1])

$$\begin{aligned} \frac{\partial\sqrt{g}}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial v}\frac{f}{\sqrt{g}} &= -g_u\sqrt{\Delta} \\ \frac{\partial\sqrt{e}}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial u}\frac{f}{\sqrt{e}} &= -g_v\sqrt{\Delta}, \end{aligned} \tag{2}$$

So sind z. B. alle rhombischen Teilungen der Ebene, bei denen die eine Schar aus Parallelen resp. aus einem Strahlbüschel besteht, abhängig von den Gleichungen

$$\psi_v^2 + \psi_u^2 = 1$$

resp.

$$v_1^2\,\psi_{v_1}^2 + \psi_u^2 = 1,$$

welche letztere durch die Substitution $l\,v_1 = v$ auf die obere zurückgeführt wird. Analog kann man die Teilungen einer Rotationsfläche, bei denen entweder die Parallelkreise oder die Meridiane als Kurven $u = \text{const}$ gewählt werden, auf die Gleichung

$$\psi_v^2 + \psi_u^2 = F u$$

zurückführen.

[1]) Vgl. z. B. J. Knoblauch, Einleitung in die Theorie der krummen Flächen, Leipzig 1888, p. 248.

wo
$$\Delta = eg - f^2$$
gesetzt ist.

Soll nun wegen der rhombischen Teilung $e = g = \varepsilon^2$ und $g_u = -c_1$, $g_v = -c$ sein, setzt man ferner
$$f = \varepsilon\varphi,$$
so daß $\frac{\varphi}{\varepsilon}$ der Kosinus des Koordinatenwinkels ω ist, so hat man aus 2)

$$2^a)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial\varepsilon}{\partial u} - \frac{\partial\varphi}{\partial v} &= c_1\,\varepsilon\sqrt{\varepsilon^2 - \varphi^2} \\ \frac{\partial\varepsilon}{\partial v} - \frac{\partial\varphi}{\partial u} &= c\,\varepsilon\sqrt{\varepsilon^2 - \varphi^2}. \end{aligned}$$

Wird ferner die Substitution

$$3)\qquad \begin{aligned} u_1 &= c\,u + c_1\,v, \\ v_1 &= c_1\,u + c\,v \end{aligned}$$

eingeführt, was unter der Voraussetzung, daß die geodätischen Krümmungen der Koordinatenlinien weder gleich, noch entgegengesetzt gleich sind.[1]) oder
$$\lambda = c^2 - c_1^2 \neq 0$$
ist, zulässig ist, so hat man
$$\begin{aligned} \lambda\,u &= c\,u_1 - c_1\,v_1 \\ \lambda\,v &= c\,v_1 - c_1\,u_1. \end{aligned}$$

Aus den Gleichungen
$$\frac{\partial}{\partial u} = c\frac{\partial}{\partial u_1} + c_1\frac{\partial}{\partial v_1},\quad \frac{\partial}{\partial v} = c_1\frac{\partial}{\partial u_1} + c\frac{\partial}{\partial v_1}$$
$$\lambda\frac{\partial}{\partial u_1} = c\frac{\partial}{\partial u} - c_1\frac{\partial}{\partial v},\quad -\lambda\frac{\partial}{\partial v_1} = c_1\frac{\partial}{\partial u} - c\frac{\partial}{\partial v_1}$$
folgt nun nach 2[a])

---

[1]) In Wirklichkeit kommt es auf das Verhältnis der Krümmungen c und c_1 an, da man durch Ähnlichkeitstransformation von jeder Fläche zu einer anderen übergehen kann, welcher dasselbe Verhältnis $c : c_1$ und derselbe Koordinatenwinkel ω zukommt.

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial u_1} = \frac{\partial \varphi}{\partial v_1}$$

oder

$$4) \qquad \varepsilon = \frac{\partial \psi}{\partial v_1}, \quad \varphi = \frac{\partial \psi}{\partial u_1},$$

wo ψ eine willkürliche Funktion der Argumente u_1. v_1 bezeichnet. Führt man, in dem man statt der Differentialquotienten

$$\frac{\partial F}{\partial u}, \ \frac{\partial^2 F}{\partial u^2}, \ \frac{\partial F}{\partial v} \dots$$

der Kürze halber

$$F_u, \ F_{uu}, \ F_v \dots$$

schreibt, die Werte in 4) in die Gleichungen 2[a]) ein, so ergibt sich zur Bestimmung von ψ die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\text{A)} \qquad \psi_{v_1 v_1} - \psi_{u_1 u_1} = \psi_{v_1} \sqrt{\psi_{v_1}^2 - \psi_{u_1}^2},$$

welche von c und c_1 gänzlich unabhängig ist.

Und umgekehrt gehört zu jeder Lösung der Gleichung A vermöge der Substitution 3) und der Gleichungen 4) das Längenelement einer Fläche, welche durch die Kurven $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ mit den konstanten geodätischen Krümmungen $-c_1$, $-c$ in infinitesimale Rhomben zerlegt wird, falls nur die Voraussetzung

$$c^2 - c_1^2 \neq 0$$

eingehalten wird.

Das Quadrat des Längenelementes der Fläche 1) wird in Bezug auf die Variabeln u_1. v_1

$$5) \qquad ds^2 = \frac{c^2 + c_1^2}{(c^2 - c_1^2)^2}$$
$$[(du_1^2 + dv_1^2)(\varepsilon^2 + \varepsilon \varkappa \varphi) + 2\, du_1\, dv_1\, (\varepsilon \varphi + \varepsilon^2 \varkappa)],$$

wo zur Abkürzung

$$\varkappa = -\frac{2\,c\,c_1}{c^2 + c_1^2}\,^{1)}$$

gesetzt ist. und der Kosinus des Koordinatenwinkels ω^1 der Kurven u_1. v_1 steht mit ω in der Beziehung

$$\cos\omega^1 = \frac{\cos\omega + \varkappa}{1 + \varkappa\cos\omega}.$$

Die Kurven $u_1 = \text{const}$, $v_1 = \text{const}$ bilden daher wieder eine rhombische Teilung der Fläche.

Wählt man insbesondere $\varkappa = 0$, d. h. etwa $c_1 = 0$, $c = -1$ so wird

$$\begin{aligned} ds^2 &= (d u_1^2 + d v_1^2)\,\psi_{v1}^2 + 2\,d u_1\,d v_1\,\psi'_{u1}\,\psi'_{v1} \\ &= d\psi^2 + d u_1^2\,(\psi_{v1}^2 - \psi_{u1}^2). \end{aligned}$$

Die Fläche hat daher jetzt die Kurven $u_1 = \text{const}$ zu geodätischen Linien, während die Linien $v_1 = \text{const}$ von der geodätischen Krümmung $+1$ sind, woraus man durch Ähnlichkeitstransformation diejenigen Flächen erhält, bei denen das eine System aus geodätischen Kurven, das andere aus Kurven von konstanter geodätischer Krümmung besteht.

Es ist übrigens leicht zu zeigen, daß nicht auf jeder beliebigen Fläche solche Kurvensysteme, wie die hier betrachteten, existieren. Aus der Bonnetschen Formel[2]) für die geodätische Krümmung g_φ der Kurven $\varphi = \text{const}$

$$-g_\varphi\sqrt{\varDelta} = \frac{\partial}{\partial u}\left\{\frac{g\,\varphi_u - f\,\varphi_v}{s}\right\} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{e\,\varphi_v - f\,\varphi_u}{s}\right),$$

$$s = \sqrt{g\,\varphi_u^2 - 2\,f\,\varphi_u\,\varphi_v + e\,\varphi_v^2},$$

folgt nämlich, unter der Voraussetzung, daß die Fläche auf ihre Minimalkurven $e = g = 0$ bezogen sei

$$-f\sqrt{2}\,g_\varphi = \frac{\partial}{\partial u}\sqrt{f\frac{\varphi_v}{\varphi_u}} + \frac{\partial}{\partial v}\sqrt{f\frac{\varphi_u}{\varphi_v}}$$

---

[1]) $\varkappa$ darf dabei den Wert $+1$ nicht annehmen.

[2]) Vgl. z. B. Knoblauch, a. a. O., p. 247.

oder, wenn man $\frac{\varphi_v}{\varphi_u}$ mit z^2, f mit $1 : \lambda^2$ bezeichnet:

6ᵃ)
$$-\sqrt{2}\, g_\varphi = \lambda \frac{\partial z}{\partial u} - z \frac{\partial \lambda}{\partial u} + \lambda \frac{\partial \frac{1}{z}}{\partial v} - \frac{1}{z} \frac{\partial \lambda}{\partial v}.$$

Soll nun auf einer zweiten Kurve $\psi = \text{const}$ die geodätische Krümmung wieder einen vorgeschriebenen Wert g_ψ haben, so wird für $\frac{\psi_v}{\psi_u} = \zeta^2$

6ᵇ)
$$-\sqrt{2}\, g_\psi = \lambda \frac{\partial z}{\partial u} - \zeta \frac{\partial \lambda}{\partial u} + \lambda \frac{\partial \frac{1}{\zeta}}{\partial v} - \frac{1}{\zeta} \frac{\partial \lambda}{\partial v}.$$

Damit endlich eine rhombische infinitesimale Teilung durch die Kurven $\varphi = \text{const}$, $\psi = \text{const}$ hervorgebracht werde, muß

$$\psi_u \psi_v = \varphi_u \varphi_v$$

sein. Setzt man nämlich

$$\varphi_u\, d u + \varphi_v\, d v = d \varphi$$
$$\psi_u\, d u + \psi_v\, d v = d \psi,$$

so wird, wenn man mit ϱ die Funktionaldeterminante von φ und ψ bezeichnet,

$$\varrho\, d u = \psi_v\, d \varphi - \varphi_v\, d \psi$$
$$\varrho\, d v = \varphi_u\, d \psi - \psi_u\, d \varphi$$

oder

$$-d s^2 = \frac{2 f}{\varrho^2} \left[d \varphi^2 \psi_v \psi_u + d \psi^2 \varphi_v \varphi_u - d \varphi\, d \psi \,(\psi_v \varphi_u + \varphi_v \psi_u)\right].$$

Setzt man demgemäß

$$\psi_u = \frac{\mu}{\zeta}, \quad \varphi_u = \frac{\mu}{z}$$
$$\psi_v = \mu \zeta, \quad \varphi_v = \mu z,$$

wo μ eine neue unbekannte Funktion ist, so ergibt sich durch die Integrabilitätsbedingungen in Bezug auf φ und ψ, sowie

in Bezug auf μ, eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung für z und ζ, so daß man mit 6[a]), 6[b]) im ganzen drei partielle Differentialgleichungen für z und ζ hat, welche nur für gewisse Formen von λ oder f miteinander verträglich sein werden, wie dies übrigens auch schon aus der oben angegebenen Form des Längenelementes ersichtlich sein dürfte.

§ 2.

Beispiele zu § 1.

Die partielle Differentialgleichung A des § 1, welche durch die Substitutionen

$$u_2 = u_1 + v_1$$
$$v_2 = v_1 - u_1$$

auch auf die Form

$$2\,\psi_{u_2 v_2} = (\psi_{u_2} + \psi_{v_2})\sqrt{\psi_{u_2}\,\psi_{v_2}}$$

oder in gewöhnlicher Schreibweise in die Gestalt

$$4\,s^2 = (p+q)^2\,p\,q$$

gebracht werden kann, scheint einer allgemeinen Behandlung in dem hier erforderlichen Sinne nicht zugänglich. Ich beschränke mich daher auf die Betrachtung einfacher partikulärer Lösungen derselben.

1. Setzt man

$$\psi = u_1\,\lambda + V$$

wo V eine Funktion von v_1 allein ist, und die Konstante λ, wie im folgenden geschehen soll, auch gleich 1 gesetzt werden kann, so folgt aus A § 1,

$$V'' = V'\sqrt{V'^2 - 1}$$

oder

$$\arccos\frac{1}{V'} = v_1,\quad V' = \frac{1}{\cos v_1}$$

mithin wird

$$\varepsilon = \psi_{v1} = \frac{1}{\cos v_1}$$

$$\varphi = \psi_{u1} = 1$$

und der Kosinus des Koordinatenwinkels ist

$$\cos \omega = \cos v_1.$$

Das Quadrat des Längenelementes wird daher nach § 1, 5

$$d s^2 = \frac{c^2 + c_1^2}{(c^2 - c_1^2)^2} \times$$

$$\left\{ (d u_1^2 + d v_1^2) \left(\frac{1}{\cos^2 v_1} + \frac{\varkappa}{\cos v_1} \right) + 2\, d u_1\, d v_1 \left(\frac{\varkappa}{\cos^2 v_1} + \frac{1}{\cos v} \right) \right\}$$

oder

$$d s^2 = \frac{c^2 + c_1^2}{(c^2 - c_1^2)^2} \frac{1}{\cos^2 v_1} \times$$

$$\{(d u_1^2 + d v_1)(1 + \varkappa \cos v_1) + 2\, d u_1\, d v_1 (\varkappa + \cos v_1)\}.$$

Bestimmt man nun nach der Weingartenschen Formel[1])

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{A}} \left[\frac{\partial}{\partial u} \frac{1}{\sqrt{A}} \left(\frac{\partial e}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \frac{1}{\sqrt{A}} \left(\frac{\partial e}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial u} \right) \right]$$

$$A = e^2 - f^2$$

das Krümmungsmaß K, so ergibt sich

$$K = -\frac{1}{(1 - k^2)} : \frac{c^2 + c_1^2}{(c^2 - c_1^2)^2} = -(c^2 + c_1^2).$$

Die Fläche ist daher von konstanter negativer Krümmung, der Koordinatenwinkel aber nicht von den Variabeln unabhängig.

2. Setzt man dagegen:

$$\psi = v_1 + U,$$

so ist

$$-U'' = \sqrt{1 - U'^2}$$

oder:

$$\text{arc} \cos U' = u_1,$$

---

[1]) Vgl. z. B. Knoblauch, a. a. O., p. 177.

d. h.

$$\varepsilon = 1, \ \varphi = \cos u.$$

Daher wird

$$d s^2 = \frac{c^2 + c_1^2}{(c^2 - c_1^2)^2} \left[(du_1^2 + dv_1^2)(1 + \varkappa \cos u_1) + 2\, du_1\, dv_1 (\cos u_1 + \varkappa)\right]$$

und das Krümmungsmaß wird jetzt gleich Null.

3. Man kann ferner ψ als Funktion von $\alpha u_1 + \beta v_1 = z$ annehmen. Setzt man $\psi = F(z)$, so ist[1])

$$(\beta^2 - \alpha^2) F'' = F'^2 \beta \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}$$

oder

$$F' = \frac{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}}{\beta (\alpha u_1 + \beta v_1)}.$$

Da hier

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}}{(\alpha u_1 + \beta v_1)}, \ \varphi = \frac{\alpha \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}}{\beta (\alpha u_1 + \beta v_1)},$$

so wird $\frac{\varphi}{\varepsilon}$ konstant; d. h. die Fläche ist konstanter negativer Krümmung.

4. Setzt man endlich

$$\psi = F\left(\frac{u_1}{v_1}\right) = F(z),$$

so wird die Differentialgleichung A

$$F'' + \frac{2 u_1 v_1}{u_1^2 - v_1^2} F' = - F'^2 \frac{u_1}{\sqrt{u_1^2 - v_1^2}},$$

wobei die Indizes von F die Differentiationen nach z angeben. Für $F' = 1/\zeta$ erhält man

$$\frac{\partial \zeta}{\partial z} - \frac{2 z \zeta}{z^2 - 1} = \frac{z}{\sqrt{z^2 - 1}},$$

[1]) Der Wert $\alpha = +\beta$ ist hier nicht zulässig. Allerdings ist dann die Funktion F willkürlich, aber $\cos \omega$ wird gleich $+1$, was keinen Sinn hat.

oder
$$\zeta = -\sqrt{z^2 - 1} + k(z^2 - 1)$$
$$F' = \frac{v_1^2}{k(u_1^2 - v_1^2) - v_1\sqrt{u_1^2 - v_1^2}},$$

wo k eine willkürliche Konstante. Demgemäß wird

$$\varepsilon = -\frac{u_1}{k(u_1^2 - v_1) - v_1\sqrt{u_1^2 - v_1^2}}$$

$$\varphi = +\frac{v_1}{k(u_1^2 - v_1) - v_1\sqrt{u_1^2 - v_1^2}}$$

und zugleich wird

$$\cos\omega = -\frac{v_1}{u_1} = -\frac{u c_1 + v c}{u c + v c_1}.$$

Die Flächen dieser Klasse zeichnen sich durch eine besondere Eigenschaft aus, welche im nächsten § 3 nachgewiesen wird.

§ 3.

Die Differentialgleichung für den Koordinatenwinkel ω.

Durch die vorige Betrachtung ist die Bestimmung des Längenelementes auf die partielle Differentialgleichung A des § 1 zurückgeführt. Man kann statt derselben auch eine analoge Gleichung für den Winkel ω der Kurven u, v ermitteln. Hierzu würde nur eine Transformation der genannten Gleichung erforderlich sein, doch erscheint es angemessener, die ursprünglichen Variabeln u, v jetzt beizubehalten. Setzt man

$$\varphi = \varepsilon\cos\omega$$
$$\varepsilon = {}^1/\eta,$$

so gehen die Gleichungen 2ª) des § 1 über in

$$1)\qquad -\eta_u = -\eta\left[\frac{\omega_v}{\sin\omega} + \operatorname{cotg}\omega\,\omega_u\right] + \frac{c_1 + c\cos\omega}{\sin\omega}$$

$$-\eta_v = -\eta\left[\frac{\omega_u}{\sin\omega} + \operatorname{cotg}\omega\,\omega_v\right] + \frac{c_1\cos\omega + c}{\sin\omega},$$

und man hat nur die Integrabilitätsbedingungen für die Funktion η zu bilden. Ist nun allgemein

$$-\xi_u = -\xi A' + B'$$
$$-\xi_v = -\xi A + B,$$

so folgt aus den Integrabilitätsbedingungen für ξ

$$\text{2)} \qquad \xi\,[A'_v - A_u] + (B_u + B' A) - (B'_v + B A') = 0.$$

Ist also nicht gleichzeitig

$$\text{3)} \qquad \begin{aligned} A'_v - A_u &= 0 \\ B_u + B' A &= B'_v + B A', \end{aligned}$$

so ist ξ völlig bestimmt. Unter diesen Umständen gehört also auch zu dem Werte ω in den Gleichungen 1) eine völlig bestimmte Form des Längenelementes, d. h. eine ganz bestimmte Klasse zueinander isometrischer Flächen. Sind dagegen die beiden Gleichungen 3) erfüllt, so wird ξ im allgemeinen noch eine für das Längenelement wesentliche Konstante enthalten; d. h. es existieren dann ∞^1 Flächen mit rhombischer Teilung durch Kurven konstanter geodätischer Krümmung, ohne daß sich dabei der von diesen eingeschlossene Winkel ω ändert.[1])

Man hat nun:

$$A' = \frac{\omega_v}{\sin\omega} + \omega_u \operatorname{cotg}\omega$$

$$A = \frac{\omega_u}{\sin\omega} + \omega_v \operatorname{cotg}\omega$$

$$B = \frac{c_1 + c\cos\omega}{\sin\omega}$$

$$B' = \frac{c + c_1\cos\omega}{\sin\omega};$$

also

[1]) Dabei ist selbstverständlich nicht ausgeschlossen, daß diese Flächen selbst zueinander isometrisch sein können.

$$4)\qquad A_u - A'_v = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\omega_u}{\sin\omega}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\omega_v}{\sin\omega}\right)$$

$$B_u - B' A = \omega_v \frac{\cos\omega}{\sin^2\omega}(c_1 + c\cos\omega)$$

$$B'_v - B A' = \omega_u \frac{\cos\omega}{\sin^2\omega}(c_1\cos\omega + c).$$

Der zuletzt genannte Fall kann, abgesehen von der Möglichkeit $\omega = \text{const}$, wo die Fläche wegen der konstanten Krümmung ∞^3 Transformationen in sich zuläßt,[1]) nur stattfinden, wenn

$$5)\qquad \omega_v\,[c_1 + c\cos\omega] = \omega_u\,[c_1\cos\omega + c]$$

und die erste der Gleichungen 4) erfüllt ist. Aus dieser letzteren folgt aber unmittelbar

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2}\left(\log\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}\right) = \frac{\partial^2}{\partial v^2}\left(\log\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}\right)$$

oder

$$\operatorname{tg}\frac{\omega}{2} = F\cdot\Phi,$$

wo F, resp. Φ Funktionen der Argumente $u+v$, resp. $u-v$ allein sind. Setzt man nun

$$\cos\omega = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\omega}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\omega}{2}},$$

so ergibt sich aus 5) die Funktionalgleichung für F und Φ

$$6)\qquad 0 = (c - c_1)\,F'\,F^2\,\Phi^3 + (c + c_1)\,\Phi'\,F$$

oder

$$2\,F\,F'\,(c_1 - c) = 2\,(c + c_1)\,\frac{\Phi'}{\Phi^3} = h,$$

wo h eine willkürliche Konstante bedeutet.

---

[1]) Hierüber vgl. § 8, 9, 10.

Demnach wird, falls $(c^2 - c_1^2) \neq 0$

$$F^2 = \frac{h(u+v)}{c_1 - c}$$

$$\frac{1}{\Phi^2} = -\frac{h(u-v)}{c + c_1},$$

wo die Integrationskonstanten als ganz unwesentlich von vornherein gleich Null gewählt sind. Mithin ergibt sich

$$F = \sqrt{\frac{h(u+v)}{c_1 - c}}$$

$$\Phi = \sqrt{\frac{-(c+c_1)}{h(u-v)}},$$

und hieraus folgt

$$\cos\omega = -\frac{u c_1 + v c}{u c + v c_1};$$

d. h. gerade der Wert, der sich bei dem früheren Ansatze in § 2 ergeben hatte. In der Tat ergibt sich nun nach entsprechender Rechnung auch genau die dort angegebene Form des Längenelementes, welche noch eine willkürliche wesentliche Konstante k enthält.

Es wird nämlich

$$\sin\omega = \frac{\sqrt{u^2 - v^2}\sqrt{c^2 - c_1^2}}{u c + v c_1}$$

$$A = \frac{\partial}{\partial v} \log\left(\frac{u^2 - v^2}{u c + v c_1}\right)$$

$$A' = \frac{\partial}{\partial u} \log\left(\frac{u^2 - v^2}{u c + v c_1}\right)$$

$$B = \frac{u\sqrt{c^2 - c_1^2}}{\sqrt{u^2 - v^2}}$$

$$B' = -\frac{v\sqrt{c^2 - c_1^2}}{\sqrt{u^2 - v^2}}.$$

Setzt man noch

$$\frac{1}{\psi} = \frac{u^2 - v^2}{u c + v c_1},$$

so werden die Differentialgleichungen 1)

$$\psi \eta_u + \eta \psi_u - \psi v \frac{\sqrt{c^2 - c_1^2}}{\sqrt{u^2 - v^2}} = 0$$

$$\psi \eta_v + \eta \psi_v + \psi u \frac{\sqrt{c^2 - c_1^2}}{\sqrt{u^2 - v^2}} = 0,$$

so daß

$$\frac{d \eta \psi}{\sqrt{c^2 - c_1^2}} + \int \frac{(u c + v c_1)}{(u^2 - v^2)^{3/2}} (u\, d v - v\, d u) = 0$$

oder

$$\frac{\eta}{\sqrt{c^2 - c_1^2}} = \frac{k (u^2 - v^2) - (c u + c_1 v) \sqrt{u^2 - v^2}}{u c + v c_1}$$

wird, wo k die Integrationskonstante.

Demgemäß wird

$$\varepsilon \sqrt{c^2 - c_1^2} = \frac{u c + v c_1}{k (u^2 - v^2) - (c u + c_1 v) \sqrt{u^2 - v^2}}$$

und wenn man den Nenner mit w bezeichnet, so daß

$$w = k (u^2 - v^2) - (c u + c_1 v) \sqrt{u^2 - v^2}$$

ist, wird das Längenelement

$$d s^2 = \frac{1}{w^2 (c^2 - c_1{}^2)} \times$$

$$[(d u^2 + d v^2) (u c + v c_1)^2 - 2 (u c_1 + v c) (u c + v c_1)\, d u\, d v].$$

Die Koeffizienten desselben sind in u, v homogene Funktionen vom Grade -2. Nach einem bekannten Satze von Bour[1]) ist aber dasselbe einer zu einer Rotationsfläche isometrischen Fläche angehörig.

[1]) Vgl. z. B. Maurice Lévy, Sur le développement des surfaces dont l'élément linéaire est exprimable par une fonction homogène. Compt. Rend. 87, p. 788.

Das Krümmungsmaß K kann am einfachsten vermöge der folgenden Formel berechnet werden, welche nur noch Differentialquotienten von ω enthält:

$$\sin^2 \omega\, K = \frac{\omega_{uv} \sin \omega}{e} - (c^2 + 2\, c\, c_1 \cos \omega + c_1^2)$$
$$+ \frac{\omega_v (c_1 + c \cos \omega) + \omega_u (c + c_1 \cos \omega)}{\sqrt{e}},$$

hat aber bei beliebigem c, c_1 keinen einfachen Wert. Ist indessen c_1 (oder auch c) gleich Null, so ergibt sich eine Fläche negativer konstanter Krümmung. Man sieht dies am leichtesten aus der oben gegebenen Form von $d s^2$, welche in dem genannten Falle die Gestalt

$$d s^2 = \frac{(d u^2 + d v^2) u^2 - 2 v u\, d u\, d v}{(k (u^2 - v^2) - c v \sqrt{u^2 - v^2})^2}$$

annimmt. Setzt man $u^2 - v^2 = u_1^2$, $v = v$, so erhält man

$$d s^2 = \frac{d u_1^2 + d v_1^2}{(k u_1 - c v_1)^2}$$

und dies ist das Längenelement einer Fläche von dem Krümmungsmaße

$$-(k^2 + c^2).$$

Man hat also den folgenden Satz:

Die einzigen Flächen, bei denen Systeme von Kurven geodätischer, durchweg konstanter Krümmung c, c_1 ($c^2 - c_1^2 \neq 0$) existieren, und bei denen zu ein und demselben Koordinatenwinkel ω noch ∞^1 Längenelemente gehören, sind diejenigen, bei denen

$$\cos \omega = - \frac{u c_1 + v c}{u c + v c_1}$$

ist. Sie sind zu Rotationsflächen isometrisch.[1]) In

[1]) Ich unterlasse es, den Typus dieser Rotationsflächen anzugeben, der in bekannter Weise erhalten werden kann, aber keine einfache Gestalt anzunehmen scheint.

dem besonderen, Falle wo die eine Kurvenschar aus geodätischen Linien gebildet ist, sind die betreffenden Flächen von konstanter negativer Krümmung.

In der Gleichung 6) ist indessen der Fall $c^2 = c_1^2$, der in den sich daran schließenden Betrachtungen ausgeschlossen werden mußte, zulässig. Setzt man z. B. $c = + c_1$, so folgt

$$\Phi = \text{const} = 1, \ F = f(u + v),$$

wo F eine willkürliche Funktion von $u + v$ ist. Man erhält dann

$$\cos\omega = \frac{1 - f^2}{1 + f^2}.$$

Integriert man unter dieser Voraussetzung die Gleichungen 1), so wird auch η oder ε eine Funktion von $u + v$ allein und man erhält das Längenelement einer willkürlichen Rotationsfläche

$$\varepsilon^2 \left\{ \cos^2 \frac{\omega}{2} (du + dv)^2 + \sin^2 \frac{\omega}{2} (du - dv)^2 \right\},$$

bei welcher die Diagonalkurven der Rhomben, $u - v = \text{const}$, selbst geodätische Linien (die Meridiane der Rotationsfläche) vorstellen. Der Fall $c^2 - c_1^2 \neq 0$ wird indes im nächsten Paragraph allgemein untersucht werden.

§ 4.

Über diejenigen Flächen, welche in infinitesimale Rhomben durch Kurven gleicher oder entgegengesetzt gleicher geodätischer Krümmung geteilt werden.

Setzt man den in den vorigen Untersuchungen im allgemeinen ausgeschlossenen Fall $c^2 = c_1^2$ voraus, so läßt sich die Bestimmung des Längenelementes, anstatt auf eine partielle Differentialgleichung, auf eine kubische Irrationalität und zwei einfache Quadraturen zurückführen.

Wird $c = c_1$ angenommen — für den Fall $c = - c_1$ gelten

ganz dieselben Betrachtungen, nur daß an Stelle von $u+v$ $u-v$ einzusetzen ist —, so geben die Gleichungen 2[a]) des § 1

$$\varepsilon_u - \varphi_v = \varepsilon_v - \varphi_v$$

oder

$$\frac{\partial(\varepsilon+\varphi)}{\partial u} = \frac{\partial(\varepsilon+\varphi)}{\partial v}.$$

Demnach ist

$$\varepsilon + \varphi = F(u+v),$$

wo F eine willkürliche Funktion des Argumentes $u+v$ bedeutet. Setzt man jetzt

$$u + v = u'$$
$$u - v = v',$$

so wird die erste der Gleichungen 2[a]) § 1

$$\varepsilon_u - \varphi_v = c\,\varepsilon\sqrt{\varepsilon^2 - \varphi^2}$$

wegen

$$\varphi = F - \varepsilon$$

und

$$\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v} = 2\frac{\partial}{\partial u'}$$

in

$$\frac{\partial}{\partial u'}(2\varepsilon - F) = c\,\varepsilon\sqrt{F}\sqrt{2\varepsilon - F}$$

übergehen. Setzt man endlich

$$2\varepsilon - F = w^2,$$

so daß

$$\cos\omega = \frac{F - w^2}{F + w^2}$$

wird, so erhält man als Differentialgleichung für ω

$$\frac{\partial w}{\partial u_1} = c\left(\frac{w^2 + F}{4}\right)\sqrt{F}, \tag{1}$$

d. h. eine Riccatische Differentialgleichung, bei der die Integrationskonstante eine willkürliche Funktion von $u - v = v'$ ist.

Die Gleichung 1) läßt sich lösen, wenn man die Funktion F in geeigneter Form annimmt. Setzt man nämlich

$$w = z\sqrt{F},[1]$$

so entsteht

2) $$\frac{\partial \frac{1}{F z^2}}{\partial u'} = -\frac{c}{2}\frac{1+z^2}{z^3}.$$

Denkt man sich nun z_0 durch eine partikuläre von v' freie Lösung der Gleichung 2) bestimmt, so kennt man ein partikuläres Integral von 1) und findet so

3) $$w = U + \frac{U_1}{U_2 + V},$$

wo U, U_1, U_2 Funktionen von u' allein, V eine willkürliche Funktion von v' ist. Damit dieser Wert von w der Gleichung 1) genüge, müssen die Gleichungen

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad U' = c/4\,(F + U^2)\sqrt{F} \\ &\text{b)} \quad U_1' = c/4\sqrt{F}\, 2\,U U_1 \\ &\text{c)} \quad -U_2' = c/4\, U_1\sqrt{F} \end{aligned}$$

bestehen. Nun liefert die Gleichung a) bei willkürlich angenommenem U eine und nur eine reelle Wurzel für $\sqrt{F}$, aus b) erhält man dann U_1 durch Quadratur, und ebenso aus c) die Funktion U_2.

Das Längenelement wird nun bezogen auf die Variabeln u_1, v_1,

4) $$ds^2 = \frac{w^2 + F}{4}\,[du_1^2\, F + dv_1^2\, w^2].$$

Wird also w als Funktion von u_1 allein angenommen, so ist die betreffende Fläche zu einer Rotationsfläche isometrisch.

Umgekehrt kann man aber auch auf jeder Rota-

---

[1]) Dabei wird $\cos\omega = \frac{1-z^2}{1+z^2}$ aber für $z = \operatorname{tg}\frac{\lambda}{2}$, $\cos\omega = \cos\lambda$.

tionsfläche solche Systeme von Kurven konstanter geodätischer Krümmung bestimmen, da ds^2 noch eine willkürliche Funktion enthält.

Setzt man nämlich das Längenelement in der Form

$$ds^2 = dU^2 + g\,dv_1^2 \tag{5}$$

voraus, so daß $v_1 = \text{const}$ geodätische Linien der Fläche sind, wählt man ferner

$$U = f(u_1),$$

wo f eine noch zu bestimmende Funktion von u_1, g aber eine gegebene Funktion von f ist, so kann man immer, und zwar im allgemeinen auf ∞^1 verschiedene Arten, bewirken, daß die rechten Seiten der Gleichungen 4) und 5) identisch werden. Man hat dazu nur zu setzen:

$$(w^2 + F)\,F = 4\,f'^2$$
$$(w^2 + F)\,w^2 = 4\,g.$$

Daraus folgt durch Addition und Multiplikation

$$(w^2 + F)^2 = 4\,(f'^2 + g)$$
$$(w^2 + F)^2\,F\,w^2 = 16\,f'^2\,g.$$

Demnach wird

$$(w^2 + F)\,w\sqrt{F} = 4\,f'\sqrt{g}$$
$$w^2 + F = 2\sqrt{f'^2 + g}$$
$$w^2 = \frac{2\,g}{\sqrt{f'^2 + g}}.$$

Die Differentialgleichung 1), welche man auch in der Form

$$\frac{\partial w^2}{\partial u_1} = \frac{c}{2}\,(w^2 + F)\sqrt{F}\,w$$

schreiben kann, wird daher

$$\frac{\partial \dfrac{g}{\sqrt{f'^2 + g}}}{\partial u_1} = c\,f'\sqrt{g}.$$

Sie liefert

$$\frac{g}{\sqrt{f'^2+g}} = c\int\sqrt{g}\,df + a$$

oder

$$u_1 = \int \frac{df}{\sqrt{\frac{g^2}{c^2\left(\int\sqrt{g}\,df + a\right)^2} - g}},$$

womit f als Funktion von u_1 mit der willkürlichen wesentlichen Konstanten a bestimmt ist. Hiermit ist zugleich die Aufgabe gelöst, auf einer gegebenen Rotationsfläche alle diejenigen Kurvensysteme mit der geodätischen Krümmung c zu finden, die eine rhombische Teilung bewirken, deren Diagonalkurven die Meridiane sind.

Ich erwähne zwei Beispiele allgemeinerer Natur.

Wählt man in Gleichung 1) $F = k^2$, so wird

$$\omega = k\,\mathrm{tg}\left(u_1 c\frac{k^2}{4} + V\right),$$

setzt man zur Abkürzung

$$u_1 c\frac{k^2}{4} + V = \sigma,$$

so wird das Längenelement ausgedrückt durch

$$ds^2 = \frac{k^4}{4\cos^2\sigma}\left(du_1^2 + \mathrm{tg}^2\sigma\, dv_1^2\right).$$

Bestimmt man aus den Koeffizienten

$$e = \frac{k^4}{4\cos^2\sigma}, \quad g = \frac{k^4\,\mathrm{tg}^2\sigma}{4\cos^2\sigma}$$

mittelst der Gaußschen Formel

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{eg}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\frac{g_u}{\sqrt{ge}} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{e_v}{\sqrt{eg}}\right]$$

das Krümmungsmaß K, so erhält man

$$K = -c^2 - \frac{V''}{\sqrt{eg}}.$$

Man erhält daher wieder eine Fläche konstanter negativer Krümmung $-c^2$, wenn V eine lineare Funktion von v_1 ist, aber der Koordinatenwinkel ω ist nicht konstant, sondern eine lineare Funktion von u_1 und v_1.[1]) Setzt man andererseits

$$F = \frac{a^2}{u_1},$$

so ist

$$w_0 = \frac{\beta}{\sqrt{u_1}}$$

eine partikuläre Lösung von 1), wenn

$$-\frac{\beta}{2} = c\,a\,(\beta^2 + a^2)$$

gewählt wird. Nun wird

$$\varepsilon = \frac{\beta^2 + a^2}{2\,u_1}$$

$$q = \frac{a^2 - \beta^2}{2\,u_1}:$$

man erhält daher wieder eine Fläche konstanter negativer Krümmung mit konstantem Koordinatenwinkel. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung 1) führt in diesem Falle auf nicht besonders einfache Formen.

§ 5.

Über diejenigen Flächen, welche durch zwei Systeme geodätischer Linien in infinitesimale Rhomben zerlegt werden.

Soll endlich eine rhombische infinitesimale Teilung der Fläche durch zwei Systeme geodätischer Kurven entstehen, so ist in den Formeln 2ª, des § 1 $c = c_1 = 0$ zu setzen. Man erhält dann

$$\varepsilon_u = q_v$$

$$\varepsilon_v = q_u$$

---

[1]) Es wird allgemein $\cos\omega = \cos 2\,\sigma$.

oder

$$\varepsilon = \psi_v, \quad \varphi = \psi_u,$$

mithin

$$\psi_{vv} - \psi_{uu} = 0$$

oder

$$\psi = F(u+v) - \Phi(u-v),$$

wo F und Φ willkürliche Funktionen ihrer Argumente sind. Demgemäß wird

$$\varepsilon = F' + \Phi'$$
$$\varphi = F' - \Phi',$$

wo die Indizes bei F und Φ Differentiationen nach den Argumenten $u+v$, $u-v$ andeuten. Das Längenelement wird nunmehr durch die Formel

$$d s^2 = (F' + \Phi')\,[(d u + d v)^2 F' + (d u - d v)^2 \Phi']$$

ausgedrückt. Setzt man

$$(d u + d v)\sqrt{F'} = d u_1$$
$$(d u - d v)\sqrt{\Phi'} = d v_1$$
$$F' + \Phi' = U_1 + V_1,$$

wo U_1 und V_1 Funktionen von $u_1 = u + v$, $v_1 = u - v$ allein sind, so entsteht

$$d s^2 = (d u_1^2 + d v_1^2)(U_1 + V_1). \tag{1}$$

Man hat daher den folgenden Satz: Jede Fläche, welche durch zwei Scharen geodätischer Linien rhombisch geteilt wird, ist eine Fläche mit dem Liouville'schen Längenelement, d. h. eine Liouville'sche Fläche.

Umgekehrt kann man nun aber auf jeder Liouville'schen Fläche ∞^1 Systeme von Kurvenscharen der genannten Art angeben.

Bekanntlich sind durch die Gleichungen

$$\frac{d u_1}{\sqrt{U_1 + c}} + \frac{d v_1}{\sqrt{V_1 - c}} = \text{const}$$

bei willkürlicher Konstante c bei geodätischen Linien der Fläche gegeben. Setzt man nun

$$\frac{d\,u_1}{\sqrt{U_1 + c}} + \frac{d\,v_1}{\sqrt{V_1 - c}} = d\,u_2$$

$$\frac{d\,u_1}{\sqrt{U_1 + c}} - \frac{d\,v_1}{\sqrt{V_1 - c}} = d\,v_2,$$

so wird

$$\frac{d\,u_1}{\sqrt{U_1 + c}} = \frac{d\,u_2 + d\,v_2}{2}$$

$$\frac{d\,v_1}{\sqrt{V_1 - c}} = \frac{d\,u_2 + d\,v_2}{2}$$

und damit geht die Form $d\,s^2$ (1) in

$$d s^2 = \frac{U_1 + V_1}{4}\left[(d u_2^2 + d v_2^2)(U_1 + V_1) + 2\,d u_2 d v_2 (U_1 - V_1 + 2c)\right]$$

über, aus der hervorgeht, daß alle diese Systeme geodätischer Kurven rhombische Teilungen hervorrufen.

Zu den Liouville'schen Flächen gehören insbesondere die Flächen zweiten Grades; zu den Systemen geodätischer Linien der verlangten Art die Erzeugenden derselben. Dies läßt sich auch leicht direkt nachweisen.

Betrachtet man z. B. das Hyperboloid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

und setzt

$$\frac{x}{a} = \xi, \quad \frac{y}{b} = \eta, \quad \frac{z}{c} = \zeta,$$

so ist

$$\xi = \frac{u + v}{1 + u\,v}$$

$$\eta = \frac{u\,v - 1}{1 + u\,v}$$

$$\zeta = \frac{u - v}{1 + u\,v}.$$

Es wird demgemäß für $1 + uv = s$

$$\xi_u = \frac{1 - v^2}{s^2}, \quad \xi_v = \frac{1 - u^2}{s^2}$$

$$\eta_u = \frac{2v}{s^2}, \quad \eta_v = \frac{2u}{s^2}$$

$$\zeta_u = \frac{1 + v}{s^2}, \quad \zeta_v = \frac{1 + u^2}{s^2}$$

daher sind die Koeffizienten des Längenelementes gegeben durch

$$s^4 e = a^2 + c^2 - 2v^2(a^2 - c^2 - 2b^2) + (a^2 + c^2)v^4$$
$$s^4 g = a^2 + c^2 - 2u^2(a^2 - c^2 - 2b^2) + (a^2 + c^2)u^4;$$

und in der Tat wird die Teilung eine rhombische, wenn man an Stelle der Variabeln u, v die durch die Gleichungen

$$du_1 = \frac{du}{\sqrt{a^2 + c^2 - 2u^2(a^2 - c^2 - 2b^2) + (a^2 + c^2)u^4}}$$

$$dv_1 = \frac{dv}{\sqrt{a^2 + c^2 - 2v^2(a^2 - c^2 - 2b^2) + (a^2 + c^2)v^4}}$$

einführt.

Nun hat bekanntlich das Hyperboloid[1]) die Eigenschaft, daß zu dieser Teilung ∞^1 Flächen derselben Art gehören, bei denen die Koeffizienten e, g dieselben bleiben, während der

---

[1]) Die nämliche Eigenschaft besteht übrigens noch für das Paraboloid

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{2z}{c}$$

wo durch die Institutionen

$$\frac{2x}{a} = u + v, \quad \frac{2y}{b} = v - u, \quad \frac{2z}{c} = uv$$

die Koeffizienten e und g gleich

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2 v^2}{4}, \quad \frac{a^2 + b^2 + c^2 u^2}{4}$$

werden, und sich nicht ändern, wenn man a^2 durch $a^2 - \lambda$, b^2 durch $b^2 + \lambda$ ersetzt.

Kosimus des Koordinatenwinkels variiert; sie entstehen durch die mit der Transformation in die Schar der konfokalen Flächen

$$a'^2 = a^2 + \lambda$$
$$b'^2 = b^2 + \lambda$$
$$c'^2 = c^2 - \lambda$$

äquivalente Deformation, welche die Längenabschnitte zwischen den sich kreuzenden Erzeugenden ungeändert läßt.

Dieselbe Eigenschaft aber kommt allen Liouville-schen Flächen überhaupt in viel allgemeinerem Sinne zu: d. h. zu jeder rhombischen Teilung einer Liouville-schen Fläche durch Systeme geodätischer Linien gehören ∞^1 andere Liouville'sche Flächen, welche dieselben Längenabschnitte der auf ihnen verlaufenden beiden Scharen geodätischer Linien, aber einen verschiedenen Koordinatenwinkel dieser Scharen besitzen. Wie man sieht, liefert dies eine „Deformation" der Liouville'schen Flächen, welche der ganz speziellen Deformation der Flächen zweiten Grades völlig analog ist, und zugleich die bekannte Deformation der letzteren als Spezialfall erscheinen läßt.

Man erhält nämlich für $\eta = \log \varepsilon$ aus den Gleichungen 2^a) des § 1, wenn man $\cos \omega = z$ setzt,

$$2) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial u} - z \frac{\partial \eta}{\partial v} - z_v &= 0 \\ \frac{\partial \eta}{\partial v} - z \frac{\partial \eta}{\partial u} - z_u &= 0. \end{aligned}$$

Die Integrabilitätsbedingungen für z sind, wenn man aus den Gleichungen 2) die Werte von z_v und z_u wieder einträgt:

$$\eta_{uu} - \eta_v (\eta_v - z \eta_u) - z \eta_{uv} = \eta_{vv} - \eta_u (\eta_u - 2 \eta_v) - z \eta_{uv}$$

oder

$$\eta_{uu} + \eta_u^2 = \eta_{vv} + \eta_v^2.$$

Ist aber diese von z ganz unabhängige Gleichung überhaupt erfüllt, so wird

$$z\,\varepsilon = \int \frac{\partial \varepsilon}{\partial u}\, d\,v + \frac{\partial \varepsilon}{\partial v}\, d\,u + \text{const}$$

aber bei ungeändert bleibendem $\varepsilon \cdot \cos \omega$ noch von einer Konstanten abhängig.

Der Satz kann übrigens auch aus der Form des Längenelementes auf den Liouvilleschen Flächen ganz direkt geschlossen werden. Für den allgemeineren Fall, wo die Kurven von konstanter geodätischer Krümmung sind, besteht ein analoger Satz nicht, da die Integrabilitätsbedingung hier die Funktion z selbst enthält.

§ 6.

Beispiele für die Bestimmung von Kurvensystemen der besprochenen Art auf Flächen konstanter Krümmung.

Als eine weitere Aufgabe bietet sich nun die Bestimmung aller Kurvensysteme der gewünschten Art dar, welche auf einer gegebenen Fläche unter gewissen Umständen möglich sind. Ich muß mich aber hier größtenteils auf die einfache Angabe einzelner einfacher Fälle beschränken, welche die Flächen konstanter Krümmung betreffen. Schon auf den Flächen von der Krümmung Null scheint es keineswegs einfach wegen der Komplikation der zu lösenden Funktionalgleichungen, alle Systeme der geforderten Art, die nicht auf bloßen Bewegungen beruhen, anzugeben.[1])

1. Setzt man

$$\text{1)} \qquad \begin{aligned} x &= r \cos u + r_1 \cos v \\ y &= r \sin u + r_1 \sin v, \end{aligned}$$

so hat man bei konstantem u den Kreis

$$(x - r \cos u)^2 + (y - r \sin u)^2 = r_1$$

---

[1]) Für die Liouville'schen Flächen ist dagegen die Aufgabe, alle rhombischen Teilungen durch geodätische Linien zu finden, im § 5 gelöst. Ein besonderes Interesse haben dabei wieder diejenigen Flächen, die auf mehrfache, d. h. ∞ vielfache Art sich als Liouvillesche Flächen ansehen lassen.

mit dem Radius r_1, dessen Mittelpunkt den Kreis mit dem Radius r durchläuft; die Gleichungen bilden überhaupt ein doppeltes System von Translationskurven. Daß nun die Ebene durch dasselbe in Rhomben zerlegt wird, ist selbstverständlich. Transformiert man dies Kreissystem durch stereographische Projektion in geeigneter Weise auf eine Kugel, so erhält man auf den Flächen positiver konstanter Krümmung eine Doppelschar von Kreisen mit konstanter geodätischer Krümmung, welche die Fläche in Rhomben zerlegen. Dabei ist natürlich der Fall nicht ausgeschlossen, daß r und r_1 von verschiedenen Vorzeichen angenommen werden, was eine veränderte Lage der Kreise gegeneinander zur Folge hat.

2. Das System der Kreise mit konstantem Radius a, deren Mittelpunkte einen Kreis mit dem Radius r durchlaufen:

$$(x - r\cos u)^2 + (y - r\sin u)^2 = a^2$$
$$(x - r\cos v)^2 + (y - r\sin v)^2 = a^2,$$

liefert

$$x^2 + y^2 - 2r(x\cos u + y\sin u) = a^2 - r^2$$
$$x^2 + y^2 - 2r(x\cos v + y\sin v) = a^2 - r^2$$

oder

$$x(\cos u - \cos v) + y(\sin u - \sin v) = 0.$$

Setzt man nun

$$x = \lambda\,[\sin u - \sin v] = 2\lambda \sin q \cos p$$
$$y = \lambda\,(\cos u - \cos v) = 2\lambda \sin q \sin p,$$

wobei

$$p = \frac{u+v}{2}$$
$$q = \frac{u-v}{2}$$

so wird

$$x\cos u + y\sin u = \lambda \sin(u - v)$$

$$x^2 + y^2 = 4\lambda^2 \sin^2\frac{u-v}{2}$$

oder

$$\lambda = {}^1/_2 \frac{(\cos q + \sqrt{a^2 - r^2 + \cos^2 q})}{\sin q}.$$

Demgemäß wird

$$x = \cos p \, (\cos q + S)$$
$$y = \sin p \, (\cos q + S),$$

wenn zur Abkürzung

$$S = \sqrt{a^2 - r^2 + \cos^2 q}$$

gesetzt wird.

Eine einfache Rechnung zeigt, daß in der Tat die Koeffizienten e und g von ds^2 einander gleich sind. Wählt man insbesondere $a = r$, so erhält man die Doppelschar von Kreisen mit konstantem Radius durch den Koordinatenanfang, d. h. einen speziellen Fall von Nr. 1. Auch hier kann man durch stereographische Projektion zu Flächen konstanter positiver Krümmung übergehen.

3. Auch die Kreise von gleichem Radius r, welche eine gerade, etwa die x-Achse berühren, bilden eine solche Doppelschar. Setzt man nämlich

$$x = \frac{u + v}{2}$$
$$y = \sqrt{\frac{(v - u)^2 - r^2}{4}},$$

so ist

$$x_u = {}^1/_2, \quad x_v = {}^1/_2$$

$$y_u = -\frac{v - u}{4\sqrt{\frac{(v - u)^2 - r^2}{4}}}, \quad y_v = \frac{v - u}{4\sqrt{\frac{(v - u)^2 - r^2}{4}}},$$

so daß wieder $e = g$ wird.

4. Vermöge des Prinzips der reziproken Radien gewinnt man aus dem Spezialfalle unter Nr. 3 in der Ebene den Fall, wo die Doppelschar der Geraden, welche ein und den-

selben Kreis berühren, ein System von geodätischen Linien bildet, die wieder eine rhombische Teilung bewirken.

5. Allgemeiner aber rufen je zwei Strahlbüschel der Ebene mit beliebigen Mittelpunkten eine solche Teilung hervor.

Die Gleichungen

$$y = (x - e)\,v$$
$$x = (x + e)\,u,$$

in denen der Einfachheit halber $e = 1$ gewählt werden möge, sind die von zwei Strahlbüscheln, welche durch die Punkte $e, 0$; $-e, 0$ gehen. Aus den Gleichungen

$$x = -\frac{u+v}{u-v}$$

$$y = -\frac{2\,u\,v}{u-v}$$

ergibt sich

$$e = \frac{4\,v^2(1+v^2)}{(u-v)^4}$$

$$g = \frac{4\,u^2(1+u^2)}{(u-v)^4}.$$

Setzt man demgemäß:

$$\frac{d\,u}{u\sqrt{1+u^2}} = d\,u_1,$$

$$\frac{d\,v}{v\sqrt{1+v^2}} = d\,v_1,$$

so werden die Koeffizienten e, g einander gleich.

Dabei kann auch der Mittelpunkt des einen Büschels im Unendlichen liegen, ein Fall, der durch die Formeln

$$y = u\,v$$
$$x = u$$

zum Ausdruck gebracht wird.

Hier wird das Längenelement

$$ds^2 = du^2(1 + v^2) + 2\,u\,v\,d\,u\,d\,v + u^2\,d\,v^2,$$

so daß man nur

$$\frac{d\,u}{u} = d\,u', \quad \frac{d\,v}{\sqrt{1 + v^2}} = d\,v'$$

zu setzen hat.

6. Endlich sei noch ein System angeführt, bei dem die eine Kurvenschar geodätisch, die andere aus Kreisen von konstantem Radius besteht.

Setzt man

$$y = v,$$
$$(x - u)^2 + y^2 = c^2,$$

d. h. betrachtet man die Parallelen zur x-Achse und die Kreise mit konstantem Radius c, deren Mittelpunkt auf der x-Achse liegt, so ist das Längenelement

$$d\,s^2 = d\,u^2 - 2\,\frac{v\,d\,u\,d\,v}{\sqrt{c^2 - v^2}} + \frac{c^2\,d\,v^2}{c^2 - v^2}$$

und man hat nur

$$\frac{\varepsilon\,d\,v}{\sqrt{c^2 - v^2}} = d\,v_1, \quad d\,u = d\,u_1$$

zu setzen, um die rhombische Teilung herbeizuführen.

§ 7.

Bestimmung aller geodätischen Kurvensysteme mit rhombischer Teilung auf den developpabeln Flächen.

Die im vorigen § 6 gegebenen Beispiele erschöpfen für die Ebene noch nicht einmal die Fälle, in denen beide Kurvenscharen aus geraden Linien bestehen. Aus dem Liouvilleschen Ausdrucke für das Krümmungsmaß folgt für $c = c_1 = 0$ sofort

$$\omega_{uv} = 0$$

oder

1) $$\omega = U + V,$$

wo U und V Funktionen von u, v allein sind.

Aus den Gleichungen

$$\frac{\partial \sqrt{e}}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial v}(\sqrt{e} \cos \omega) = 0$$

$$\frac{\partial \sqrt{e}}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial u}(\sqrt{e} \cos \omega) = 0$$

folgt für $\varepsilon = \sqrt{e}$:

$$\varepsilon_u \sin \omega + \omega_v + \omega_u \cos \omega = 0$$

$$\varepsilon_v \sin \omega + \omega_u + \omega_v \cos \omega = 0;$$

also die Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\omega_v + \omega_u \cos \omega}{\sin \omega}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\omega_u + \omega_v \cos \omega}{\sin \omega}\right)$$

oder nach 1)

$$\sin (U + V)(V'' - U'') = (V'^2 - U'^2) \cos (U + V),$$

d. h.

2) $$\operatorname{tg} (U + V) = \frac{V'^2 - U'^2}{V'' - U''}.$$

Diese Funktionalgleichung ist nun offenbar erfüllt für $U' = c$, $V' = \pm c$; desgleichen für $v = \text{const}$,

$$\frac{U''}{U'^2} = \frac{\cos (U + c)}{\sin (U + c)}$$

oder

$$U' = c_1 \sin (U + c),$$

also

$$\frac{d\,U}{\sin (U + c)} = c_1\, d\,u.$$

Um aber alle Systeme der verlangten Art zu finden, muß die Funktionalgleichung 2) gelöst werden. Differentiiert man nun dieselbe nach u und v, indem man zunächst $\operatorname{tg}(U+V)$ durch $f(U+V)$ ersetzt, so folgt

$$U' f' = -\frac{2\,U'\,U''}{U''-U''} + \frac{V'^2 - U'^2}{(V''-U'')^2}\,U'''$$

$$V' f' = +\frac{2\,V'\,V''}{V''-U''} - \frac{V'^2 - U'^2}{(V''-U'')^2}\,V'''$$

oder durch Elimination von f'

$$2\,U'\,V'\,(V''^2 - U''^2) = (V'^2 - U'^2)\,(U'''\,V' + V'''\,U').$$

Dividiert man diese Gleichung durch $U'\,V'$, was zulässig ist, wenn keine der Funktionen U, V eine Konstante ist, (welcher Fall soeben betrachtet wurde) so folgt

$$2\,(V''^2 - U''^2) = (V'^2 - U'^2)\left(\frac{U'''}{U'} + \frac{V'''}{V'}\right). \tag{3}$$

Differentiiert man jetzt nach v, so folgt

$$4\,V''\,V''' - 2\,V'\,V''\left(\frac{U'''}{U'} + \frac{V'''}{V'}\right) - (V'^2 - U'^2)\left(\frac{V'''}{V'}\right)' = 0 \tag{4}$$

und hieraus durch Differentiation nach u

$$-2\,V'\,V''\left(\frac{U'''}{U'}\right)' + 2\,U'\,U''\left(\frac{V'''}{V'}\right)' = 0.$$

Mithin ist

$$\left(\frac{U'''}{U'}\right)'\frac{1}{U'\,U''} = \left(\frac{V'''}{V'}\right)'\frac{1}{V'\,V''} = c,$$

wo c eine willkürliche Konstante. Durch Integration erhält man

$$\begin{aligned} \frac{U'''}{U'} &= c/2\;U'^2 + \frac{\alpha}{2} \\ \frac{V'''}{V'} &= c/2\;V'^2 + \frac{\beta}{2}. \end{aligned} \tag{5}$$

Setzt man den so bestimmten Wert von $\frac{U'''}{U'}$ in 4) ein, so folgt

$$V''\,[4\,V''' - 2\,c\,V'^3 - (\alpha + \beta)\,V'] = 0.$$

Eine erste Lösung dieser Gleichung ist $V'' = 0$. Dann ist aber $V' = \gamma$, und der Gleichung

$$f(U + \gamma\,v) = \frac{\gamma^2 - U'^2}{-U''}$$

kann offenbar nur genügt werden, wenn $U' = \pm\,\gamma$ genommen wird, wodurch man auf den oben bereits genannten Spezialfall zurückgeführt wird.

Es muß daher

$$6^a)\qquad V''' = c/2\;V'^3 + \frac{\alpha + \beta}{4}\,V'$$

und ebenso

$$6^b)\qquad U''' = c/2\;U'^3 + \frac{\alpha + \beta}{4}\,U'$$

sein. Vergleicht man diese Gleichungen mit den in 5) erhaltenen Ausdrücken, so folgt

$$\alpha = \beta,$$

so daß nun

$$\frac{V'''}{V'} = \frac{c}{2}\,V'^2 + \frac{\alpha}{2}$$

$$\frac{U'''}{U'} = \frac{c}{2}\,U'^2 + \frac{\alpha}{2}$$

wird. Setzt man diese Werte endlich in 3) ein, so folgt

$$2\,(V''^2 - U''^2) = \left(\frac{V'^2 - U'^2}{2}\right)[(V'^2 + U'^2)\,c + 2\,\alpha]$$

und diese Gleichung zerfällt in die beiden neuen

$$7)\qquad \begin{aligned} V''^2 - V'^4 \frac{c}{4} - V'^2 \frac{a}{2} &= k \\ U''^2 - U'^4 \frac{c}{4} - U'^2 a/2 &= k \end{aligned}$$

wo k eine neue willkürliche Konstante bedeutet. Setzt man jetzt $a = -4\beta$, so wird

$$\frac{2\,U'\,d\,U'}{\sqrt{U'^4 \frac{c}{4} - U'^2_2 \beta + k}} = 2\,d\,u\,U'$$

oder, wenn $c/4 = -\gamma^2$ genommen wird,

$$\frac{\arcsin\left(\frac{\beta}{\gamma} + U'^2 \gamma\right)}{\sqrt{k + \frac{\beta^2}{\gamma^2}}} = 2\,(U\gamma + h_1).$$

Man hat also:

$$U'^2 \gamma + \frac{\beta}{\gamma} = \sqrt{m} \sin 2\,(U\gamma + h_1)$$

$$V'^2 \gamma + \frac{\beta}{\gamma} = \sqrt{m} \sin 2\,(U\gamma + h_2),$$

wo

$$m = k + \frac{\beta^2}{\gamma^2}$$

gesetzt ist. Demgemäß wird

$$\gamma\,(U'^2 - V'^2) = \sqrt{m}\,[\sin 2\,(U\gamma + h_1) - \sin 2\,(V\gamma + h_2)]$$

$$U'' - U'' = \sqrt{m}\,[\cos 2\,(U\gamma + h_1) - \cos 2\,(V\gamma + h_2)].$$

Hieraus folgt

$$\gamma\,\frac{U'^2 - V'^2}{V'' - V''} = -\operatorname{cotg}\,[(U + V)\,\gamma + h_1 + h_2].$$

Zieht man noch die Konstante γ in die Funktionen U, V hinein, und wählt $h_1 + h_2 = \pi/2$, so folgt in der Tat

$$\frac{U'^2 - V'^2}{U'' - V''} = \operatorname{tg}(U + V).$$

Diese Lösung, welche U, V als elliptische Funktionen von u, v darstellt, entspricht, wie jetzt gezeigt werden soll, dem folgenden Satze:

Die Tangenten jedes Kegelschnittes bilden eine doppelte Schar von geodätischen Linien in der Ebene, durch welche dieselbe rhombisch geteilt wird.

Seien nämlich

$$\frac{x \cos u}{a} + \frac{y \sin u}{b} = 1$$

$$\frac{x \cos v}{a} + \frac{y \sin v}{b} = 1$$

zwei Tangenten eines Kegelschnittes, insbesondere der Ellipse[1])

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

so wird

$$\frac{x}{a} \sin(v - u) = \sin v - \sin u$$

$$\frac{y}{b} \sin(v - u) = \cos u - \cos v.$$

Daraus ergibt sich

$$e = x_u^2 + y_u^2 = (a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v)\, P$$

$$g = x_v^2 + y_v^2 = (a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u)\, P,$$

wo

$$P = \frac{\{1 - \cos(v - u)\}^2}{\sin^4(v - u)}$$

gesetzt ist. Es entsteht also in der Tat eine rhombische Teilung, wenn man

[1]) Für die Hyperbel sind natürlich die trigonometrischen Funktionen durch hyperbolische zu ersetzen.

$$\frac{d\,u}{\sqrt{a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u}} = d\,u_1$$

$$\frac{d\,v}{\sqrt{a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v}} = d\,v_1$$

setzt. Auch für die Parabel $y^2 = 2\,p\,x$ besteht der Satz. Denn hier hat man für den Schnittpunkt zweier Tangenten

$$x = \frac{u\,v}{2\,p}$$

$$y = \frac{v + u}{2}.$$

Demnach wird

$$x_u^2 + y_u^2 = \frac{p^2 + v^2}{4\,p^2}, \quad x_v^2 + y_v^2 = \frac{p^2 + u^2}{4\,p^2}$$

und man hat nur

$$\frac{d\,u}{\sqrt{p^2 + u^2}} = d\,u_1, \quad \frac{d\,v}{\sqrt{p^2 + v^2}} = d\,v_1$$

zu setzen.

Will man dagegen alle rhombischen Teilungen der Ebene finden, welche durch zwei Kreisscharen von konstanten Radien c und c_1 entstehen, so ist zu setzen

$$x - U = c \cos \Theta, \quad y - U_1 = c \sin \Theta$$

$$x - V = c_1 \cos \Theta', \quad y - V_1 = c_1 \sin \Theta',$$

wo U, U_1; V, V_1 Funktionen der Argumente u; v allein, Θ und Θ_1 aber von beiden abhängig sein können. Alsdann ist

$$x_u = -\,c_1 \sin \Theta'\,\Theta'_u, \quad x_v = -\,c \sin \Theta\,\Theta_v$$

$$y_u = +\,c_1 \cos \Theta'\,\Theta'_u, \quad y_v = +\,c \cos \Theta\,\Theta_v,$$

so daß die Bedingung der rhombischen Teilung

$$c_1^2\,\Theta_u'^2 = c^2\,\Theta_v^2$$

wird. Setzt man demgemäß

$$\Theta = c_1\,\psi_u, \quad \Theta' = c\,\psi_v,$$

so sind noch die Funktionalgleichungen

$$U - V = c_1 \cos(c\,\psi_v) - c\cos(c_1\,\psi_u)$$
$$U_1 - V_1 = c_1 \sin(c_1\,\psi_v) - c\sin(c_1\,\psi_u)$$

zu befriedigen. Dieselben sind aber keiner einfachen Behandlung zugänglich und auch andere Ansätze, welche die Einführung trigonometrischer Funktionen vermeiden, führen zu weitläufigen Funktionalgleichungen, die ich bisher nicht vollständig untersucht habe.

§ 8.

Die Flächen konstanter negativer Krümmung.

Die Formeln des § 1, 2 nehmen eine besonders einfache Gestalt an, wenn $\cos\omega$ als konstant vorausgesetzt wird. Bezeichnet man die geodätischen Krümmungen der Koordinatenlinien $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ mit γ_1, γ_2, so wird das Längenelement der zugehörigen Fläche[1])

$$1)\qquad d\,s^2 = \frac{d\,u^2 + 2\cos\omega\, d\,u\,d\,v + d\,v^2}{\left[\frac{(\gamma_1 + \gamma_2\cos\omega)\,u + (\gamma_2 + \gamma_1\cos\omega)\,v}{\sin\omega}\right]^2}$$

mit dem konstanten negativen Krümmungsmaß

$$K = -\frac{\gamma_1^2 + 2\,\gamma_1\,\gamma_2\cos\omega + \gamma_2^2}{\sin^2\omega}.$$

Da K ein negativer definiter Ausdruck ist, der nur dann Null wird, wenn γ_1, γ_2 gleichzeitig Null sind, so entstehen nur dann developpable Flächen, wenn beide Kurvensysteme aus geodätischen Linien gebildet werden. Zugleich zeigt sich aber, daß ein solches Kurvensystem die Fläche negativer konstanter Krümmung immer in infinitesimale Rhomben zerlegt.

Setzt man

$$\gamma_1 + \cos\omega\,\gamma_2 = a\sin\omega$$
$$\gamma_1\cos\omega + \gamma_2 = b\sin\omega$$

[1]) Vgl. P. Probst, a. a. O., p. 35.

und

$$a u + b v = u_1$$
$$\alpha u + \beta v = v_1,$$

so wird für

$$m = a \beta - b \alpha$$

$$m^2 (d u^2 + d v^2 + 2 \cos\omega \, d u \, d v) = e_1 \, d u_1^2 + 2 f_1 \, d u_1 \, d v_1 + g_1 \, d v_1^2,$$

wobei

$$e_1 = \beta^2 + \alpha^2 - 2 \cos\omega \, \alpha \beta$$
$$g_1 = b^2 + a^2 - 2 \cos\omega \, a b$$
$$f_1 = \cos\omega \, (\beta a + b \alpha) - (\beta b + \alpha a).$$

Wird nun angenommen, daß

$$\beta = \mu (a - b \cos\omega)$$
$$\alpha = \mu (a \cos\omega - b)$$

ist, so verschwindet der Faktor f_1; es folgt zugleich

$$\alpha^2 + \beta^2 - 2 \alpha \beta \cos\omega = \mu^2 (a^2 + b^2 - 2 a b \cos\omega) \sin^2\omega$$
$$m = \mu (a^2 + b^2 - 2 a b \cos\omega).$$

Demnach wird

$$m^2 \, d s^2 = (\mu^2 \sin^2\omega \, d u_1^2 + d v_1^2) \frac{a^2 + b^2 - 2 a b \cos\omega}{u_1^2}.$$

Setzt man jetzt

$$\frac{1}{u_1} = e^{-u_2}, \qquad v_1 = v_2 \mu \sin\omega,$$

so wird

$$d s^2 = \frac{\sin^2\omega \, (d u_2^2 + e^{-2 u_2} d v_2^2)}{a^2 + b^2 - 2 a b \cos\omega}.$$

Das Krümmungsmaß ist nunmehr

$$K = -\frac{a^2 + b^2 - 2 a b \cos\omega}{\sin^2\omega}.$$

Damit ist das Längenelement auf die typische Form der Flächen konstanter negativer Krümmung gebracht, bei der die

geodätischen Linien $d v_2 = 0$ sämtlich durch einen unendlich fernen Punkt der Fläche gehen.

Es ist aber

$$v_2 \sin \omega = \frac{v_1}{\mu} = u(a \cos \omega - b) + v(a - b \cos \omega).$$

Da endlich

$$a \cos \omega - b = - \sin \omega \, \gamma_2$$
$$a - \cos \omega \, b = \sin \omega \, \gamma_1,$$

so wird

$$v_2 = \gamma_1 v - \gamma_2 u.$$

Für den besonderen Fall $\gamma_1 = \pm \gamma_2$ wird daher die eine Schar der Diagonalkurven der Rhomben selbst aus geodätischen Linien gebildet.

Ist umgekehrt eine Fläche von der Krümmung -1 gegeben, also

$$d s^2 = d u_2^2 + e^{-2 u_2} d v_2^2$$

so setze man

$$\frac{a^2 + b^2 - 2 a b \cos \omega}{\sin^2 \omega} = 1$$

und

$$v_2 = \frac{v_1}{\sin \omega}, \quad e^{-u_2} = \frac{1}{u_1}$$
$$u_1 = a u + b v$$
$$v_1 = \alpha u + \beta v,$$
$$\beta = a - b \cos \omega, \qquad \gamma_1 \sin \omega = \beta$$
$$\alpha = a \cos \omega - b, \qquad \gamma_2 \sin \omega = -\alpha.$$

Die Fläche von der Krümmung -1 ist alsdann auf ein rhombisch isogonales System mit den konstanten geodätischen Krümmungen γ_1, γ_2 bezogen.

Ich beweise nun zunächst die Umkehrung des obigen Satzes:

Ist ein rhombisches System mit konstantem Koordinatenwinkel auf einer Fläche mit konstantem

Krümmungsmaß vorhanden, und besteht die eine Schar der Kurven aus Kurven konstanter geodätischer Krümmung $\gamma_1 \neq 0$, so ist auch die andere Schar von konstanter geodätischer Krümmung γ_2 und das Krümmungsmaß der Fläche ist negativ.

Es sei demnach $e = g$ und $\cos\omega$ konstant, $f = e\cos\omega$, so ist nach § 1, 2

$$-\gamma_1 e \sin\omega = \frac{\partial\sqrt{e}}{\partial u} - \frac{\partial\sqrt{e}}{\partial v}\cos\omega,$$

also wenn $e = \frac{1}{\eta^2}$ gesetzt wird

$$2)\qquad -\gamma_1 \sin\omega = \frac{\partial\eta}{\partial v}\cos\omega - \frac{\partial\eta}{\partial u}.$$

Eine partikuläre Lösung dieser Gleichung ist

$$3)\qquad \eta_0 = u\gamma_1\sin\omega;$$

aus der Gleichung

$$0 = \cos\omega\frac{\partial(\eta-\eta_0)}{\partial v} - \frac{\partial(\eta-\eta_0)}{\partial u},$$

welche man durch Einführung von 3) in 2) erhält, folgt daher

$$\eta = \eta_0 + f(u\cos\omega + v),$$

wo f eine willkürliche Funktion des Argumentes $z = u\cos\omega + v$ ist. Demnach ist

$$4)\qquad \sqrt{e} = \frac{1}{u\gamma_1\sin\omega + f} = \frac{1}{ua + f},$$

wenn man $a = \gamma_1 \sin\omega$ setzt.

Die geodätische Krümmung γ_2 der anderen Kurvenschar ist

$$-\gamma_2 e\sin\omega = \frac{\partial\sqrt{e}}{\partial v} - \frac{\partial\sqrt{e}}{\partial u}\cos\omega.$$

Vermöge der Gleichungen

$$\frac{\partial\sqrt{e}}{\partial v} = -\frac{f'}{(ua+f)^2},\quad \frac{\partial\sqrt{e}}{\partial u} = -\frac{(a + f'\cos\omega)}{(ua+f)^2}$$

folgt:

$$\gamma_2 = f' \sin\omega - \gamma_1 \cos\omega.$$

Aus der Liouvilleschen Formel für das Krümmungsmaß K folgt aber, wenn man den Wert von γ_2 einsetzt,

$$K = -\gamma_1^2 - f'^2 + (u\,a + f) f'', \tag{5}$$

wo die Größen f', f'' von dem Argumente z allein abhängen.

Differentiiert man nun die Gleichung 5) nach v, so folgt

$$-f' f'' + (u\,a + f') f''' = 0.$$

Jetzt müssen zwei Fälle unterschieden werden. Ist a, d. h. γ_1 von Null verschieden, so kann diese Gleichung nur dann bestehen, wenn f' eine Konstante ist,[1]) dann ist aber auch γ_2 eine Konstante. Ist nämlich f' nicht konstant, so ist auch f'' nicht Null, dann ist aber auch f''' von Null verschieden, da $u\,a + f$ nicht unendlich sein darf. Dann folgt aber

$$\left(-\frac{f' f''}{f'''} + f\right) + u\,a = 0.$$

Nun ist der eingeklammerte Teil entweder eine Konstante oder eine Funktion von z; beides aber führt auf einen Widerspruch. Damit ist der angegebene Satz bewiesen.

Ist dagegen $a = 0$ oder $\gamma_1 = 0$, so hat die Funktion f nur der Gleichung

$$K = -f'^2 + f f''$$

zu genügen.

Dieselbe gibt durch Differentiation nach z

$$-f' f'' + f f''' = 0.$$

Diese Gleichung ist wieder erfüllt für $f' = \text{const}$, dann ist auch $\gamma_2 = \text{const}$. Ist aber f' nicht konstant, so ist auch $f'' \neq 0$, und man hat

---

[1]) Natürlich kann auch $f' = 0$ sein, dann ist $\gamma_2 = -\gamma_1 \cos\omega$ und $K = -\gamma_1^2$.

$$\frac{f'''}{f''} = \frac{f'}{f},$$

und dies liefert

$$f'' = \pm c^2 f.$$

Wird das obere Vorzeichen gewählt, so wird

$$f = A e^{cz} + B e^{-cz}$$
$$K = 4 A B c^2,$$

man erhält daher Flächen von konstanter Krümmung; dieselbe kann hier positiv, negativ oder auch Null sein.

Wählt man dagegen das untere Vorzeichen, so ist

$$f = A \sin cz + B \cos cz$$
$$K = -c^2 (A^2 + B^2),$$

also K wesentlich negativ.

Eine Fläche konstanter Krümmung kann daher auch in infinitesimale Rhomben durch ein isogonales Kurvensystem zerlegt werden, deren eine Schar von geodätischen Linien gebildet ist, während die andere Schar nicht von konstanter geodätischer Krümmung ist.

Man kann übrigens aus jedem Systeme u, v, wie es in 1) zu Grunde gelegt ist, durch lineare Transformation der Variabeln u, v andere Systeme derselben Eigenschaft herleiten.

Nach Bonnet's Formel ist die geodätische Krümmung γ_φ, welche zu den Kurven $\varphi = \text{const}$ gehört, für den Fall $e = g$, $f = e \cos \omega$ ausgedrückt durch

$$-\gamma_\varphi e \sin \omega = \frac{\partial}{\partial u} \frac{\sqrt{e}\,(\varphi_u - \cos \omega\, \varphi_v)}{S} + \frac{\partial}{\partial v} \frac{\sqrt{e}\,(\varphi_v - \cos \omega\, \varphi_u)}{S},$$

wobei

$$S = \sqrt{\varphi_v^2 - 2 \cos \omega\, \varphi_u \varphi_v + \varphi_u^2}$$

gesetzt ist. Setzt man nun

$$\varphi = \alpha u + \beta v = u_1$$
$$\psi = \gamma u + \delta v = v_1,$$

so werden die Kurven $u_1 = \text{const}$, $v_1 = \text{const}$ ein rhombisches System bilden, wenn

$$\lambda = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 2\,\alpha\,\beta\cos\omega} = \sqrt{\gamma^2 + \delta^2 - 2\,\gamma\,\delta\cos\omega}$$

ist, und der Kosinus des Koordinatenwinkels ω_1 ist

$$\cos\omega_1 = -\frac{(\delta\,\beta + \alpha\,\gamma) + (\alpha\,\delta + \beta\,\gamma)\cos\omega}{\lambda^2}.$$

Es werden daher die geodätischen Krümmungen Γ_1 und Γ_2, welche zu den Kurven $u_1 = \text{const}$, $v_1 = \text{const}$ gehören, ausgedrückt durch

$$-\Gamma_1 e\sin\omega = \frac{\partial}{\partial u}\frac{(\alpha - \beta\cos\omega)\sqrt{e}}{\lambda} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{(\beta - \alpha\cos\omega)\sqrt{e}}{\lambda}$$

$$-\Gamma_2 e\sin\omega = \frac{\partial}{\partial u}\frac{(\gamma - \delta\cos\omega)\sqrt{e}}{\lambda} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{(\delta - \gamma\cos\omega)\sqrt{e}}{\lambda}.$$

Unter Berücksichtigung der Gleichungen

$$-\gamma_1 e\sin\omega = \frac{\partial\sqrt{e}}{\partial u} - \frac{\partial\sqrt{e}}{\partial v}\cos\omega$$

$$-\gamma_2 e\sin\omega = \frac{\partial\sqrt{e}}{\partial v} - \frac{\partial\sqrt{e}}{\partial u}\cos\omega$$

folgt hieraus

$$\Gamma_1 = \frac{\gamma_1\,\alpha + \gamma_2\,\beta}{\lambda},\quad \Gamma_2 = \frac{\gamma_1\,\gamma + \gamma_2\,\delta}{\lambda}.$$

Hierdurch sind auf der Fläche negativer konstanter Krümmung ∞^1 lineare, nur durch die Bedingungen

$$\alpha^2 + \beta^2 - 2\,\alpha\,\beta\cos\omega = \gamma^2 + \delta^2 - 2\,\gamma\,\delta\cos\omega$$
$$\alpha\,\delta - \beta\,\gamma \neq 0$$

beschränkte Transformationen der Variabeln bestimmt, welche wieder isogonale Kurvensysteme von rhombischer Teilung mit den konstanten geodätischen Krümmungen Γ_1, Γ_2 bilden.

Für den Winkel ω_1 erhält man auch die Gleichung

$$\lambda^2\sin^2\omega_1 = (\alpha\,\delta - \beta\,\gamma)^2\sin^2\omega,$$

aus welcher

$$\lambda \sin \omega_1 = + \sin \omega (\alpha \delta - \beta \gamma)$$

folgt, falls diese Transformationen stetig aus der identischen

$$\alpha = 1 \quad \beta = 0$$
$$\gamma = 0 \quad \delta = 1$$

hervorgehen sollen.

Auch erkennt man, daß die Invariante des Zählers von $d s^2$ in 1) bei dieser Transformation durch die Gleichung

$$\frac{\Gamma_1^2 + 2 \Gamma_1 \Gamma_2 \cos \omega_1 + \Gamma_2^2}{\sin^2 \omega_1} + \frac{\gamma_1^2 + 2 \gamma_1 \gamma_2 \cos \omega + \gamma_2^2}{\sin^2 \omega}$$

ausgedrückt wird, welche die Unveränderlichkeit des Krümmungsmaßes K aussagt.

Setzt man insbesondere

$$u' = u \alpha + v \beta$$
$$v' = - u \beta - v \alpha$$
$$\beta = \alpha \cos \omega,$$

so wird

$$\cos \omega_1 = \cos \omega, \quad \lambda = \alpha \sin \omega$$

und

$$\Gamma_1 = \frac{\gamma_1 + \gamma_2 \cos \omega}{\sin \omega}$$

$$\Gamma_2 = - \frac{(\gamma_1 \cos \omega + \gamma_2)}{\sin \omega},$$

so daß der Kosinus des Koordinatenwinkels ungeändert bleibt, während die geodätischen Krümmungen sich ändern.[1]) Diese Transformation entspricht daher keineswegs einer Bewegung der Fläche in sich.

Eine solche muß dagegen notwendig eintreten, wenn auch $\Gamma_1 = \gamma_1$, $\Gamma_2 = \gamma_2$ wird. In diesem Falle ergibt sich aus den beiden vorstehenden Gleichungen zwischen γ_1 und γ_2 die Relation

$$\gamma_1 (1 - \sin \omega) = - \gamma_2 \cos \omega.$$

[1]) Vgl. § 3.

Und in der Tat, setzt man

$$u_1 = u + v \cos \omega$$
$$v_1 = -v - u \cos \omega,$$

so wird

$$ds^2 = \frac{du^2 + dv^2 + 2\,du\,dv \cos \omega}{\left[\gamma_2 \frac{(1 + \sin \omega)}{\cos \omega} u + \gamma_2 v\right]^2}$$

$$= \frac{du_1^2 + dv_1^2 + 2\,du_1\,dv_1 \cos \omega}{\left[\gamma_2 \frac{(1 + \sin \omega)}{\cos \omega} u_1 + \gamma_2 v_1\right]^2}.$$

sobald $\gamma_1 (1 - \sin \omega) = -\gamma_2 \cos \omega$ vorausgesetzt wird.

§ 10.

Allgemeine Bemerkungen über die geodätische Krümmung eines Kurvensystems.

Ich führe endlich einige Bemerkungen über geodätische Krümmungen an, welche eine nähere Ausführung zu verdienen scheinen.

Sind die Kurven $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ und die Flächennormale so orientiert, wie die Achsen x, y, z eines Parallelkoordinatensystems, so ist das Integral

$$W = \int \left(\frac{\partial P}{\partial u} + \frac{\partial Q}{\partial v}\right) du\,dv$$

bei positiver Umlaufung eines „Elementarflächenstückes" F, d. h. bei derjenigen, welche denselben Sinn hat, wie die positive Umlaufung eines den positiven Zuwachsen du, dv entsprechenden Elementarparallelogrammes der Koordinatenbestimmung, gleich

$$W = -\int (P\,dv - Q\,du).$$

Es sei nun nach Bonnet's Formel das Integral der geodätischen Krümmung γ_q der Kurven $q = \text{const}$, erstreckt über

die Fläche F, es mag etwa als totale geodätische Krümmung der Kurven φ für dieses Gebiet bezeichnet werden —, gegeben durch

$$-\int \gamma_\varphi \, dF = \int\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{g\varphi_u - f\varphi_v}{S}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{e\varphi_v - f\varphi_u}{S}\right)\right] du\, dv,$$

wobei

$$S = \sqrt{g\varphi_u^2 - 2f\varphi_u\varphi_v + e\varphi_v^2}$$

gesetzt ist.

Man erhält also

$$1) \qquad -\int \gamma_\varphi \, dF = -\int \frac{(g\varphi_u - f\varphi_v)\, dv - (e\varphi_v - f\varphi_u)\, du}{S},$$

wo rechts das Integral über die Berandung von F in positivem Umlauf zu erstrecken ist. Ist nun F hinreichend klein, so werden die Kurven $\varphi = c$ nahezu in derselben Richtung verlaufen; wir verstehen dann unter der positiven Richtung von $\varphi = \text{const}$ diejenige, für die dv positiv ist. Dann ist für einen Punkt des Randes

$$\frac{\varphi_v}{\varphi_u} = -\frac{\partial u}{\partial v}$$

Enthält φ überhaupt die Variable u, so kann man immer voraussetzen, daß φ_u positiv ist. Unter dieser Voraussetzung ist aber der Integrand auf der rechten Seite von 1) mit Berücksichtigung des Vorzeichens, da nur positive Größen aus dem Wurzelzeichen S entfernt werden, gleich $ds \cos(\varphi, ds)$, so daß

$$2^a) \qquad -\int \gamma_\varphi \, dF = -\int \cos(\varphi, ds)\, ds$$ [1]

wird. Ist dagegen $\varphi_v \neq 0$, so erhält man, falls jetzt als positive Richtung der Kurven $\varphi = \text{const}$ diejenige angesehen wird, wo du positiv ist, ebenso

$$2^b) \qquad -\int \gamma_\varphi \, dF = +\int \cos(\varphi, ds)\, ds.$$

---

[1] Der Satz selbst ist keineswegs neu, vgl. z. B. Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces III, p. 142; doch scheint daselbst keine völlig ausreichende Vorzeichenbestimmung gegeben zu sein.

Ich mache von den beiden Formeln eine Anwendung auf diejenigen Flächen, welche ein isogonales Kurvensystem $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ mit den konstanten geodätischen Krümmungen γ_1, γ_2 enthalten.

Für das aus den Kurven $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ gebildete Viereck $ABCD$ mit dem Inhalte J, welches in positivem Sinne durchlaufen wird, ergibt sich für $\varphi = u$ nach 2^a)

$$-\gamma_1 J = -(AB - CD) + (BC - AD)\cos\omega.$$

Dagegen nach 2^b) für $\varphi = v$

$$-\gamma_2 J = (AB - CD)\cos\omega + (BC - AD).$$

Endlich hat man nach Liouville's Formel für das Krümmungsmaß

$$+\int K\,dJ = \gamma_1 \int \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u}\,du\,dv + \gamma_2 \int \frac{\partial \sqrt{e}}{\partial v}\,du\,dv$$

$$= \gamma_1 (CD - AB) + \gamma_2 (BC - AD).$$

Hieraus folgt nun

$$J(\gamma_1 + \gamma_2 \cos\omega) = (AB - CD)\sin^2\omega$$

$$J(\gamma_1 \cos\omega + \gamma_2) = (BC - AD)\sin^2\omega,$$

also

$$\frac{1}{J}\int K\,dJ = -\frac{(\gamma_1^2 + 2\gamma_1\gamma_2\cos\omega + \gamma_2^2)}{\sin^2\omega}.$$

Aus dieser Formel aber kann man unmittelbar auf die Konstanz von K schließen, wenn man J gegen Null konvergieren läßt.

Ist andererseits ein Gebiet F eingeschlossen von zwei orthogonalen Trajektorien einer Reihe von Kurven $\varphi = \text{const}$, so daß ein Viereck $ABCD$ entsteht, in dem $ABCD$ zwei gegenüberliegende Trajektorien, BC und AD zwei Kurven $\varphi = \text{const}$ sind, so ist die totale geodätische Krümmung der Kurven $\varphi = \text{const}$ für F

$$-\int \gamma_\varphi\,dF = BC - AD.$$

Insbesondere ist für $\gamma_\varphi = \text{const} = \gamma$

$$- \gamma J = B C - A D$$

also die Differenz der Bogenlängen der Kurven φ, welche das Gebiet begrenzen, dem Inhalte J desselben proportional. In dem besonderen Falle, wo $\gamma = 0$, ergibt sich der bekannte Satz von der Äquidistanz der orthogonalen Trajektorien einer Serie geodätischer Linien.

Diese Betrachtungen können auch in etwas erweitertem Sinne benutzt werden. Ein Beispiel dafür bildet das Stück einer Zone einer Rotationsfläche, die von irgend zwei Parallelkreisen und zwei durch Rotation ineinander übergehenden Kurven begrenzt wird. Hier haben die Parallelkreise, falls das Längenelement der Fläche gegeben ist durch

$$d s^2 = (1 + f'^2)\, d u^2 + u^2\, d v^2,$$

die geodätische Krümmung

$$- \gamma_1 = \frac{1}{u \sqrt{1 + f'^2}};$$

die totale geodätische Krümmung ist daher gleich

$$2 \pi (u_1 - u_0),$$

d. h. gleich der Differenz der beiden Parallelkreisbögen, welche das Zonenstück begrenzen.

Eine Serie von Kurven, deren geodätische Krümmung überall von ein und demselben Zeichen ist, kann niemals von einer oder mehreren geschlossenen orthogonalen Trajektorien völlig begrenzt werden, vorausgesetzt, daß eine Zerlegung des Gebietes in Elementarflächen möglich ist, für welche die Formeln 2^a) resp. 2^b) immer in derselben Weise anwendbar bleiben. Für geodätische Linien ist dies dagegen sehr wohl möglich, wie z. B. ringförmige, aus den Umfängen Gaußscher Kreise gebildete Teile der Fläche zeigen.

Umgekehrt ist es nicht möglich, auf einer Fläche etwa

ein ringförmiges Gebiet abzugrenzen, das von geodätischen Linien begrenzt ist, derartig, daß auch der Innenraum stetig von solchen geschlossenen Linien erfüllt ist — den einzigen Fall ausgenommen, wo die Umfänge der beiden Begrenzungslinien, wie z. B. bei einer Zylinderfläche, gleich groß sind. Dagegen ist dies, wie das Beispiel der Parallelkreise einer Rotationsfläche zeigt, für Kurven, deren geodätische Krümmung von einerlei Vorzeichen ist, sehr wohl möglich.

Die Seeschwankungen (Seiches) des Chiemsees.

Von **Anton Endrös.**

(*Eingelaufen 5. Mai.*)

(Mit Tafel II und III.)

Die ersten Untersuchungen jener periodischen Bewegungen der Wassermasse eines Sees, welche nach einer Genfer Lokalbezeichnung allgemein „Seiches“ genannt werden, waren am Chiemsee in den Jahren 1901 bis 1903 ausgeführt worden. Die Beobachtungen hatten der unregelmäßigen Umrißform des Sees entsprechend äußerst komplizierte Schwingungsverhältnisse ergeben, worüber in einer Schrift „Seeschwankungen (Seiches) beobachtet am Chiemsee, Traunstein 1903, Dissertation der K. Technischen Hochschule in München“ [1]) (im folgenden zitiert mit P. I.) ausführlich berichtet wurde. Auf Anregung von Herrn Professor Dr. Hermann Ebert wurden die Untersuchungen im Frühjahr 1904 wieder aufgenommen.

Es war zunächst erwünscht an weiteren Zwischenpunkten Beobachtungen mit selbstregistrierenden Limnimetern anzustellen, um einzelne Schwingungen, besonders diejenige von 29 Min.-Dauer im westlichen Teile des Sees, Inselsee genannt, näher aufzuklären (vgl. P. I S. 65 ff.). Dabei sollte zugleich der Einfluß der Inseln, welche von den bayerischen Seen nur am Chiemsee in dieser Ausdehnung vorhanden

[1]) Die Schrift erschien zugleich als Jahresprogramm der K. Realschule Traunstein 1903.

sind — die Herreninsel hat 225 ha, die Fraueninsel 8,9 ha und die Krautinsel 2,7 ha; sie machen zusammen 2,25 % der Seefläche aus — in die Untersuchung einbezogen werden. Im Juni 1904 mußte ferner die Tieferlegung des Chiemseespiegels dem Vertrage gemäß beendigt sein, wobei alle Wasserstände des Sees durch Regulierung des Seeabflusses, der Alz, um 60 cm tiefergelegt werden sollten.[1] Dies seit 200 Jahren geplante Unternehmen, das den Zwecken der Melioration der anliegenden Kulturländer diente, konnte hiebei auch für die Wissenschaft nutzbar gemacht werden, indem der Einfluß auf die Schwingungsverhältnisse des Sees untersucht und damit gleichsam ein Experiment größten Stiles angestellt werden konnte. Die ersten Untersuchungen hatten auch neben der starken Einwirkung der Umrißform des Sees auf die Schwingungsverhältnisse eine Mitwirkung der unterseeischen Beckenunregelmäßigkeiten ergeben. Diese Mitwirkung sollte weiter verfolgt werden, wozu zunächst Neulotungen notwendig waren, da verschiedene Umstände darauf hindeuteten, daß die Lotungen an mehreren Stellen nicht dicht genug waren.

So erwähnte E. Bayberger,[2] dem wir die erste Auslotung des Sees verdanken, selbst, daß die isolierte Tiefe von 43 m südwestlich der Herreninsel (vgl. die Tafel II) nicht notwendig angenommen werden muß, sondern daß die 40, 30 und 20 m-Tiefenkurven noch diese Stelle vielleicht umschließen. Um über die Bodengestalt in diesem Seeteile Sicherheit zu erhalten, wurden daher dort zwei Querprofile ausgelotet, das eine vom Badehaus bei Felden gegen die Südwestecke der Herreninsel und das zweite von da gegen den Ufervorsprung südlich Harras. Diese wie die folgenden geloteten Tiefen sind in die

---

[1] Über das nun ausgeführte Unternehmen ist eben ein amtlicher Bericht „Die Senkung des Chiemseespiegels mittels Korrektion des Alzausflusses bei Seebruck" vom Vorstande des K. Straßen- und Flußbauamtes Herrn Bauamtmann G. Mayr veröffentlicht worden, aber leider nicht im Drucke erschienen, welchem obige Angaben entnommen sind.

[2] E. Bayberger, Der Chiemsee. Mitteilungen des Vereins für Erdkunde zu Leipzig 1888, S. 30.

Karte auf Tafel II eingezeichnet. Dieselbe enthält als Uferlinie die Tiefenkurve von — 0,36 m H. P., mit welcher die Umrißlinie des Sees nach der Tieferlegung nahe zusammenfallen dürfte. Die genannte Kurve ist einer Karte des K. Straßen- und Flußbauamtes Traunstein entnommen, welche im Jahre 1880 auf Grund umfangreicher Vermessungen hergestellt und mit Tiefenkurven von 0,5 zu 0,5 m versehen ist. Die frühere Uferlinie des Sees ist durch die punktierte Linie angedeutet; sie ist dem Katasterblatte des K. B. topographischen Bureaus entnommen, da die Umrißlinie der Baybergerschen Karte sich als ungenau erwiesen hatte. Die Tiefenangaben stützen sich im wesentlichen auf die E. Baybergersche Karte und beziehen sich sämtliche auf das frühere Mittelwasser von + 0,50 m H. P. Aus den Neulotungen ersieht man, daß die 10 m-Tiefenkurve viel näher als früher an die Irschner Bucht herangeht und daß die 20 und 30 m-Isobathen hier nicht enden, sondern die isolierte Tiefe von 43 m umschließen, ferner daß nur die 40 m-Kurve eine in sich geschlossene ist, aber eine ungefähr fünfmal so große Fläche einschließt und sich 500 m südlich Harras so sehr dem Ufer nähert, daß wir hier ähnliche Böschungsverhältnisse wie an dem durch die Alluvionen der Achen entstandenen Achenzipfel und dem durch den Rotbach erzeugten Ufervorsprung vor uns haben. (Wahrscheinlich befand sich hier früher einmal die Mündung der Prien, von welcher ein Seitenkanal, der Mühlbach, etwas südlicher bei Schöllkopf in den See mündet.) Außerdem ist aus den Lotungen ersichtlich, daß von der Südwestspitze der Herreninsel in südlicher Richtung gegen das Feldner Gasthaus ein sanfter Rücken zieht mit zwei Sätteln, dem südlichen von 36 m größter Tiefe und dem nördlichen von 24 m; dazwischen erhebt sich der Seeboden bis 20 m. Diese Erhebung setzt sich, wie ich von den Fischern erfahren konnte, in Gestalt eines Rückens längs der Insel gegen Osten fort.

Weiterhin wurde das Profil Urfahren—Herreninselnordspitze ausgelotet, da die dort sich befindliche Einengung bei der Schwingungsunterteilung einen sehr großen Einfluß ausübt.

Der Seeboden fällt von Urfahren aus gleichmäßig bis zu einer Tiefe von 6,5 m ab; etwa 100 m vor der Herreninsel nur ist eine 20 m breite, über 10 m tiefe Rinne, welche ich erst bei einer Nachlotung auffinden konnte.

Ferner wurden einige von den den Fischern wohlbekannten und mit besonderen Namen belegten unterseeischen Erhebungen aufgesucht, von welchen der Chiemsee acht haben soll. Eine Stelle von 13 m Wassertiefe genannt die „Höhe“ wurde schon von Bayberger südöstlich der Herreninsel aufgefunden. Da nördlich davon keine Lotungen vorlagen, so hat er den Seeboden ansteigend gegen die Herreninsel angenommen. Ein weiterer Berg erhebt sich vor der Feldwieser Bucht bis 11 m unter Wasser, während ich näher der Bucht noch 28 m lotete. Eine dritte nnter dem Namen „Kaiser“ bekannte Erhebung (s. P. I, S. 92) liegt im nordwestlichen Teile der Chieminger Seeausbuchtung und erhebt sich als Rücken langsam von Süden nach Norden bis 5 m unter Wasser, fällt aber gegen Westen, Norden und Osten ziemlich steil ab. Eine vierte isolierte Bodenerhebung hat E. Bayberger zu 27 m mitten zwischen der Fraueninsel und dem Achenzipfel, der Halbinsel am Südufer, gefunden. Eine fünfte soll sich etwa 1 km nordöstlich von Gstadt, am Nordwestufer, befinden, da wo nach Bayberger der See steil abfällt. Eine sechste Erhebung soll als größeres Plateau zwischen Chieming und dem Achenzipfel liegen, das von den Fischern als Grabenstädter Berg bezeichnet wird. Endlich reichen zwei weitere Erhebungen östlich bezw. nordöstlich der Herreninsel bis wenige Dezimeter unter Wasser, so daß dieselben nach der Tieferlegung bei niedrigem Wasserstand als Inseln hervortreten, während ich zwischen denselben und der Herreninsel noch 5 bezw. 4 m gelotet habe.

Man sieht aus den Lotungsergebnissen, daß die von E. Bayberger vorgenommenen Lotungen, so genau sie im westlichen Seeteile sind, sich doch als unzureichend im südlichen Teile und im Weitsee erweisen. Es dürfte sich daher verlohnen, wenn noch die Veränderungen der Seefläche durch die Tieferlegung veröffentlicht sein werden, eine Neuverlotung

vorzunehmen und die Konstanten des Seebeckens neu zu bestimmen.

Ein Hauptzweck der weiteren Untersuchungen der Seiches unseres Sees war endlich die Erforschung der Entstehungsursachen dieser Seeschwankungen, da sich die ersten Untersuchungen nur auf acht Monate erstreckt hatten und gerade der Chiemsee sich wegen seiner geographischen Lage sowohl als der raschen Dämpfung der Hauptschwingung, wodurch der Zeitpunkt und die Größe der neuerzeugten Schwankungen deutlicher als an anderen Seen herausgefunden werden kann, als besonders geeignetes Objekt erwiesen hatte. Über die Ergebnisse dieser letzteren Untersuchungen, in welche noch Beobachtungen am Waginger- und Simssee einbezogen wurden, wird in einer weiteren Arbeit berichtet werden. Im folgenden seien nur die Ergebnisse über die Schwingungsformen des Chiemsees an sich mitgeteilt.

Zuvor möchte ich mich der angenehmen Pflicht entledigen für die mannigfache Unterstützung, die ich bei der Arbeit gefunden habe, wärmstens zu danken. Vor allem waren mir die zum Teil kostspieligen Untersuchungen nur dadurch ermöglicht, daß die K. B. Akademie der Wissenschaften in München wiederum die erforderlichen Mittel zur Verfügung stellte, wofür an dieser Stelle ehrerbietigst gedankt sei. Am See selbst übernahmen bereitwilligst die Hilfsbeobachter, welche später bei den betreffenden Stationen mit Namen aufgeführt sind, die Überwachung und Bedienung der Instrumente. Außerdem gewährte mir der Besitzer der Chiemseedampfschiffahrt Herr Ludwig Feßler in liebenswürdigster Weise während der ganzen Beobachtungszeit freie Fahrt, wodurch mir die Kontrolle der Apparate sehr erleichtert wurde. Ferner überließen mir in entgegenkommenster Weise der Vorstand des K. B. Hydrotechnischen Bureaus Herr Oberbaurat Hensel die Diagramme des registrierenden Alzpegels in Seebruck und der Vorstand des K. Straßen- und Flußbauamtes Traunstein Herr Bauamtmann Mayr sämtliche für die Tieferlegung einschlägigen Schriften und Karten. Endlich stellte

mir Herr Professor Dr. W. Halbfaß in Neuhaldensleben seinen Lotapparat und seine umfangreiche Literatur über die Seenkunde bereitwilligst zur Verfügung und Herr Professor Dr. E. Bayberger in Passau übersandte mir freundlichst seine Originalaufzeichnungen über die Verlotung des Chiemsees. Den genannten Herrn sei auch an dieser Stelle nochmals aufrichtigst gedankt. Besonderen Dank aber schulde ich wiederum Herrn Professor Dr. Hermann Ebert an der Technischen Hochschule in München für die Überlassung sämtlicher Apparate wie die allseitige Förderung der Untersuchungen.

I. Die Beobachtungen.

1. Die Apparate.

Zu den Beobachtungen stand mir zunächst wieder ein Sarasinsches selbstregistrierendes Limnimeter[1]) zur Verfügung. Instrumente dieser Art hatten an den verschiedensten Seen Anwendung gefunden, um ein einheitliches Verfahren in der Beobachtungsmethode zu erhalten, und haben im allgemeinen sich gut bewährt. Auch bei den Untersuchungen in den Vorjahren wurden dieselben als sehr empfindlich befunden (s. P. I, S. 11). Die Störungen, welche durch die Verbindung von Pegel- und Registrierapparat mittels einer Gelenkstange entstanden, konnten bei der ständigen, persönlichen Überwachung rasch behoben werden. Da aber eine so häufige Kontrolle des Apparates wie früher mir jetzt nicht mehr möglich war, besonders wegen der größeren Ausdehnung des ganzen Beobachtungsnetzes, weisen die Limnogramme öfters die abgeschnittenen Kurvenzüge auf, welche einen Fehler bis + 5 mm enthalten können. Die gleichen Erfahrungen hatte schon W. Halbfaß beim Horster Limnimeter am Madüsee[2]) gemacht, wie die mitgeteilten Kurvenbeispiele ersehen lassen: dem

[1]) Eine eingehende Beschreibung durch H. Ebert findet sich in der Zeitschrift für Instrumentenkunde, Bd. XXI, 193. J. Springer, Berlin 1901.

[2]) W. Halbfaß, Stehende Seespiegelschwankungen (Seiches) am Madüsee in Pommern. Zeitschrift für Gewässerkunde, 6. Bd., 2. H., 1903.

genannten Forscher war eine persönliche Kontrolle der Apparate bei der weiten Entfernung vom See unmöglich. Auch die japanischen Seichesforscher berichten von unbefriedigenden Ergebnissen mit den Limnimetern,[1]) wobei die Aufzeichnungen eines solchen Instrumentes mit einem daneben aufgestellten, von ihnen konstruierten, das den Schreibstift direkt an der Schwimmerstange trägt, nicht übereinstimmten. Die von E. Sarasin auf Grund seiner reichen Erfahrung auf dem Gebiete der Seichesforschung konstruierten Apparate waren eben zunächst für eine Aufstellung auf Steinmauern oder in festgebauten Badehäusern gedacht, wo eine Verschiebung von Pegel- und Registrierapparat nicht leicht möglich ist, und die dicht bewohnten Schweizer Seen erlaubten auch immer eine so feste Aufstellung und sorgsame Überwachung. Dazu kommt, daß die Instrumente fast immer an größeren Seen verwendet worden waren, wo die Schwingungsamplituden gewöhnlich über 1 cm betragen, so daß Fehler von dem erwähnten Betrage nicht so störend wirken. Bei den in neuester Zeit untersuchten Seen fehlte aber jede Gelegenheit zu einer derartigen festen Aufstellung, weshalb die Instrumente auf eigens geschlagenen Pfählen oft weit in den See hinaus — wie am Madüsee — gestellt und dort dem Wellengang, Wind und Wetter ausgesetzt waren. Daß dabei jederzeit Verschiebungen zwischen Pegel- und Registrierapparat eintreten können, ist klar und unvermeidlich. Die Sarasinschen Instrumente in der jetzigen Form sind daher besonders für kleinere Seen, wo die Amplituden 1—2 mm gewöhnlich nicht übersteigen, nicht immer zu gebrauchen.

Die Sarasinschen Limnimeter lassen sich jedoch durch einfache Abänderungen, wie sie zur Zeit an den beiden Instrumenten der K. B. Akademie vorgenommen werden, auch in den genannten Fällen brauchbar machen. Der getrennte Pegelapparat ist überflüssig und der Schwimmer wird direkt über die beiden Rollen des Registrierapparates gehängt, welche

---

[1]) H. Ebert, Über neuere japanische Seenforschungen. Zeitschrift für Instrumentenkunde, XXIII, Nov. 1903, S. 345. J. Springer, Berlin.

die Schiene mit dem Schreibstift tragen. Der Schwimmer hängt hierbei an einem Kupferbande, das an der Schiene selbst mittels Druckschrauben festgeklemmt werden kann. Da die eine Rolle in der Mitte ihres Umfanges gezahnt ist, wird das Band seiner ganzen Länge nach in zwei schmale Bänder gespalten oder man verwendet statt des Doppelbandes nach Chrystal[1]) zwei Drähte, welche in zwei Riefen über die Rollen geführt sind. Dadurch ist erreicht, daß man dem abgeänderten Limnimeter jederzeit seine frühere Form wiedergeben kann, wenn an einem See die Verhältnisse dafür günstig sind. Am anderen Ende des Bandes hängt ein Gegengewicht. Durch diese Anordnung ist außerdem der Schreibstift in direkter Verbindung mit dem Schwimmer und die oben besprochenen Störungen fallen weg. Weiterhin bietet die Anordnung den Vorteil, daß der Schutzzylinder unmittelbar zwischen den Pfählen, welche den Apparat tragen, befestigt werden kann und dadurch einen festeren Halt bekommt. Je nach den Veränderungen des Pegelstandes kann die Schiene mit dem Schreibstift auf dem Bande nach Lockerung der Schrauben verschoben werden.

Auch Professor Chrystal hat die Sarasinschen Limnimeter für die Beobachtungen an den schottischen Seen für nicht immer geeignet befunden und dieselben in ähnlicher Weise bereits abgeändert und außerdem ein neues Instrument konstruiert, das sich bereits bei den Untersuchungen bewährt hat.[1]) Bei dem letzteren hängt der Schwimmer mittels eines Stahlbandes über zwei Gleitrollen, wie oben bei der Abänderung des Sarasinschen Limnimeters angegeben ist, an dessen anderem Ende ein Gegengewicht sich befindet. An dem Bande ist nun nicht direkt der Schreibstift befestigt wie beim Plantamourschen Limnographen,[2]) wo infolge der Reibung des Stiftes auf dem Papier der Stift schiefgestellt und ein störender Fehler entstehen kann, sondern auf dem Streifen wird ein kleiner

---

[1]) Die folgende kurze Beschreibung ist einer gütigen brieflichen Mitteilung des Herrn Prof. Dr. Chrystal entnommen.

[2]) E. v. Cholnoky, Limnologie des Plattensees. Wien 1897.

Wagen befestigt, der einerseits auf zwei Rädchen mit Einkerbungen am Rande über einer kantigen Schiene läuft und anderseits auf einer Rolle mit flachem Rand auf einer ebensolchen Schiene gleitet. Dieser kleine Wagen trägt den Schreibstift, der dabei schief auf dem Papier liegt. Hierdurch ist eine leichte und fehlerfreie Bewegung des Stiftes erreicht und außerdem ein Hemmen des Streifenganges durch den eindrückenden Stift vermieden. Den gleichen Wagen verwendete Chrystal auch bei den abgeänderten Sarasinschen Instrumenten. Die Schiene des ursprünglichen Limnimeters, welche den Schreibstift trägt, bleibt dabei weg, dafür werden die beiden obengenannten Schienen daneben befestigt. Statt des Stahlbandes benützte Chrystal hierbei auch zwei Drähte, wie schon oben erwähnt, welche in je zwei in die Rollen des Sarasinschen Limnimeters eingeschnittenen Rinnen laufen. Mit einem solchen abgeänderten Limnimeter wurden bereits Beobachtungen an Seen angestellt und diese lieferten Kurvenzüge, welche alle jene Einzelheiten aufweisen, wie ich sie mit meinem Limnimeter erhalten habe, wovon ich mich an einem von Chrystal freundlichst übersandten Original-Limnogramme selbst überzeugen konnte. Zugleich verwendet Chrystal Tintenstifte und dazu Papier mit feinerer Oberfläche, was sich bei dem schiefstehenden Stifte vollständig bewährt hat.

Als zweites Limnimeter benützte ich das von mir selbst konstruierte Instrument,[1]) das im folgenden zum Unterschied vom Sarasinschen Limnimeter kurz transportables genannt ist. Dasselbe war zu Beobachtungen an Zwischenpunkten hergestellt worden und hat sich auch bei den weiteren Beobachtungen am Chiemsee und besonders bei den Untersuchungen am Wagingersee und an kleineren Weihern wegen seiner Handlichkeit und großen Empfindlichkeit als sehr geeignet erwiesen. Dadurch ferner, daß die Aufzeichnungen mehrerer Tage (bis zu acht Tagen bei geringer Amplitude) untereinander auf

[1]) Eine kurze Beschreibung desselben mit Abbildung s. P. I, S. 33. und Zeitschrift für Instrumentenkunde. J. Springer, Berlin, 24. Juni 1904

denselben Streifen kommen, sind die Limnogramme sehr übersichtlich. Beim langsamen Streifengang (pro 1^h 2 cm) fällt auch die häufige Bedienung weg.

Endlich wurde wieder das Zeigerlimnimeter[1]) zu Ablesungen des Wasserstandes an korrespondierenden Punkten häufig gebraucht. Der verwendete Zeiger erlaubte die Ablesungen des Wasserstandes in achtfacher Vergrößerung und zwar wurde gewöhnlich von Minute zu Minute abgelesen, wozu sich auch Hilfsbeobachter benützen ließen.

2. Die Limnogramme.

Die Aufzeichnungen der Limnimeter sind am Chiemsee meistens Interferenzkurven von zwei und häufig von mehr als zwei Schwingungen, wie ich sie in P. I, S. 12 u. ff. eingehender besprochen habe. Die Entzifferung solcher Limnogramme verlangt daher immerhin eine Übung, welche man sich am besten durch künstliches Entwerfen mehrerer einfacher Kurven von verschiedener Dauer und Danebenzeichnen von Interferenzkurven derselben verschafft.

Die Dauer der einzelnen Seiches erhält man am genauesten und sichersten an den Knotenlinien der nächsten Oberschwingungen. Das ist aber nur an Seen mit vorwiegender Längsrichtung der Fall. Am Chiemsee dagegen, wo Schwingungen nach verschiedenen Richtungen auftreten, sind auch an den genannten Knotenlinien die einzelnen Schwingungen nicht genauer zu messen. Man ist daher auf die Bestimmung der Dauer aus Interferenzkurven angewiesen. Es wurde dabei wieder so verfahren, daß nur längere Seichesreihen benützt wurden, welche in der zu messenden Schwingung ausklangen. An der Hand der künstlich hergestellten Interferenzkurven konnten außerdem die höchsten und tiefsten Stellen der Einzelschwingungen hinreichend genau herausgefunden werden. Dabei war besonders auf eventuelle Phasenänderungen zu achten.

---

[1]) Eine Beschreibung desselben s. P. I, S. 7 und Dr. A. Petermanns geographische Mitteilungen, 1904, 12. H., S. 1.

Außerdem mußten die ersten Kurvenzüge einer jeden Reihe gewöhnlich weggelassen werden, weil sie keine periodischen Bewegungen des Seespiegels, sondern durch denivellierende äußere Ursachen erzwungene Bewegungen verzeichnen. Auf diese Bewegungen, die Chrystal zum Unterschied von den Seiches, welche „freie" Schwingungen der Wassermasse sind, „erzwungene" genannt hat,[1]) werde ich bei den Ursachen der Seiches ausführlich zurückkommen. Hier sei nur erwähnt, daß diese Kurvenzüge nie symmetrische Gestalt haben, wie die reinen Sinuskurven, so daß die Gefahr einer Verwechslung mit freien Schwingungen nicht leicht möglich ist. Findet man daher einen oder mehrere symmetrisch verlaufende Kurvenzüge von annähernd gleicher Dauer, so darf man darin eine neue Schwingung vermuten und wird sie bei genauer Durchsicht der Limnogramme öfters herausfinden. Auf diesem Wege habe ich eine neue Seiche von 54 Min.-Dauer und andere seltenere Schwingungen aus den früheren Limnogrammen nachträglich herausgefunden. Außerdem ist diese Bemerkung, die ich aus meinen Erfahrungen an sämtlichen Seen als erwiesen annehmen darf, besonders wichtig für die kurzdauernden Untersuchungen mit dem Zeigerlimnimeter, welche gewöhnlich nur wenige Kurvenzüge liefern. Eine Verwechslung mit dikroten Schwingungen ist ebenfalls ausgeschlossen, weil bei diesen der auf- und absteigende Ast der Kurvenzüge ebenfalls nicht symmetrisch verläuft. Eine Ausnahme nur habe ich bei den sogenannten Schwebungen beobachtet.

Nähern sich nämlich die Periodendauern zweier Schwingungen, so kommen n solche längerer Dauer auf $n + 1$ solche kürzerer Dauer, wobei $n = \frac{T'}{T - T'}$, wenn „T" die längere Dauer und „T'" die Dauer der kürzeren Periode ist; „n" ist dabei gewöhnlich nicht rational. Ich habe diese Kurvenzüge Schwebungen genannt, weil dieselben die graphische Dar-

[1]) Chrystal, On the Hydrodynamical Theorie of Seiches; Trans. Roy. Soc. Edinburgh 51. III. No. 25. Im folgenden zitiert mit H. T. S.

stellungen der sogenannten Schwebungen in der Akustik sind. Man sieht hierbei symmetrische Kurvenzüge, aber die Amplituden der einzelnen aufeinanderfolgenden Schwingungen wachsen bis zu einem Maximum (gleich der Summe der Amplituden der einzelnen Schwingungen) und nehmen in der gleichen Zeit wieder ab bis zu einem Minimum (der Differenz der Amplituden), um das Spiel zu wiederholen. Die Dauer einer solchen Schwebung ist hierbei $n \cdot T = (n + 1) \times T'$ (Min.). Ich habe schon darauf hingewiesen, daß ein Phasenvergleich der Einzelschwingungen an zwei Stationen sehr erleichtert und auch ohne ganz genaue Zeitmarke möglich ist; laufen nämlich die Kurvenzüge parallel, so haben beide Schwingungen an den betreffenden Stationen gleiche oder beide entgegengesetzte Phase; ist der Gang der Schwebungen entgegengesetzt, so hat die eine gleiche Phase, die andere entgegengesetzte (vgl. P. I, S. 16). Liegen dagegen nur einzelne Kurvenzüge, also keine ganze Schwebung vor, wie es bei Aufnahmen mit dem Zeigerlimnimeter gewöhnlich der Fall ist, so kann ein Vergleich der Kurvenzüge zu ganz falschen Ergebnissen führen, worauf ich später zurückkommen werde. Chrystal weist auch daraufhin, daß die Perioden höheren Nodalität, weil sich dieselben mit der Knotenzahl immer mehr nähern, am Ende der Längsachse schwer herauszufinden sind. Das ist auch der Grund dafür, daß die Kurven an den Enden der Hauptachse oft recht kompliziert werden. Denn schon drei Schwingungen von nahe gleicher Periodendauer z. B. von 11, 10 und 9 Min.-Dauer geben eine sehr komplizierte Kurve. Darin hat auch die verwickelte Form der Kurven in Seebruck, am Nordende des Chiemsees (s. P. I, S. 26) und diejenige der Limnogramme in Luzern am Vierwaldstättersee seinen Grund.[1])

[1]) Ed. Sarasin, Beobachtungen über die Seiches des Vierwaldstättersee; übersetzt von Trutmann. Mitteilung der Naturforscher-Gesellschaft in Luzern 3. 1903/04.

3. Die früheren Beobachtungen.

Nachdem durch Experimente an einem Beckenmodelle des Chiemsees und durch Beobachtungen mit dem Zeigerlimnimeter erwiesen war, daß Schafwaschen im Aiterbachwinkel, am Westufer des Sees, und Seebruck, am Nordufer, die Enden der Hauptschwingungsachse sind, war dort je ein selbstregistrierendes Sarasinsches Limnimeter aufgestellt worden. In Schafwaschen, dem Aufstellungsorte am Westufer (s. Karte auf Tafel II, Station I), stand das Instrument vom 14. April 1902 bis 1. Februar 1903 und in Seebruck das zweite Limnimeter vom 23. Juni 1902 bis 15. Februar 1903 (s. Tafel II, Station II). Um die komplizierten Schwingungsverhältnisse aufzuklären war ein drittes Instrument notwendig, das leicht transportiert und rasch aufgestellt werden konnte. Ich hatte zu diesem Zwecke im Mai 1902 das oben erwähnte transportable Limnimeter konstruiert. Dasselbe war in der Zeit vom 21. Juli bis 15. November 1902 nach und nach an 8 rings um den See verteilten Punkten aufgestellt worden und zwar nacheinander 1. in Feldwies, am Südufer, 2. in Felden, am westlichen Ende des Südufers, 3. in Mühlen, nördlich der Herreninsel, 4. in Stock, westlich der Herreninsel, 5. in Gstadt, nordwestlich der Fraueninsel, 6. in Arlaching, am Nordostufer, 7. in Chieming, am Ostufer und 8. in Hagenau, am Südostufer. Die Punkte selbst sind mit den laufenden Nummern in die Karte auf Tafel II eingetragen. Die Ergebnisse an diesen Stationen sind in P. I, S. 17—47 ausführlich mitgeteilt. Weil wir im folgenden wiederholt darauf zurückkommen müssen, seien nochmals in beiliegender Tabelle die an jedem Punkte beobachteten Seiches und für jede Seiche das Amplitudenverhältnis zu einer Vergleichsstation angegeben, wobei die Amplitude an derselben gleich 100 gesetzt ist. Das beigefügte Zeichen gibt die gleiche (+), beziehungsweise entgegengesetzte Phase (—) in bezug auf die Vergleichsstation an. Ist die betreffende Schwingung an einer Station nicht aufgefunden worden trotz eines Vergleiches mit dem gleichzeitigen Limnogramme einer anderen Station, so ist

Die Beobachtungen des Jahres 1902/03.

Station	Amplituden und Phasen der Seiches von folgender Dauer in „Min.“													Größte Amplitude
	43	$37^1/_2$	29	18	16	$12^1/_2$	11	$9^1/_2$	8	7	5	4	3	
I. Schafwaschen	+ 100	+ 100	+ 100	+ 20	0	0	+ 20	0	+ 25	0				300
II. Seebruck	— 17		+ 29		+ 100	0	+ 100	+ 100	+ 100	+ 100	+ 100	+ 100	+ 100	300
1. Feldwies	(— 20)		0	+ 56	— 93	+ 100	0	— 100	+ 200	— 25		( )		80
2. Felden	+ 14		— 68	+ 60	+ 67	+	0		0	0		( )		38
3. Mühlen	0		— 58	— 74	— 120	(—) 50	0		— 100	— 100			( )	60
4. Stock	+ 37		— 90		+ 20				(0)					6
5. Gstadt	0		— 10	— 11	— 38		(— 10)		(+) 10				+	7
6. Arlaching	— 15		+ 34	— 28	+ 57		+ 34		0	— 47	+ 200			15
7. Chieming	— 10		+ 39	— 33	— 44		+ 25		— (10)	+ 20				16
8. Hagenau	0		+ 42	+ 100	— 157		+ 94		+ 150	— ( )				32

die Amplitude 0 gesetzt; ist sie zweifelhaft, so ist die Rubrik freigelassen. In der ersten Rubrik stehen die Stationen, in der zweiten die Amplituden und Phasen der 43 Min.-Seiche, in der dritten die der $37\,^1/_2$ Min.-Seiche u. s. w., in der letzten ist die größte Doppelamplitude des Beobachtungsortes in Millimetern angefügt.

Auf Grund dieser Ergebnisse, wozu noch Beobachtungen an 10 weiteren Punkten mittelst des Zeigerlimnimeters kamen, konnten die Knoten und Bäuche einer größeren Zahl von Schwingungen zum Teil genau angegeben werden (vgl. P. I, S. 47—57).

4. Die neuen Beobachtungen in Schafwaschen (I).

Aus den einleitend schon erwähnten Gründen wurden nun im Frühjahr 1904 die Untersuchungen wieder aufgenommen. Zunächst wurde das Sarasinsche Limnimeter in Schafwaschen an der gleichen Stelle wie in den Vorjahren wieder aufgestellt. In dem genannten Winkel des Sees hatten sich die beiden Hauptschwingungen des Sees mit ihrer größten Amplitude gezeigt und da mir diesmal nur ein Sarasinsches Instrument zur Verfügung stand, war dieser Punkt der geeignetste um als feste Vergleichsstation für die Beobachtungen an den Zwischenpunkten zu dienen. Außerdem standen mir in Seebruck die Aufzeichnungen des dortigen registrierenden Seepegels zur Verfügung, welche die Seiches, wenn auch nur in zehnfacher Verkleinerung, so doch deutlich genug anzeigten, um die einzelnen Schwingungen herausfinden zu können. An der genannten Stelle stand das Limnimeter vom 14. April bis 10. Juli, von wo ab die Wassertiefe infolge der raschen Senkung des Seespiegels durch die Tieferlegung so gering wurde, daß eine Neuaufstellung notwendig wurde. Etwa 100 m nördlicher wurde dieselbe vorgenommen, an einer Stelle, wo die Wassertiefe bei 0 cm Herrenwörther Pegel (im folgenden mit H. P. abgekürzt) immer noch 1,5 m betrug. Um keine Unterbrechung in der Beobachtung eintreten zu lassen, registrierte dort das transportable Limnimeter vom 1. Juni bis 10. Juli

ununterbrochen den Wasserstand. Von da ab war das Sarasinsche Instrument in Tätigkeit bis 1. Januar 1905, wo beginnende Eisbildung weitere Beobachtungen verhinderte. Bei dem Tauwetter Ende Februar wurden die Beobachtungen wieder aufgenommen; dabei war die ganze Bucht noch unter starker Eisdecke. Unerwarteter Eisgang am 12. März unterbrach die Untersuchungen, da das Instrument ans Ufer geschoben und beschädigt wurde. Ende Mai gelang es wieder, dasselbe an der gleichen Stelle in Tätigkeit zu setzen, bis Ende Juli die Beobachtungen beendigt werden konnten. Die Bedienung hatte wieder wie in den Vorjahren Herr Gasthofbesitzer B. Mayer in freundlichster Weise übernommen.

Im folgenden werden nun die Seiches, welche aus den Aufzeichnungen in Schafwaschen herausgefunden wurden, geordnet nach ihrer Dauer aufgezählt.

1. Die 54 Min.-Seiche. Die Schwingung wurde erst nachträglich bei der abermaligen Vermessung der Limnogramme des Jahres 1902 als eigene Seiche des Sees erkannt. Die größte Reihe umfaßt aber nur sechs Schwingungen und die Amplitude[1]) erreicht nur 10 mm. Sie ist dabei auch nur bei hohem Wasserstande (über 80 cm H. P.) zu finden; da dieser Wasserstand in der weiteren Beobachtungszeit nicht mehr erreicht wurde, ist die Schwingung auch aus den neuen Limnogrammen nicht mehr herauszufinden. Als Mittel aus den gemessenen Reihen ergibt sich 53,8 Min. (größte Dauer 55,2 Min., kleinste 51,6 Min.), weshalb sie kurz 54 Min.-Seiche genannt sei.

2. Die 43 Min.-Seiche. Wie in den Vorjahren ist sie auch jetzt noch die eigentliche Seiche dieser Station und wenn nicht rein, so doch in dikroter Form fast immer zu erkennen. Die größte gelegentliche Doppelamplitude betrug im Jahre 1902 300 mm, im Jahre 1904 160 mm und 1905 185 mm. Dabei nimmt aber die Amplitude aufeinanderfolgender Schwingungen

[1]) Unter Amplitude ist hier wie im folgenden immer der Abstand des tiefsten und höchsten Punktes einer Schwingung verstanden.

rasch ab und die Reihen der Seiches sind im Verhältnis zu anderen Seen kurz. Die Dämpfung ist merkwürdigerweise bei hohem Wasserstande eine stärkere als bei niedrigem. Die Dauer der Seiche änderte sich auch diesmal stark mit dem Pegelstande und zwar ging der Wasserstand von 30 cm H. P. auf — 57 cm H. P. während der Beobachtungszeit zurück (infolge der Tieferlegung) und die Dauer nahm mit dem Pegelstande vom höchsten Werte von 42,10 bis 39,34 Min. ab, so daß der Mittelwert dieser Beobachtungszeit und zugleich des neuen Mittelwasserstandes von 0 cm H. P. 40,8 Min. rund 41 Min. beträgt. Die Seiche sei daher von jetzt ab 41 Min.-Seiche genannt. Auf die Veränderungen der Periodendauer im einzelnen werde ich später zurückkommen.

3. Die $37^1/_2$ Min.-Seiche ist nur an einigen Interferenzkurven der 41 Min.-Seiche zu erkennen. Da die Dauer derjenigen der ersteren sich nähert, bilden die beiden gleichzeitig auftretenden Schwingungen die früher mit Schwebung bezeichnete Form einer Interferenzkurve, wobei auf sechs Schwingungen von 41 Min. sieben solche von rund 36 Min. kommen. Die Dauer hat also um ungefähr $1^1/_2$ Min. gegen früher abgenommen und wird daher im folgenden 36 Min.-Seiche genannt.

4. Die frühere 29 Min.-Seiche ist auch diesmal neben der 41 Min.-Seiche am häufigsten im Schafwaschner Limnogramme zu finden. Rein tritt sie nie auf; nur zu Zeiten, wo die 41 Min.-Seiche rascher gedämpft wird, klingen manche Reihen in der 29 Min.-Seiche aus. Zeitweise zeigt sich dieselbe mit auffallend kleiner Amplitude. Die größte überhaupt gemessene Amplitude betrug diesmal 80 mm. Die Dauer der Seiche änderte sich von 28,99 Min. im Mittel bis 28,1 Min. Bei dem jetzigen Mittelwasser ist dieselbe 28,5 Min., weshalb sie nun $28^1/_2$ Min.-Seiche heißt.

5. Die 18. Min.-Seiche ist sehr selten in Schafwaschen zu erkennen. Nur wenn die Amplituden der Hauptschwingungen klein sind, konnte sie und auch dann nur einige Male

deutlich erkannt und ihre Phase und Amplitude mit anderen Punkten verglichen werden.

6. Die 11 Min.-Seiche ist aus den neuen Aufzeichnungen nur einmal deutlich herauszufinden. (2. Juni bei + 14 cm H. P.)

7. Die frühere 8 Min.-Seiche. Diese Schwingung zackt die Kurven jetzt häufiger aus und ist besonders im Momente des Eintrittes einer starken Denivellation immer und mit größerer Amplitude vorhanden. Doch sind gewöhnlich nur kurze Reihen zu messen. Auffällig ist, daß sie bei niedrigem Wasserstande und zwar bei — 54 cm H. P. in sehr langen Reihen, bis 89 Schwingungen nacheinander, und mit bedeutender Amplitude, bis 40 mm, auftritt. Einmal war dabei sogar der ganze Schafwaschner Winkel noch unter starker Eisdecke. Die Dauer dieser Seiche hat besonders stark abgenommen und zwar in der ganzen Beobachtungszeit von 8,57 Min. bis 6,40 Min., das sind um 25 % der ursprünglichen Dauer, worauf ich ebenfalls später noch zurückkommen werde. Sie sei daher zum Unterschied von der 8 Min.-Seiche des Weitsees 6,4 Min.-Seiche genannt.

8. Die 3,8 Min.-Seiche. Diese ist nur einmal bei Pegel — 54 cm zu messen gewesen und ist eine neue Seiche, welche früher, auch bei der nochmaligen Durchsicht der Limnogramme, nicht herauszufinden war.

5. Die Beobachtungen an weiteren Zwischenpunkten.

Um die Amplituden und Phasen der einzelnen Seiches an den verschiedenen neuen Beobachtungspunkten miteinander vergleichen zu können, wurden häufig das Schafwaschener Limnimeter und das transportable Limnimeter von mir persönlich kontrolliert und mit übereinstimmenden Zeitmarken versehen. Dabei wurde beim Beobachtungsgange um den See und beim Vergleich der Limnogramme besonders auf die häufiger auftretenden Seiches geachtet, da bei den selten auftretenden Seiches oft wochenlange Aufzeichnungen hätten umsonst sein

können. Häufig wurden nach der Kontrolle der Apparate noch gleichzeitige Aufzeichnungen an korrespondieren Punkten mit dem Zeigerlimnimeter gemacht und auch diese beim Vergleich der Phasen und Amplituden der Seiches, wie sie in dem Ergebnisse in den folgenden Tabellen zusammengestellt sind, benützt. In den Tabellen selbst steht unter „T“ die aus dem betreffenden Limnogramme gemessene Dauer der Seiches in Minuten. Ist die Rubrik freigelassen, so konnte die Schwingung an dieser Stelle wohl beobachtet, aber mit ihrer Dauer nicht gemessen werden. Unter „n“ steht die Anzahl der Schwingungen der längsten dort aufgetretenen Reihe. Unter „Auftreten“ ist angegeben, wie oft die Schwingung gefunden wurde: unter „a“ steht die größte dort gemessene Amplitude in Millimetern, unter Vergleichsstation der Ort, mit welchem die Amplituden und Phasen der betreffenden Schwingungen verglichen wurden; unter „V“ das Amplitudenverhältnis des Beobachtungsortes und des Vergleichspunktes in Prozenten. wobei das zugefügte Zeichen die Phase der Schwingung angibt und zwar das „+“ Zeichen die gleiche und das „—“ Zeichen die entgegengesetzte Phase. Die Nummern der Stationen geben an, in welcher Reihenfolge dieselben verwendet wurden; mit diesen Nummern sind sie auch in die Karte eingetragen (siehe Tafel II).

Die Beobachtungsergebnisse an den Zwischenpunkten.

Station	Nr.	Seiche	T in Min.	n	Auftreten	a	Vergleichsstation	V	Bemerkungen
9. Ringgang Nord,	1	41 Min.-S.	42,3	18	immer	32	Schafwaschen	+ 78	
am inneren Ende	2	36 „	36,5	14	2 mal	10	„	+ (70)*	*Schätzung.
des Ringganges;	3	$28^{1}/_{2}$ „	28,55	12	öfters	19	„	+ 42*	*ganz unerwartet.
vom 22.—25. 5. 04;	4	8 „	8,10	12	2 mal	2	„		in Schafwaschen nicht.
bedient v. B. Mayer.									
10. Harras, am Ende	1	41 „			selten	10	„	+ 30	
des 200 m langen	2	$28^{1}/_{2}$ „	28,7	15	sehr oft	50	„	— 100	
Ufervorsprunges;	3	18 „	18,00	16	häufig	10	„	+	} Schwebungen.
vom 17.—22. 8. 04.	4	16 „	(15,60)	25	sehr häufig	30	Seebruck	— 100	} Schwebungen.
	5	8 „	(7,9)	10	häufig	30	„	(+ 100)	kurze Schwebungen mit 6.
	6	7 „	(7.1)	8	3 mal	10	—	—	
11. Stock, 300 m	1	41 „			häufig	4	Schafwaschen	+ 40	
nördlich Stock 4;	2	$28^{1}/_{2}$ „	28,4	24	sehr häufig	10	„	— 75	
vom 14.—17. 8. 04.	3	18 „	—	10	öfters	5	„	(?)* 100	Zeitmarke nicht genau.
	4	16 „			1 mal	2	„		Schafwaschen nicht.
	5	$9^{1}/_{2}$ „	9,8	37	häufig	3	„		„ „
12. Osternach, 1 km	1	41 „		12	„	15	„	+ 59	
nördlich Stock 4;	2	$28^{1}/_{2}$ „	28,67	20	„	10	„	— 38	
v. 22. 8. — 2. 9. 04.	3	18 „	18,2	20	„	5	„	— 100	
		16 „			nicht				also Knoten.
	4	11 „	10,70	16	1 mal	4	„		Schafwaschen Störung.
	5	$9^{1}/_{2}$ „	9,80	22	sehr häufig	4	„		„ nicht.
	6	8 „	8,20	8	öfters	3	„		„ nicht.

13. Ringgang Süd,	1	41 Min.-S.	40,60	12	immer	14	Schafwaschen	+ 65	hier reine Sinuskurve.
am äußeren Ende	2	36 „	36,00	14	2 mal	2	„		Schafw. nicht zu erkennen.
des Ringganges;		$28^1/_2$ „			nicht		„ 30 mm		also Knoten.
vom 6.—9. 9. 04.	3	18 „			1 mal	1	Seebruck	— 25	
	4	16 „	15,68	6	„	1	„	(?) 15	
	5	11 „	10,72	17	„	2	Schafwaschen	—	
	6	$9^1/_2$ „ ?	9,90	14	häufig	3	„		Schafwaschen nicht.
	7	8 „	8,30	7	1 mal	1			Schwebung mit $9^1/_2$ Min.
14. Kailbach, am	1	41 „			selten	5	„	+ 25	
Ende des gleich-	2	$28^1/_2$ „	28,54	24	häufig	25	„	— 56	
namigen Winkels;	3	18 „	18,04	50	immer	22	Mühlen	+ 150	schöne Reihen.
vom 9.—25. 9. 04.		16 „			nicht				
	4	$12^1/_2$ „	12,4	18	öfters	5	Feldwies*	+ 40	*Beobachtung 1902.
15. Herreninsel		41 „			nicht		Schafwaschen 52 mm		
Nordspitze,	1	$28^1/_2$ „	28,51	30	häufig	12	„	— 60	
100 m südlich der	2	18 „	18,20	25	sehr häufig	16	„	— ( )	
Kapelle; vom 25. 9.							Kailbach	+ 57	
bis 1. 10.; bedient	3	16 „	15,80	16	öfters	4	Seebruck*	— 20	*Pegeldiagramm.
vom K. Bauführer	4	8 „	8,2	13	selten	2			
Maurer.	5	$5^1/_2$ „	5,5	6	2 mal	1			
16. Herreninsel									
Südostspitze,		41 „			nicht		Schafw. 130 mm		also Knoten.
an der Westseite	1	$28^1/_2$ „			4 mal	12	„	— 37	
der Landzunge;	2	18 „	18,00	80	immer	18	Felden*	+ 140	*Zeigerlimnimeter.
vom 1.—10. 10. 04;		16 „			nicht		Seebruck* 20 mm		*Pegeldiagramm.
bedient von Bau-	3	$5^1/_2$ „	5,48	20	häufig	10			
führer Maurer.									
17. Fraueninsel,	1	41 „	40,20	6	1 mal	2	Schafwaschen	— 5	Schafwaschen 36 mm.
an der Mitte des		$28^1/_2$ „			nicht		„		„ 35 „
Ostufers: vom 13.	2	18 „	17,8	10	öfters	4	Herreninsel Süd*	+ ( )	*Zeigerlimnimeter.
bis 20. 10. 04; be-							Fraueninsel West*	+ 100	
dient von Ober-	3	16 „	15,45	20	sehr häufig	9	Seebruck*	— 45	*Pegeldiagramm.
fischer Marx.	4	8 „	8.2	15	selten	3			
	5	7 „	7,10	8	„	1			

18. Seebruck (Station II). Nach den Beobachtungen an den Zwischenpunkten wurde das transportable Limnimeter am 20. Oktober 04 nach Seebruck gebracht und zuerst etwa 100 m östlich des früheren Beobachtungspunktes aufgestellt. Es sollten hier die Dauer und Häufigkeit der Schwingungen des Weitsees nach der Tieferlegung beobachtet werden. Aus den früheren Beobachtungen war erwiesen, daß an diesem Punkte alle Seiches des Weitsees mit größerer Amplitude auftreten. Das Limnogramm war wieder meistens sehr kompliziert; doch traten wie in den Vorjahren auch diesmal sämtliche Seiches zeitweise in einfacheren Kurven deutlich genug auf, um ihre Dauer daraus messen zu können. Außerdem sollten hier die Seeschwankungen des Sees für die Untersuchung der Ursachen den Winter über beobachtet werden; da die Schafwaschener Bucht sich jeden Winter und frühzeitig schon mit Eis bedeckt, der See in Seebruck, am Ausflusse aber immer eisfrei bleibt, war die Registrierung des Wasserstandes im Winter nur hier möglich. Herr Oberauer, der auch den registrierenden Alzpegel bedient, übernahm wieder die Überwachung des Instrumentes. Derselbe nahm auch selbständig zweimal eine Versetzung des Limnimeters vor, nachdem eine solche durch die Änderungen des Wasserstandes notwendig geworden war. Das Instrument funktionierte hier ununterbrochen bis 8. April 1905. In folgender Tabelle sind die Beobachtungen zusammengestellt. Da keine Vergleichsbeobachtungen in dieser Zeit vorliegen, sind hier statt der früheren Rubriken nur die gemessene mittlere Dauer „T“ der betreffenden Seiche, die größte Anzahl aufeinanderfolgender Schwingungen „n“, die Häufigkeit und die größte Amplitude „a“ angefügt.

Die Beobachtungen in Seebruck in den Jahren 1904/05.

Nr.	1904/05					1902/03			
	Seiche	T in Min.	n	Auftreten	a	T	n	Auftreten	a
1	41 Min.-S.	41,00	10	selten	10	42,68	8	selten	7
2	28½ „	28,5	6	„	15	28,99	8	„	9
3	18 „	18,00	33	öfters	30	18,19	25	öfters	37
4	16 „	15,40	60	immer	100	15,8	50	immer	40
5	11 „	—		nie		10,75	46	sehr häufig	123
6	9½ „	9,50	12	öfter	15	9,49	18	selten	10
7	8 „	8,34	69	sehr häufig	25	8,22	20	häufig	8
8	7 „	7,20	38	häufig	30	7,01	31	„	50
9	6½ „	6,50	20	selten	10	—		nie	
10	5,7 „	5,70	15	„	5	—		nie	
11	5 „	—		nie		5,00	12	selten	4
12	4 „			selten		4.12	72	öfters	15
13	3 „	—		nie		3,00	30	häufig	25

Die zum Teil sehr merklichen Änderungen der Schwingungsdauer der Seiches und der Häufigkeit ihres Auftretens infolge der Tieferlegung können wir erst nach der Feststellung der Schwingungsachse und der Schwingungsbäuche und Knoten der einzelnen Seiches näher besprechen.

II. Die Schwingungsformen des Chiemsees.

1. Die 41, 36 und 54 Min.-Seiche.

Die Amplitudenverhältnisse, welche aus den mittleren Amplituden möglichst deutlicher Schwingungsreihen an zwei verschiedenen Stationen gebildet wurden und die in obigen Tabellen bereits mitgeteilt sind, wurden für die häufiger auftretenden Seiches in die beiliegende Karte auf Tafel III Fig. 1 bis 5 eingetragen. Die Amplitude an einem Ende der Schwingungsachse ist dabei = 100 gesetzt. Die eingefügten Zeichen (+ und —) geben die Schwingungsphasen an den betreffenden Punkten an; dieselben wurden in den See selbst eingetragen und zwar so, daß ihre Dichtigkeit ein Bild der Größe der

Amplitude gewähren kann. Die (+ und —) Zeichen sind dabei in Reihen senkrecht zur horizontalen Wasserbewegung, also senkrecht zur Schwingungsachse angeordnet. Die Knotenlinien sind durch stark ausgezogene Linien angedeutet. Die Amplituden Verhältnisse selbst können natürlich keinen Anspruch auf Genauigkeit machen, da die Amplituden zweier Punkte nach der Theorie nicht einmal in ganz regelmäßigen Seebecken in konstantem Verhältnisse stehen. Doch gibt die gewonnene Verhältniszahl einen guten Anhalt, um auf die Entfernung des betreffenden Punktes von der Knotenlinie zu schließen.

Die 41 Min.-Seiche ist nach dieser Zusammenstellung auf Taf. III Fig. 1 die uninodale Längsschwingung des Chiemsees mit der Schwingungsachse Schafwaschen-Seebruck. Die Knotenlinie geht durch die Südspitze der Herreninsel gegen Mühlen zu. Die Kommunikation nördlich der Herreninsel nimmt ebenfalls an der Schwingung teil, wie die Beobachtungen an der Nordspitze der Herreninsel und in Kailbach ergeben haben. Dabei hat Schafwaschen die sechsfache Amplitude von Seebruck, wie schon früher hervorgehoben wurde (s. P. I, S. 48). Das Amplitudenverhältnis nähert sich nach den neuen Ergebnissen noch mehr dem umgekehrten Verhältnis der beiden Seeflächen, wie sie durch die Knotenlinie voneinander getrennt werden, weil der größere Teil des Mühlener Winkels noch zum östlichen Teile kommt. Das Verhältnis ist das größte bis jetzt an Seen beobachtete. Daß die Fraueninsel die Amplitude — 5 hat, während das von der Knotenlinie entferntere Hagenau und Gstad 0 haben, läßt vielleicht schließen, daß an den seichten Ufern die Amplituden geringer sind als in der Mitte des Sees; dies wäre eine Bestätigung der Vermutung, wie sie Chrystal und Maclagan-Wedderburn auf Grund theoretischer Betrachtungen ausgesprochen haben.[1])

---

[1]) Chrystal and Maclagan Wedderburn „Calculation of the periods and nodes of lochs Earn and Treig, from the bathymebric data of the scottish Lake-Survey. Trans. of the Roy. Soc. of Edinburgh 41. III 1905.

Die 36 Min.-Seiche (frühere $37\,^1/_2$ Min.-Seiche) war bei den ersten Untersuchungen nur in dem Schafwaschener Limnogramme und da nur in der Höchstzahl von neun aufeinanderfolgenden Schwingungen beobachtet worden. Nun liegen neue Beobachtungen von dieser Seiche am Ein- und Ausgang des Rinnganges vor. Dort ist sie häufiger und deutlicher zu erkennen, weil die $29\,^1/_2$ Min.-Seiche speziell am Ausgang ganz fehlt und die 41 Min.-Seiche kleinere Amplituden als in Schafwaschen hat. Da die Amplitude der 36 Min.-Seiche am Rinngang kleiner ist als in Schafwaschen und die Schwingung an beiden Punkten gleiche Phase hat, ist sie gegen Schafwaschen und nicht gegen Kailbach gerichtet, wie früher vermutet (s. P. I, S. 64). Auch die Beobachtung im Kailbachwinkel bestätigt dies, da die Seiche dort nie aus dem Limnogramme herauszufinden ist, wo sie doch die größte Amplitude hätte haben müssen. Daß sie im Weitsee aus den Aufzeichnungen der Limnimeter nicht herausgefunden werden konnte, erklärt sich aus dem nämlichen Grunde, warum die 41 Min.-Seiche dort so lange nicht nachzuweisen war; sie muß eben dort gemäß dem Verhältnisse der größeren schwingenden Flächen eine bedeutend kleinere Amplitude haben als in Schafwaschen, wo dazu die Amplitude der 36 Min.-Seiche selbst nie bedeutend war. Eine günstige Beobachtung bei den Vorversuchen im Jahre 1901 aber verzeichnet in Chieming einen symmetrischen Kurvenzug von genau 36 Min.-Dauer mit nur $1\,^1/_4$ mm Amplitude; die Beobachtung dauerte 52 Min., so daß nur ein ganzer Kurvenzug vorliegt. Aus den früher erwähnten Gründen (S. 307) darf man in nur einem solchen symmetrischen Kurvenzuge eine eigene Schwingung des Sees erblicken. Die Beobachtungen deuten also darauf hin, daß wir in der 36 Min.-Seiche eine uninodale Schwingung Schafwaschen—Südufer—Chieming gefunden haben, wenn die Wassermasse nur südlich der Herreninsel schwingt, wofür wir weiter unten an der Hand der Theorie noch eine Bestätigung finden werden.

Die 54 Min.-Seiche konnte nur aus den früheren Limno-

grammen herausgefunden werden und da nur bei hohem Wasserstande (über 80 cm H. P.). Da die Schwingung in der Zeit, wo Zwischenbeobachtungen gemacht wurden, nämlich seit 20. Juni 1902 überhaupt nicht mehr oder nur in 1 bis 2 Schwingungen von wenigen Millimetern Amplitude aufgetreten ist — es blieb eben der Wasserstand immer unter 80 cm —, so liegen für diese Seiche keine Vergleichsbeobachtungen vor und es können solche wohl kaum mehr beschafft werden, da der See wohl nie mehr längere Zeit einen so hohen Wasserstand erreichen dürfte. Dennoch glaube ich mit großer Wahrscheinlichkeit in der 54 Min.-Seiche eine uninodale Schwingung in der Richtung Schafwaschen — Nordufer der Herreninsel — Chieming gefunden zu haben. Als Seiche längs der größten Achse haben wir nämlich schon die 41 Min.-Seiche durch direkte Beobachtung nachweisen können. Eine Schwingung erhält nach Chrystal[1]) aber eine verhältnismäßig große Periode, wenn das Becken am Knoten konvex ist. Und bei Urfahren erhebt sich der Seeboden bis 12 m unter Wasser und gleichzeitig findet sich hier eine starke Einschnürung des Sees mit einer Breite von 500 m. Ein Beispiel einer ungewöhnlichen Periodenverlängerung durch die ganz gleichen Umstände habe ich am Wagingersee gefunden, wo die Hauptschwingung bei einer Seelänge von nur 11 km eine Dauer von 62 Min. hat.[2]) Auch der Umstand, daß die Seiche von 54 Min. nur bei hohem Wasserstand auftrat, spricht für die Annahme. Bei Hochwasser nämlich ist der Querschnitt des Sees an der Stelle Urfahren — Herreninsel ungefähr 500 m breit und hat dann bei einer mittleren Tiefe von rund 4 m eine Fläche von rund 2000 m². Bei den flachen Ufern nimmt aber die Breite des Querschnittes mit dem Wasserstande rasch ab; sie beträgt nach meinen Schätzungen bei dem jetzigen Mittelwasser nur noch rund 400 m, so daß der Querschnitt

---

[1]) Chrystal, H. T. S. zitiert S. 307.

[2]) A. Endrös, Die Seiches des Waginger—Tachingersees; diese Sitzungsberichte Bd. 35. 1905, H. III, S. 447.

bei einer mittleren Tiefe von $2^1/_2$ m nur mehr 50 % des vorigen, nämlich 1000 m² ausmacht. Die Periode muß sich nach Chrystal mit der Verkleinerung des Querschnitts bedeutend verlängern und die Dämpfung noch stärker werden, als sie an sich schon ist. In der Tat finden sich nur mehr 1 bis 2 Kurvenzüge vor. Ein weiterer Umstand spricht für obige Annahme, nämlich daß die Schwingung nur bei plötzlichem Nachlassen des reinen Ostwindes zweimal in Reihen bis zu sechs Schwingungen aufgetreten ist. Auf die Stichhaltigkeit dieses Argumentes möchte ich aber erst bei Besprechung der Ursachen der Seiches näher zurückkommen.

Wir haben sonach am Chiemsee das merkwürdige Ergebnis, daß der See drei uninodale Seiches verschiedener Dauer hat, wovon alle drei ein Ende der Schwingungsachse, nämlich das westliche, gemeinsam haben; während das östliche Ende der einen, der 41 Min.-Seiche, am Nordende, in Seebruck, sich befindet, schwingen sehr wahrscheinlich die beiden anderen gegen Chieming. Dies Ergebnis entspricht ganz der Oberflächen- und Beckenform des Sees, bei der Chieming als Ende einer Seeachse ebenso in Betracht kommt wie Seebruck; die Geographen haben in der Tat auch zum größten Teile die Länge des Sees von Schafwaschen nach Chieming oder Grabenstädt hin gemessen,[1] obwohl die Entfernung Irschner Winkel—Seebruck etwa 500 m länger ist. Die Teilung des Beckens durch die Herreninsel schafft dazu zwei Wege für die sich bei der Seichesbewegung west- und wieder ostwärts bewegenden Wassermassen, welche wegen der verschiedenen Tiefe Perioden von verschiedener Dauer bedingen. Schwingt das Wasser überwiegend in dem nördlichen Rinnsale, so haben wir die 54 Min.-Seiche, im anderen Falle die 36 Min.-Seiche. Jedenfalls stören sich die beiden Schwingungen gegenseitig, worin wohl auch ein Grund für das seltene und kurze Auftreten der einen wie der anderen zu suchen ist. In der Seichesliteratur haben wir schon ein Beispiel für zwei

[1]) E. Bayberger, Der Chiemsee, S. 8 zit. S. 298.

uninodale Längsschwingungen, nämlich am Neuenburgersee.[1]) E. Sarasin, der die größeren Schweizer Seen auf ihre Seiches untersucht hat, wählte eigens diesen See wegen seiner ausgesprochenen Längsrichtung und regelmäßigen Umrißform und erwartete dort dementsprechend regelmäßige Schwingungsverhältnisse zu finden. Die Untersuchung aber ergab ganz unregelmäßige Seiches, unter welchen eine Schwingung von 50 Min. und eine zweite von 39,5 Min., aber nur in Reihen von höchstens 5 bis 10 Schwingungen zu messen waren. Am Neuenburgersee teilt nämlich ein unterseeischer Rücken, der sich stellenweise bis 8 Meter unter Wasser erhebt, das Becken in zwei Rinnen, wovon die westliche in der Mitte eine größte Tiefe von 153 m, die östliche aber nur von 94 m erreicht. Die Eigenschwingungen der beiden Teilbecken müssen deshalb verschiedene Dauer haben und stören sich auch gegenseitig, wie Sarasin selbst erwähnt. Die 39,5 Min.-Seiche ist sehr wahrscheinlich die uninodale Seiche der westlichen und die 50 Min.-Seiche diejenige der östlichen Rinne, worauf Forel ausdrücklich aufmerksam macht.[2]) Am Chiemsee sind die Umstände für zwei Schwingungen verschiedener Dauer noch günstiger, da hier der trennende Rücken als Insel sich noch über den Wasserspiegel erhebt.

2. Die uninodalen Seiches und die Theorie.

Die P. Du Boyssche Methode der Berechnung der Perioden einknotiger Seiches hatte speziell für den Chiemsee einen mit der Beobachtung sehr befriedigend übereinstimmenden Wert ergeben. Die Dauer der Hauptschwingung war bei Mittelwasser vor der Tieferlegung zu 42,68 Min.[3]) beobachtet und zu 42,22 Min. berechnet worden

---

[1]) Ed. Sarasin, Les Seiches du Lac de Neuchâtel; Arch. de Genève 28. 256.

[2]) Forel, Le Léman II, S. 158.

[3]) Bei den folgenden theoretischen Betrachtungen sind zunächst nur die Mittelwerte des früheren Wasserstandes und die früheren Tiefen benützt.

(P. I, S. 59), welcher Wert sich mit Benützung der neuen Lotungen zu 43,0 Min. erhöht und der damaligen Beobachtung also noch näher kommt. Seit dem hat nun Chrystal eine neue exakte Theorie der Seiches veröffentlicht.[1]) Die neue Theorie hat bereits am Loch Earn und Treig[2]) sehr befriedigende Resultate geliefert und zwar nicht nur für die uninodalen, sondern auch für die mehrknotigen Seiches, bei welchen die Du Boyssche Theorie vollständig versagt hatte. Auch die Ergebnisse am Waginger-Tachingersee[3]) wurden nur durch die Chrystalsche Theorie verständlich.

Obwohl nun der Chiemsee schon im voraus zu einer exakten Behandlung nach der Chrystalschen Theorie nicht geeignet sich erweist, da er sehr rasche Querschnittsänderungen besitzt und dazu eine große Breitenentwicklung gegenüber seiner Längenausdehnung hat, habe ich dennoch die Normalkurve des Sees längs der Achse der 41 Min.-Seiche gezeichnet, welche auf Taf. II links oben mitgeteilt ist. Dazu wurden 18 Querschnitte senkrecht zum erwähnten Talwege Seebruck-Südufer-Schafwaschen gelegt, wie sie in der Karte auf Taf. II angedeutet und numeriert sind. Dieselben wurden in vergrößertem Maßstabe gezeichnet, ihre Flächeninhalte gemessen, mit der Oberflächenbreite multipliziert und als Ordinaten in die Kurve eingetragen, deren Abszissen die Seeflächen von Seebruck bis zu dem betreffenden Querschnitte sind. Im Maßstab der Ordinaten ist 1 mm = 10^7 m^3 und dem der Abszissen 1 mm = 50^3 m^2.

Eine besondere Schwierigkeit bei Aufstellung der Normalkurve bieten an unregelmäßigen Seen und besonders am Chiemsee die Verzweigungen des Talweges. So laufen vom tiefsten Punkte des Weitsees aus eine Rinne gegen Seebruck-Ost, eine zweite gegen Seebruck-West, eine dritte gegen Mühlen, eine vierte gegen Grabenstädt und eine fünfte gegen Chieming.

[1]) Chrystal, H. T. S., zit. S. 307.

[2]) Chrystal and E. Maclagan-Wedderburn, Calculation, zit. S. 320.

[3]) Endrös, Die Seiches des Waginger-Tachingersees; diese Zeitschrift 35, 1905 H. III, S. 460.

Doch ist für die 41 Min.-Seiche auf Grund der zahlreichen Beobachtungen ein Zweifel über die Richtung des Talweges fast ausgeschlossen.

Aus der so erhaltenen Normalkurve treten ganz deutlich die vier plötzlichen Querschnittsänderungen bei Punkt 9, 12, 15 und 17 hervor. Dieselben üben jedenfalls auf die Dauer der einzelnen Schwingungen je nach der Entfernung der betreffenden Einschnürungen von den Knotenlinien einen bedeutenden Einfluß aus. Außerdem verursachen sie sehr wahrscheinlich die Instabilität mancher Schwingungen, deren Knoten in die Nähe dieser Seestellen fallen, ohne mit denselben genau zusammenzufallen. Auf die Dauer der 41 Min.-Seiche übt wohl besonders die konvexe Stelle bei Punkt 12 der Normalkurve eine verlängernde Wirkung aus, da der Knoten dieser Schwingung dorthin fällt. Eine exakte Berechnung der Seicheskonstanten, welche auch an der vorliegenden Kurve trotz der Einengungen durch Annähern an Stücke von Parabeln und geraden Linien nach Chrystal vorgenommen werden könnte, kann aber aus einem weiteren Grunde keine brauchbare Annäherung liefern. Die Koordinaten des Kurvenzuges im Inselsee sind gegenüber denjenigen für den Weitsee verschwindend klein und ihre Verhältnisse gehen in die zur Auswertung der Seicheskonstanten vorzunehmenden Rechnungen ein.

Da man also am Chiemsee auf die Anwendung der exakten Theorie verzichten muß, ist man auf Annäherungsformeln angewiesen und da gerade hier die P. Du Boyssche Theorie einen so gut übereinstimmenden Wert für die Dauer der 41 Min.-Seiche geliefert hat, möchte ich im folgenden an der Hand der Chrystalschen Theorie kurz untersuchen, für welche Beckenformen die genannte Formel brauchbare Werte für die uninodale Schwingungsdauer ergibt.

P. Du Boys gelangte, wie Chrystal durch seine neue Theorie uns lehrt, durch ungenaue Anwendung der Theorie fortschreitender Wellen, sogenannter „Einzelwellen“, auf die stehenden Wellen zu der Formel: $T = 2\int_0^l \frac{dl}{\sqrt{gh}}$, wobei T die

Dauer der uninodalen Seiche eines Becken von der Länge l und der veränderlichen Tiefe h bedeutet. Die Integration ist dabei längs der Linie der größten Tiefe vorzunehmen. Die Unzulänglichkeit dieser Formel ist besonders deutlich ersichtlich bei der Anwendung derselben auf vier verschiedene Chrystalsche Seentypen, nämlich auf einen See mit symmetrisch parabolischem Längsschnitt und einen solchen mit halb parabolischen, von denen also ersterer seine größte Tiefe in der Mitte und letzterer an einem Ende der Längsachse hat, ferner auf einen See, dessen Längsschnitt aus zwei symmetrisch gegen die tiefste Stelle geneigten Geraden besteht und einen derartigen, dessen Längsschnitt eine einzige, gegen die am Seende befindliche größte Tiefe geneigte, gerade Linie ist. Die vier Seen sollen sämtliche die gleiche Länge „l“ und dieselbe Maximaltiefe „h“ besitzen und außerdem konstante Breite und überall rechteckigen Querschnitt haben. Die Gleichung zwischen der veränderlichen Tiefe h und der Länge x hat bei den beiden erstgenannten, den parabolischen Schnitten, die Form:

$$y = h\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$$

und bei den geradlinigen die Form:

$$y = h\,\frac{x}{a},$$

wobei a bei den symmetrischen Seen $= \frac{l}{2}$, der halben Seelänge, und bei den asymmetrischen $= l$, der ganzen Seelänge ist. Die Integration ergibt für beide parabolischen Kurven:

$$T = \frac{\pi\, l}{\sqrt{g\, h}}$$

und für beide geradlinigen:

$$T = \frac{4\, l}{\sqrt{g\, h}} = 1{,}27\,\frac{\pi\, l}{\sqrt{g\, h}}.$$

Der Übersicht halber stelle ich in folgender Tabelle die nach Du Boys berechnete Dauer mit der von Chrystal nach seiner exakten Theorie berechneten zusammen und füge in der letzten Rubrik die Abweichung der Du Boysschen Dauer in Prozenten „$d\,T_D$“ an:

Form des Längsschnittes	T nach Du Boys	T nach Chrystal	$d\,T_D$ in %
1. Parabolisch	$1{,}00 \frac{\pi l}{\sqrt{g h}}$	$0.70 \frac{\pi l}{\sqrt{g h}}$	+ 43
2. Halbparabolisch	1,00 „	0.82 „	+ 22
3. Symmetrisch geradlinig	1,27 „	0.83 „	+ 65
4. Geradlinig	1,27 „	1.05 „	+ 21

Aus der Tabelle ersieht man zunächst deutlich, daß die uninodale Schwingungsdauer für alle vier Seentypen nach P. Du Boys zu groß wird und zwar bei symmetrischen Seen viel mehr als bei asymmetrischen. Ferner soll nach P. Du Boys ein symmetrisch parabolischer See dieselbe Dauer haben wie ein halb parabolischer und ein symmetrisch geradliniger die gleiche wie ein geradliniger. Die P. Du Boyssche Formel nimmt eben keine Rücksicht auf die Lage des Knotens in Bezug auf die größte Tiefe. Chrystal macht uns die Schwingungsverhältnisse verständlich durch das Beispiel einer vertikal gespannten schwingenden Saite, wobei nur die Längs- und Querbewegungen zu vertauschen sind. Wie nämlich eine Saite mit der geringsten Dichtigkeit in der Mitte eine kleinere Schwingungsdauer besitzen muß als eine gleichlange, deren geringste Dichtigkeit am Ende ist, so muß ein See mit der größten Tiefe in der Mitte auch eine kleinere uninodale Schwingungsdauer haben als ein solcher, der seine größte Tiefe am Ende hat. Die beiden Schwingungsvorgänge stimmen wegen der Analogie der ihnen zugrunde liegenden Differentialgleichungen vollständig überein.

Aus obigen Betrachtungen lernen wir den Grund kennen, warum die P. Du Boyssche Formel gerade für die Haupt-

schwingung des Chiemsees eine so gute Annäherung ergibt. Der Chiemsee, der ein vollständig konkaver See ist, hat nämlich eine zu große Schwingungsdauer im Verhältnis zu seiner Länge und Tiefe, weil der Knoten nicht an die tiefste Stelle des Sees fällt, sondern im seichten Inselsee liegt und dazu noch mit einer plötzlichen Beckeneinengung zusammenfällt. Letztere bewirkt ebenso wie die geringe Tiefe eine Verlängerung der Periode, wie ich besonders am Waginger-Tachingersee gefunden habe.[1] Zum Vergleiche möchte ich hier die Abweichungen der nach P. Du Boys berechneten Dauer von der beobachteten für eine Anzahl von Seen anfügen. Dieselbe beträgt am Chiemsee + 1%*,[2] am Vierwaldstättersee + 2%*, am Genfersee ebenfalls + 2%,[3] am Loch Treig + 12%,[4] am Madüsee + 17%*, am Starnbergersee + 18%*, am Loch Earn + 22%,[4] am Bodensee + 23%*, am Wagingersee + 31%* der beobachteten Dauer. Wie für den Chiemsee, so gibt also auch für den Genfer- und Vierwaldstättersee die P. Du Boyssche Formel sehr angenäherte Werte für die Periodendauer der uninodalen Seiches. In allen drei Seen ist eben der Knoten gegen das seichtere Ende des Sees hin verschoben und fällt dazu an eine plötzliche, starke Einschnürung des Beckens. Die Dauer wird durch beide Umstände so verlängert, daß sie der sonst bedeutend zu großen Dauer nach P. Du Boys sich nähert. Die Dauer nach Du Boys weicht aber um so mehr ab, je näher der Knoten der tiefsten Stelle des Sees zu liegen kommt, wie beim Loch Earn, beim Bodensee und Wagingersee. Somit ist auch durch die Ergebnisse an den bereits untersuchten Seen bestätigt, daß die P. Du Boyssche Formel in konkaven, stark asymetrischen Seen eine gute erste Annäherung für die Periode der uninodalen Seiche eines Sees ergibt, daß aber dieselbe um so stärker abweicht, je näher der Knoten der tiefsten Stelle eines Sees liegt.

---

[1]) A. Endrös, Die Seiches des Waginger-Tachingersees, zit. S. 322.

[2]) Die mit * bezeichneten Zahlenangaben habe ich selbst berechnet.

[3]) Forel, Le Lémau II S. 124.

[4]) Chrystal und Maclagan-Wedderburn, Calculation, zit. S. 320.

Da die Beckenverhältnisse für die 36 Min.-Seiche des Chiemsees in der Richtung Schafwaschen-Südufer-Chieming ganz ähnliche wie bei der 41 Min.-Seiche sind, dürfen wir auch zur Berechnung dieser Schwingungsdauer die P. Du Boyssche Formel benützen. Die Berechnung ergibt in der genannten Richtung 38,2 Min., also einen Wert, der mit dem bei früherem Mittelwasser beobachteten von 37½ Min. auf + 3% übereinstimmt. Wir dürfen daher in dieser guten Übereinstimmung eine Bestätigung unserer Deutung der Beobachtungsergebnisse erblicken.

Wenden wir zur Berechnung der Dauer der 54 Min.-Seiche die Du Boyssche Theorie an, so erhalten wir in der Richtung Chieming-Urfahren-Schafwaschen 36,1 Min. Die Dauer bleibt also bedeutend unter dem beobachteten Werte und zwar um 33%. Das Gleiche konnte ich bei der Hauptseiche des Waginger-Tachingersees konstatieren, wo die berechnete Dauer von 36 Min. um 44% unter der beobachteten von 62 Min. zurückbleibt. Ich habe schon oben S. 322 auf die ganz ähnlichen Beckenverhältnisse längs der Schwingungsachsen der beiden Seiches hingewiesen. Der Knoten beider Schwingungen fällt nämlich mit einer seichten und stark eingeengten Seestelle zusammen, so daß die Seen in der Mitte konvex sind, wodurch nach der Chrystalschen Theorie die betreffende Periodendauer stark verlängert wird. Die genannte Theorie gibt nämlich für einen See mit konvexem parabolischen Längsschnitt für $T = 0{,}61 \frac{\pi l}{\sqrt{g h}}$, wobei h die kleinste Tiefe am Scheitel der Parabel ist, und nach P. Du Boys erhält man $0{,}26 \frac{\pi l}{\sqrt{g h}}$, also eine Dauer, welche um 55% unter der nach der exakten Theorie berechneten zurückbleibt. Wir sehen sonach, daß auch theoretisch die Schwingung in der angenommenen Richtung möglich ist.

Die Lage der Knoten der uninodalen Seiches kann mit Vorteil nach der Du Boysschen Theorie berechnet werden. Am Wagingersee konnte ich wiederholt auf das

übereinstimmende Ergebnis von Berechnung und Beobachtung hinweisen. Auch der Knoten der 41 Min.-Seiche am Chiemsee fällt nach Berechnung sehr nahe mit dem beobachteten Knoten südöstlich der Herreninsel zusammen. Der Knoten der 36 Min.-Seiche fällt nach Berechnung $1^1/_2$ km westlicher und derjenige der 54 Min.-Seiche in den Mühlener Winkel. Die beiden letzten Knoten konnten aus den schon angegebenen Gründen nicht beobachtet werden.

3. Die Änderungen der Dauer der uninodalen Seiches.

Die Dauer der 41 Min.-Seiche änderte sich am Chiemsee stark mit dem Pegelstande. Da der Unterschied zwischen dem höchsten und tiefsten Stande 166 cm beträgt, dürfte es von Interesse sein die früheren Beobachtungen mit den neuen zusammenzustellen, was in folgender Tabelle geschehen ist. In der ersten Rubrik steht die Zeit, in welcher die betreffenden Messungen gemacht wurden; in der zweiten der Pegelstand in cm H. P.; in der dritten die Mittelwerte der Dauer in Min., in der vierten abweichende Mittelwerte in der beigefügten Zeit bezw. bei dem angegebenen Pegelstande (vgl. P. I., S. 62).

Die Dauer der 41 Min.-Seiche und der Pegelstand.

Beobachtungszeit	Pegel	T in Min.	Abweichende Mittelwerte
2. 4.—4. 7. 1902	109 bis 86	43,90	zwischen 3. 4. und 2. 5. 44,05 zwischen 24. 5. und 4. 7. 43,75
3. 5.—22. 5. 1902	86 „ 68	43,34	
7. 7.—25. 8. 1902	68 „ 50	42,83	
1. 9.—6. 11. 1902	50 „ 30	43,13	bei Pegel 40 bis 30 : 43,56
9. 11.—11. 1. 1903 28. 4.—9. 5. 1904 25. 5.—8. 6. 1904	30 „ 10	42,15	bei Pegel 22 bis 19 : 40,65
9. 5.—24. 5. 1904 29. 8.—25. 9. 1904	+ 10 „ — 10	41,38	
19. 6.—10. 7. 1904 25. 9. 4. 12. 1904	— 10 „ — 30	41,00	
10. 7.—26. 8. 1904 14. 12.—12. 3. 1905	— 30 „ — 57	39,72	bei Pegel — 40 bis — 50 : 39,34 bei Pegel — 50 bis — 57 : 40,07

Die Dauer der Hauptseiche des Chiemsees hat also von 44,05 Min. bis 39,34 Min., das ist um 11 % des Mittelwertes abgenommen, als der Pegelstand von 109 cm bis — 57 cm H. P. zurückging. Die Dauer bei Mittelwasser vor der Tieferlegung war 42,68 Min. und ist jetzt 41,00 Min. Die Abnahme der Dauer bei Abnahme der Tiefe ist, wie früher schon hervorgehoben wurde, auf die starke Abnahme der Achsenlänge in der Schafwaschener Bucht zurückzuführen. Das Ufer läuft dort sehr flach aus, so daß beim Rückgang des Wasserstandes von Pegel 109 bis 68 cm die Achsenlänge um rund 100 m sich verkürzte, das ist um die Breite des früheren Überschwemmungsgebietes. Von Pegel 68 bis ungefähr Pegel — 30 wurde die eigentliche Uferzone, die mit Schilf bewachsen und ungefähr 40 m breit ist, trockengelegt. Die ganze Verkürzung der Länge der Achse beträgt also rund 150 m. das ist aber nur 0,8 % der ganzen Achse. Die Verkürzung der Dauer beträgt aber 11 %. soll jedoch der Theorie nach unter 0,8 % bleiben, da die Abnahme der Tiefe um 166 cm. das sind rund 2 % der größten Tiefe. die Dauer der Theorie nach verlängern muß (l steht linear im Zähler. h in der $\frac{1}{2}$ Potenz im Nenner). Es kann daher nur die Seichtheit dieses freigewordenen Uferstreifens die Dauer so beeinflussen. Wir dürfen daher aus dieser Beobachtung am Chiemsee schließen, daß seichte Ufer auch von geringer Breite die Periodendauer der Seiches verhältnismäßig stark verlängern. W. Halbfaß hat die gleiche Erscheinung am Madüsee beobachtet, wo sich die uninodale Seiche von 35,5 Min. bei einer Zunahme des Wasserstandes um rund 60 cm auf 36,4 verlängerte, das ist um 2,5 %. Die Ufer an den Enden des Sees sind dort ebenfalls sehr flach, so daß die Achse um ungefähr 400 m länger wird, worin auch Halbfaß die Ursache hiefür erblickt (S. 81).

Einzelne scheinbare Abweichungen sind am Chiemsee zu verzeichnen. Während z. B. die Dauer bis zum Pegelstand 50 cm auf 42,83 Min. abgenommen hat, nahm dieselbe zwischen Pegel 40 und 30 cm deutlich bis zum Werte 43,56 Min. zu,

welche Beobachtung mit derjenigen in den Vorjahren übereinstimmt. Der Grund ist nur der, daß bei Pegel 50 cm das eigentliche Seebecken, dessen Begrenzung eine rund 20 cm hohe Grasböschung bildet, gerade ausgefüllt war und daß also die Achse sich bis 30 cm Pegel nicht änderte, sondern nur die Tiefe und daher die Dauer zunehmen mußte (s. P. I, S. 62). Das Gleiche wiederholte sich bei Pegel — 40 und — 50 cm. Nach der Zone des Schilfes fällt nämlich das Ufer senkrecht auf eine Tiefe von 60 cm ab und das Wasser war bei Pegel — 50 bis zu dieser Stelle zurückgegangen und die Dauer, welche auf 39,34 Min. im Mittel zurückgegangen war, nahm von Pegel — 50 bis — 57 bis 40,07 Min. wieder zu. In der Veränderung der Dauer spiegelt sich die Terassenform des Ufers wieder. Die früher unter Eis gemessene Dauer endlich stimmt mit den Werten bei Pegel — 30 bis — 40 cm überein, beidesmal beträgt sie rund 41 Min. Die frühere Annahme (s. P. I, S. 64), daß das an das Ufer und das Schilf angefrorene Eis die Seichesbewegungen nicht mitmachen kann, also die Achse um die Breite der Schilfzone verkürzt wird, findet dadurch seine Bestätigung.

Auch die 36 Min.-Seiche hat gegen früher an Dauer abgenommen; da aber die Messungen früher und jetzt nicht genau sind, kann die Abnahme nicht besprochen, ja ihrem ungefähren Betrage nach nicht einmal angegeben werden. Die 54 Min.-Seiche trat nur bei hohem Wasserstande in meßbaren Reihen auf.

4. Die $28^1/_2$ Min.-Seiche.

In anliegender Kartenskizze Taf. III Fig. 2 seien wieder wie bei der 41 Min.-Seiche die Amplituden und Phasen der 19 Beobachtungspunkte eingetragen.

Die $28^1/_2$ Min.-Seiche ist also nach den Beobachtungen die binodale Seiche mit der Schwingungsachse Schafwaschen—Chieming. Die eine Knotenlinie verläuft östlich der Fraueninsel in fast nord-südlicher Richtung, die zweite, westliche, liegt am Eingang in

die Schafwaschener Bucht. Der mittlere Schwingungsbauch liegt vor Harras. Die frühere Deutung findet also durch die neuen Beobachtungen ihre Bestätigung. Die Wasserbewegung verzweigt sich hier, so daß die Kommunikationen nördlich und südlich der Herreninsel an der Schwingung teilnehmen und der mittlere Schwingungsbauch scheint da zu liegen, wo die Bewegungen südlich und nördlich der Herreninsel sich treffen. Die 28½ Min.-Seiche ist also eine uninodale Seiche Chieming—Harras, deren Dauer sich wahrscheinlich wenig ändern würde, falls die Schafwaschener Bucht abgesperrt wäre. Die P. Du Boyssche Formel gibt für Chieming—Südufer—Harras rund 23 Min., für Chieming—Nordufer—Harras 24 Min. Die Dauer ist demnach nach Du Boys zu kurz; jedenfalls wirkt die Einengung des Beckens durch die drei Inseln nahe der östlichen Knotenlinie verlängernd auf die Dauer. Die Einengung bei Urfahren dagegen wirkt nicht besonders ein, weil dieselbe ferner dem Knoten liegt.

Die 28½ Min.-Seiche ist ferner uninodale Schwingung Harras-Schafwaschen, deren Knoten durch die neuen Beobachtungen sehr genau an den Eingang in die Schafwaschener Bucht, also an eine starke Beckeneinschnürung fällt. Die P. Du Boyssche Regel ergibt für diese Strecke von 4,8 km Länge rund 15,7 Minuten, bleibt also um 54 % hinter der beobachteten Dauer zurück. Die Schwingung stimmt hierin mit der 54 Min.-Seiche unseres Sees und mit der 62 Min.-Seiche des Waginger-Tachingersees überein. Die Achsenlänge der westlichen Schwingung beträgt also nur 4,8 km gegen diejenige der östlichen von 13 km.

Die 28½ Min.-Seiche ist sonach die binodale Schwingung zu der 36 Min.-Seiche. Das Verhältnis der Dauer der uninodalen und binodalen Seiche erhält hier den ungewöhnlich großen Wert von 1 : 0,77 (37,5 : 28,99). Am Wagingersee, wo das Verhältnis 1 : 0,70 beträgt, habe ich auf die vollständige Unzulänglichkeit der P. Du Boysschen Theorie und die Übereinstimmung des Ergebnisses mit der Chrystalschen Theorie hingewiesen. Ganz dasselbe, was vom Waginger-

see bei der 11,78 Min.-Seiche gesagt wurde, gilt auch vom Chiemsee bei der 28½ Min.-Seiche. Da am Wagingersee die starke Einschnürung bei Horn mit dem nördlichen Knoten der 11,8 Min.-Seiche zusammenfällt, wurde die Dauer derselben so verlängert und, da der westliche Knoten der 28½ Min.-Seiche an den Rinngang und auch der östliche Knoten an die Beckeneinengung durch die drei Inseln fällt, wird die Dauer der binodalen Seiche des Chiemsees noch stärker verlängert.

Sehr lehrreich ist die Zusammenstellung der Periodenverhältnisse von Grund- und erster Oberschwingung der schon oben erwähnten Seen, geordnet nach der Größe dieser Periodenverhältnisse.

Unter T_1 steht hier die Dauer der uninodalen, unter T_2 diejenige der binodalen Seiche in Min. und unter V das Verhältnis in % der uninodalen Periode.

See	T_1 in Min.	T_2 in Min.	V in %
Chiemsee	37,5	28,99	77
Wagingersee	16,80	11,78	70
Starnbergersee	25,0	15,8	63
Chiemsee, Schafwaschner Bucht	6,4	3,8	59
See mit parabolischem Längsschnitt	100	58	58
Madüsee	35,5	20,3	57
Loch Treig	9,18	5,15	56
Loch Earn	14,5	8,10	56
Vierwaldstättersee	44,25	24,25	55
Tachingersee	12,6	6,25	49
Genfersee	73	35,5	48

Der Chiemsee, Wagingersee und Starnbergersee haben der Reihenfolge nach die weitaus größten Verhältnisse. Die anormale Verlängerung der Dauer der binodalen Seiches bei den beiden ersten Seen ist verursacht durch das Zusammenfallen einer bezw. beider Knotenlinien mit starken Beckeneinschnürungen, wie ich es oben und beim

Wagingersee eingehend besprochen habe. Das gleiche scheint auch am Starnbergersee der Fall zu sein, wo die südliche Knotenlinie wahrscheinlich mit der Einschnürung bei Unterzaismering zusammenfällt, wie auch H. Ebert schon seinerzeit das damals einzig dastehende, stark abweichende Verhältnis (64) begründet hatte.[1] Die dortige Einengung ist aber nicht so stark wie am Wagingersee, so daß auch das Verhältnis unter dem am Wagingersee zurückbleibt. Beide letztgenannten Seen haben also ganz ähnliche Beckenform für die uninodale und binodale Schwingungsunterteilung. Einen großen Gegensatz bilden aber hier der Chiemsee und Genfersee; während die Beckenform für die uninodalen Seiches die ganz gleiche ist (vgl. S. 329), ist dieselbe für die binodale Unterteilung so verschieden, daß der Chiemsee an den Anfang der Tabelle und der Genfersee an den Schluß kommt. Während wir nämlich am Chiemsee auch an den Knoten der binodalen Seiche starke Einschnürungen haben, liegen die Knoten derselben am Lémau weder an Einengungen des Beckens noch an besonders seichten Stellen, so daß die binodale Seiche mit sonst normaler Dauer unter der Hälfte der anormal großen Dauer der uninodalen Seiche zurückbleibt. Die Periodenverhältnisse bei den übrigen Seen nähern sich zum Teil sehr demjenigen von Chrystal für rein parabolische, konkave Seen berechneten Werte von 58, was mit ihrer regelmäßigen Gestalt auch im Einklang steht. Wir sehen aus den aufgezählten Beispielen, daß auch so verschiedene Verhältnisse der Periodendauern von Grund- und erster Oberschwingung, wie sie Halbfaß in letzter Zeit übersichtlich zusammengestellt hat,[2] vollkommen im Einklange mit der neuen Chrystalschen Theorie stehen.

Auch die Dauer der 28½ Min.-Seiche nimmt nach den neuen Untersuchungen mit dem Pegelstande ab (größter

---

[1]) H. Ebert; diese Berichte 30, 1900 H. III. S. 456.

[2]) W. Halbfaß, Seiches oder stehende Seespiegelschwankungen. Naturw. Wochenschrift von H. Potonié. Berlin 23. Oktober 1904.

Wert 29,00, kleinster 28,10). Die Abnahme beträgt aber nur 3⁰/₀ und führt wegen dieses geringen Betrages nicht zu näheren Erörterungen. Jedenfalls kompensiert die Zunahme der Dauer durch die Querschnittsverkleinerung am Rinngang zum Teil die Abnahme derselben infolge der Achsenverkürzung an dem seichten Schafwaschener Ende. Zu erwähnen ist noch, daß diese Seiche bei mittlerem und niedrigem Wasserstande mit auffallend kleiner Amplitude und selten auftritt, was wahrscheinlich in Knotenverschiebungen infolge der Veränderung des Wasserstandes seinen Grund hat.

5. Die 18 Min.-Seiche und 15½ Min-Seiche.

Bei der 18 Min.-Seiche haben sich, wie schon einleitend erwähnt, einzelne Änderungen gegenüber den früheren Annahmen ergeben. Der Grund war hauptsächlich die Interferenzkurve der Schwebung, an welcher man bei kurzen Beobachtungen die eine mit der anderen verwechseln kann. Die neuen Ergebnisse sind wieder wie bei den vorausgehenden Seiches in Fig. 3 auf Taf. III eingetragen.

Die 18 Min.-Seiche ist darnach die binodale Seiche Seebruck-Kailbach mit der ersten Knotenlinie etwas nördlich Chieming und der zweiten etwas südlich Stock. Infolge der Kommunikation nördlich der Herreninsel erfolgt die Schwingung auch auf diesem Wege und wird dadurch gleichzeitig Querseiche Mühlen-Weitsee. Endlich ist die Seiche infolge der weiteren Beckenunregelmäßigkeit, der Einengung am Rinngange, trinodale Seiche Seebruck-Schafwaschen mit dem dritten Knoten am Rinngang. Die Schafwaschener Bucht schwingt aber nur zeitweise in dem Takte der 18 Min.-Seiche mit, während im benachbarten Kailbach die Schwingung immer und mit größerer Amplitude auftritt. Diese Schwingung zeigt so recht, welche komplizierten Schwingungsverhältnisse in einem so unregelmäßigen Seebecken möglich sind.

Von Osternach bis Schafwaschen fällt also eine ganze uninodale Seiche von 18 Minuten. Es ist an der langen Dauer

eben wieder die Einengung am Rinngang schuld, welche mit dem Knoten zusammenfällt. Das Verhältnis der uninodalen Seiche Seebruck-Schafwaschen zur binodalen ist 1 : 0,43, also wieder verhältnismäßig groß (bei parabolischen Seen ist dasselbe nach Chrystal 1 : 0,41)[1]), ebenfalls nur verursacht durch das Zusammenfallen des dritten Knotens mit dem Rinngange.

Für die 15½ Min.-Seiche stellt die Ergebnisse Fig. 4 auf Taf. III dar. Darnach ist diese Schwingung die binodale Seiche in der Richtung Seebruck—Harras mit dem ersten Knoten an dem Ufervorsprung nördlich Chieming, bei Schützing und dem zweiten Knoten an der Südostspitze der Herreninsel, dem Knoten der 41 Min.-Seiche, unterbrochen durch die Herreninsel, gegen den Rinngang hin. Auch hier erfolgt die schwingende Bewegung des Wassers südlich und nördlich um die Herreninsel herum. Der mittlere Schwingungsbauch fällt in die Höhe der Spitze des Achenzipfels, der westliche vor Harras. Da Mühlen eine so große Amplitude hat, fällt sehr wahrscheinlich zwischen Mühlen—Harras eine weitere uninodale Seiche, so daß wir die 15½ Min.-Seiche die dreiknotige Seiche Seebruck—Harras—Mühlen nennen können. Zu beachten ist, daß die Schafwaschener- und Kailbacher-Bucht hiebei nicht mitschwingen, weil die horizontale Wasserbewegung bei dieser Seiche quer zu den Buchten erfolgt. Ein Beispiel hiefür haben wir schon in der Seicheliteratur; am Vierwaldstättersee teilt sich die Querschwingung von rund 18 Min. Dauer in der Richtung Küssnacht—Sandsstadt ebenfalls dem Hauptbecken nicht mit, weil die horizontale Wasserbewegung quer zur Hauptachse erfolgt.

Um die Theorie auch auf ein so kompliziertes Becken anzuwenden, habe ich die Dauer der 15½ Min.-Seiche aus der Normalkurve berechnet. Dieselbe läßt sich bis zum Knoten dieser Schwingung bei Stöttham (von Punkt 0 bis 3) angenähert als gerade Linie darstellen. Die Dauer muß daher

---

[1]) Chrystal, H. T. S. Seite 623.

nach Chrystal $T' = \frac{2\pi l}{2{,}405 \sqrt{g h}}$ sein, wobei für l die doppelte Seefläche von Seebruck bis zum Knoten und h die Ordinate σ der Normalkurve zu setzen ist; es ergeben sich 10,5 Min. In gleicher Weise kann die Dauer der 18 Min.-Seiche aus der Normalkurve bestimmt werden. Die Schwingung ist nämlich die uninodale Seiche Seebruck—Herreninsel Südost, also die uninodale Seiche des Hauptzweiges der Normalkurve von Punkt 0 bis 12. Der Knoten fällt außerdem fast genau in die Mitte dieses Kurvenzuges. Wir können daher diesen Zweig angenähert als Parabel betrachten, deren Scheitelpunkt im Knoten ist. Für die Dauer $T = \frac{\pi l}{\sqrt{2 g h}}$, wobei l die Fläche bis zum Knoten der 41 Min.-Seiche $= 200 \cdot 5^5\ 100$ qm und h die Ordinate der Kurve in der Mitte $= 90 \cdot 5^2 \cdot 10^6\ \mathrm{m}^3$ gesetzt ist, erhält man 15,4 Min. Beide berechneten Werte bleiben also bedeutend unter den beobachteten Dauern und zwar der für die $15^1/_2$ Min.-Seiche um $32^0/_0$ und der Wert für die 18 Min.-Seiche um $15^0/_0$. Die Annäherung der Kurve einerseits an eine Gerade andererseits an eine Parabel sind wohl beidesmal nicht genau, aber die Abweichungen sind nicht so groß um diese bedeutenden Beträge, um welche die berechnete Dauer hinter der beobachteten zurückbleibt, verständlich zu machen. Jedenfalls sind die besonderen Verhältnisse des Sees wie die große Breite, die flachen Ufer u. a. die Ursachen der geringen Übereinstimmung.

6. Die Seiches kürzerer Dauer.

Die 8 Min.-Seiche (vgl. Taf. III Fig. 5) ist die nächste Oberschwingung zu der $15^1/_2$ Min.-Seiche, also die vierknotige Seiche Seebruck—Harras; die erste Knotenlinie befindet sich bei Arlaching, die zweite geht südlich Chieming gegen Gstadt, die vierte läuft von Felden unterbrochen durch die Insel gegen Stock. Beobachtungen zwischen dem Schwingungsbauche bei Feldwies und dem westlichen bei Harras fehlen. Die dritte Knotenlinie läuft zwischen Mühlen und

Gstadt östlich der Herreninsel vorbei gegen Süden. Von besonderem Interesse ist die Schwingung noch deshalb, weil sie bei höherem Wasserstande auch in Schafwaschen aufgetreten ist und mit Seebruck gleiche Phase hatte. Die Eigenschwingung des Schafwaschener Winkels betrug nämlich bei höherem Wasserstande, zwischen 60 und 30 cm H. P., ungefähr 8,10 Min. und die Bucht machte dann die Schwingungen in gleichem Takte mit. Die 8 Min.-Seiche war auf diese Weise zeitweilig die sechsknotige Seiche Seebruck—Schafwaschen, wobei die beiden Kommunikationen südlich und nördlich der Herreninsel an der Schwingung teilnahmen. Diese Schwingung pflanzte sich im Gegensatze zur $15^1/_2$ Min.-Seiche wohl nur deshalb in den Winkel hinein fort, weil ein Schwingungsbauch an den Eingang fällt, während bei der $15^1/_2$ Min.-Seiche ein Knoten in der Nähe des Einganges liegt und die Wasserbewegung quer zum Eingang der Bucht stattfindet. Auch bei niedrigem Wasserstande wurde in Rinngang Süd und Nord die 8,2 Min.-Seiche noch beobachtet, aber in Schafwaschen ist diese Seiche nie mehr verzeichnet.

Die Eigenschwingung der Schafwaschener Bucht hat sich mit dem Wasserstande stark geändert. Bei Pegel 109—80 umfaßte sie : 8,57 Min., von Pegel 60 bis 30 cm : 8,10 Min., von da ab tritt die Schwingung sehr selten auf. Bei Pegel + 15 ist eine Reihe mit 7,15 Min. Dauer zu messen, eine weitere bei Pegel — 17 mit 6,67 Min. Erst bei Pegel — 54 tritt die Seiche wieder häufig und in sehr langen Reihen auf. Die Dauer hat dabei den geringsten Betrag von 6,40 Min. erreicht. Die starke Abnahme um 2,17 Min., das sind 34 % der nunmehrigen Dauer, erklärt sich eben aus der Verkürzung der Achse im Schafwaschener Winkel und zwar um den sehr seichten Uferrand. Der Vorgang kann aber nicht in der gleichen Weise wie bei der 41 Min.-Seiche verfolgt werden, weil die Schwingung oft gar nicht zu messen war. Daß sich auch später noch der Schwingungsbauch vor der Bucht in dieselbe hinein verlagerte, sieht man aus den

Limnimeterbeobachtungen am Rinngang sowohl als besonders aus Messungen von Seichesströmungen am Rinngang, bei welchen eine deutliche Periode von 8,2 Min. zu erkennen ist, worüber ich in einer eigenen Schrift Näheres mitteilen werde. Da die Bucht eben nicht mehr abgestimmt ist, schwingt sie nicht mehr mit und die Bewegungen können nur mehr erzwungene Schwingungen sein, wie ich sie am Waginger-Tachingersee beobachtet habe. Die Amplitude derselben ist aber, wie auch die der 17 Min.-Seiche im Tachingersee, nur klein, so daß sie aus dem unruhig verlaufenden Schafwaschener Limnogramme nicht zu erkennen ist.

Eine Seiche von 4 Min. wurde in Seebruck, Feldwies und Felden mit fast genau gleicher Dauer gemessen. Obwohl ein Phasenvergleich wegen der kurzen Periode und der geringen Zahl aufeinanderfolgender Schwingungen nicht möglich war, so glaube ich dennoch mit großer Wahrscheinlichkeit in ihr die weitere Oberschwingung von der 15½ Min.-Seiche suchen zu dürfen, also die achtknotige Schwingung Seebruck—Harras, da die Schwingung gerade am Ende der Achse der 15½ Min.-Seiche, nämlich in Seebruck, in deren mittleren Schwingungsbauche in Feldwies und deren westlichen Bauche bei Felden gefunden wurde.

Die nur einmal bei sehr niedrigem Wasserstande gemessene Seiche von 3,8 Min. ist sehr wahrscheinlich die binodale Seiche der Schafwaschener Bucht. Es wurde sonst nirgends eine Schwingung von solcher Dauer gemessen. Das Verhältnis der Perioden ist $6{,}4 : 3{,}8 = 1 : 0{,}59$ und entspricht ganz der konkaven Beschaffenheit des Schafwaschener Winkels.

Die 10,7 Min.-Seiche wurde bei den neuen Beobachtungen nur einmal in Osternach und einmal in Schafwaschen gemessen und beide Male bei einem Pegelstande von rund + 15 cm H. P. Da sie besonders in Seebruck nie mehr auftrat, liegen keine weiteren Vergleichsbeobachtungen vor. Eine Durchsicht der früheren Beobachtungen ergab in Gstadt eine Verwechslung der 11 mit der 12½ Min.-Seiche, so daß also Gstadt die Amplitude 0 hat. Außerdem hat die Seiche

am ganzen Ostufer gleiche Phase. Ich halte sie daher für eine Oberschwingung der 28½ Min.-Seiche und zwar für die trinodale Seiche Chieming—Harras. Die besondere Eigentümlichkeit hiebei ist, daß der östliche Schwingungsbauch infolge Verzweigung der Richtung in zwei solche zerfällt und zwar erstreckt sich der eine gegen Seebruck und der zweite gegen Hagenau. Die östliche Knotenlinie muß hiebei vom Achenzipfel gegen Nordosten ausbiegend nach dem Nordwestufer, ungefähr 1,5 km vor Seebruck, verlaufen. Für den Inselsee liegen zu wenig Vergleichsbeobachtungen vor. Nur einmal wurde die Schwingung früher in einer langen Reihe und größerer Amplitude in Schafwaschen beobachtet (s. P. I, Taf. II Fig. 11), dabei hatte sie übereinstimmend mit Seebruck entgegengesetzte Phase. Sie mußte dann, wie schon früher (P. I, S. 53) betont, vierknotige Seiche Seebruck—Schafwaschen gewesen sein. Auch bei dieser Seiche machte also die Bucht die Schwingungsbewegung nur zeitweise mit.

Für die 7 Min.-Seiche liegen nur einzelne Reihen in Harras und an der Fraueninsel vor. Sie konnte früher als dreiknotige Seiche Seebruck—Hagenau festgelegt werden. Nach den neuen Beobachtungen scheint sie auch zeitweise gegen Westen sich fortzusetzen.

Die 12½ Min.-Seiche konnte bei den neuen Untersuchungen nur vereinzelt aus dem Kailbacher Limnogramme gefunden werden, aber mit einer gegen früher sehr kleinen Amplitude. Sie ist, wie schon früher (P. I, S. 55) angegeben werden konnte, sehr wahrscheinlich eine Schwingung Feldwies—Kailbach und zwar eine binodale.

Die übrigen Schwingungen, das sind die 9½ Min.-Seiche, die 6,5 und 5,5 und 5 Min.-Seiche, sind Schwingungen des Weitsees, können aber auch auf Grund der neuen Beobachtungen nach Zahl und Lage der Knoten nicht näher festgelegt werden.

7. Die Einwirkung der Tieferlegung auf die Seiches.

Dadurch daß der Eintritt der Seespiegelsenkung des Sees in die Beobachtungszeit fällt, war, wie schon einleitend erwähnt, Gelegenheit gegeben die Einwirkung derselben auf die Schwingungen des Sees zu untersuchen, also ein Experiment im Großen anzustellen. Es dürfte angebracht sein diese Einwirkungen hier näher zu besprechen.

Die Tieferlegung selbst bestand darin, daß durch Ausbaggern und Regulieren des Seeabflußes, der Alz, alle Wasserstände um rund 70 cm erniedrigt wurden (in Wirklichkeit beträgt die Senkung bei Hochwasser 60 cm und bei Niedrigwasser 80 cm). Die Seetiefen sind also durchweg um diesen Betrag geringer geworden. Durch die große Sommerdürre des Jahres 1904 trat außerdem ein ungewöhnlich tiefer Wasserstand ein, der bis — 59 cm H. P. zurückging. Bei der Flachheit der Ufer änderte sich daher die Seefläche bedeutend. Die Änderungen sind deutlich aus der Karte auf Taf. II zu ersehen, in welche die neue Uferlinie bereits eingezeichnet und die frühere Umrißlinie durch die punktierte Linie angedeutet ist. Bei — 60 cm wurde einmal die Feldwieser-Bucht vollständig und die Hagenauer-Bucht zum großen Teile trocken gelegt. Weiterhin wurden die Einengungen bei Urfahren und am Rinngang bedeutend verstärkt; erstere hatte, wie schon erwähnt, bei Hochwasser von 100 cm H. P. eine Querschnittsfläche von rund 2000 qm und bei — 60 cm H. P. nur mehr rund 1000 qm, letztere eine solche von 2000 qm und dem seichtem Wasserstande nur 1200 qm. Außerdem wurden zwei kleine Inseln östlich der Herreninsel und mehrere größere Landzungen frei, so an der Nordostspitze der Herreninsel und Krautinsel ein Ufervorsprung von 400 m Länge, bei Seebruck ein solcher von rund 300 m; eine neue Halbinsel erstreckt sich bei Harras und eine weitere etwas südlich Harras 200 m weit in den See hinein und nördlich Stock zwei kleinere von 150 bezw. 120 m Länge. Ferner wurde rings um den See und um die Herreninsel ein 50 bis 100 m breiter Rand

trocken gelegt. Endlich ist jetzt der Ausfluß bei Seebruck etwa 200 m weiter in den See hinein verlegt.

Wie man sieht, sind die Veränderungen immerhin bedeutende, so daß eine Einwirkung auf die Schwingungen schon im voraus zu erwarten war. Dieselbe bestand nun einmal in einer Veränderung der Dauer aller Schwingungen. Um dieselbe überblicken zu können, sind die Mittelwerte der Dauer bei dem früheren und jetzigen Mittelwasserstande in der Tabelle S. 319 zusammengestellt. Darnach hat die Dauer bei den Schwingungen von 41, 36, 28½, 18, 15½, 12½ und 6.4 Min. abgenommen und bei denjenigen von 9½, 8 und 7 Min. zugenommen. Die Abnahme der Dauer habe ich bei der 41 Min.-Seiche eingehend besprochen; sie ist durch die Verkürzung der Achse um einen seichten Uferstreifen verursacht. Die gleiche Ursache trifft wohl auch bei den übrigen Schwingungen zu. In der Verlängerung der Dauer bei den anderen Seiches dagegen kommt die Tiefenverringerung mehr zum Ausdruck, weil das eine Ende der Achse in Seebruck nicht verkürzt wird und auch das andere Ende wahrscheinlich nicht auf seichtes Ufer ausläuft. Weiterhin treten mehrere Seiches bei tiefem Wasserstande gar nicht mehr auf, wie besonders die 10,7 Min.-Seiche, welche früher eine ständige Schwingung des Weitsees war, ebenso die 5 und 3 Min.-Seiche und die schon erwähnte 54 Min.-Seiche. Andere Seiches treten dagegen neu auf, wie die von 6,5 und 5,7 Min.-Dauer. Wieder andere sind viel seltener zu erkennen, wie die 28½ Min.-Seiche und die 4 Min.-Seiche und endlich mehrere viel häufiger wie die 36 Min.-Seiche und 6,4 Min.-Seiche in Schafwaschen und die 9½ und 8 Min.-Seiche in Seebruck. Wenn sich auch die Ursache der Veränderungen bei den einzelnen Seiches nicht angeben läßt, so verstehen wir doch die Einwirkung im allgemeinen. Durch Trockenlegung der seichten Ufer wird die Dauer so verändert, daß auch die Lage der Knotenlinien stark verschoben wird und dadurch bei der Beckenunregelmäßigkeit eine stärkere Dämpfung oder eine bessere Abstimmung des Seeteiles auf die einzelne Schwingung erfolgt.

Oder es wird die Einengung an bestimmten Punkten so stark, daß die eine oder andere Seiche von der betreffenden Dauer nicht mehr stabil ist. Lehrreich sind hiefür die Untersuchungen am Waginger-Tachingersee, wo keine binodale Seiche des ganzen Beckens wegen der Lage der starken Einschnürung möglich ist und wegen der Einschnürung bei Horn die binodale Schwingung des Wagingersees instabil ist. Auch die Einengung bei Rapperswyl am Zürichersee ist nach Sarasin wohl die Ursache dafür, daß die uninodalen und binodalen Seiches sich so schlecht entwickeln. Diese Ergebnisse machen es verständlich, warum in unregelmäßigen Seebecken nicht alle Seiches jeder Knotenzahl auftreten.

Zusammenstellung der Hauptergebnisse.

Der Chiemsee stellt in der Seichesforschung in gewisser Beziehung ein vollständiges Novum dar. Während bisher vorwiegend Seen mit ausgesprochener Längsrichtung untersucht wurden, liegt hier zum erstenmal die Untersuchung eines Seebeckens vor, dessen Breitenausdehnungen von fast derselben Größenordnung wie seine Längsdimensionen sind. Man kann, um ein akustisches Analogon heranzuziehen, die Schwingungen der bisher untersuchten Seen mit ausgesprochenem Längstalwege mit denjenigen von Saiten mit variabler Dichteverteilung vergleichen; der Chiemsee mit seinen vielen Schwingungsrichtungen entspricht dagegen einer Chladnischen Klangplatte von sehr unregelmäßiger Umgrenzung, einer Platte, aus der sogar durch die Inseln Teile ausgespart sind. Es kann nicht wunder nehmen, daß bei einem derartig komplizierten, aber immer noch schwingungsfähigen Gebilde überaus mannigfache Einzelformen des Schwingungsbildes zutage treten mußten, deren Charakteristika nach dem Vorausgehenden im wesentlichen aus folgendem bestehen:

1. Am Chiemsee konnten 17 Schwingungen verschiedener Dauer, wobei die unter 3 Min. Periodendauer noch nicht mitgerechnet sind, gefunden und die Lage der Knoten und Bäuche

der häufiger auftretenden Seiches auf Grund von Beobachtungen an 19 verschiedenen Seestellen mittels selbstregistrierender Limnimeter und 12 weiteren Punkten mittels des Zeigerlimnimeters zum Teil ganz genau festgelegt werden.

2. Die Hauptschwingung des Chiemsees von 41 Min. mittlerer Dauer schwingt in der Richtung Schafwaschen—Seebruck mit der Knotenlinie durch die Südostspitze der Herreninsel gegen Urfahren, also unterbrochen durch die Insel. Die Schwingungsachse ist dabei fast halbkreisförmig. Die Amplituden sind im Westen 6 mal so groß als im Osten.

3. Der Chiemsee hat zwei weitere uninodale Seiches, welche nur selten auftreten und zwar eine solche von rund 54 Min. Dauer, mit der Schwingungsrichtung Schafwaschen—Nordufer der Herreninsel—Chieming und eine weitere von ungefähr 36 Min., welche ebenfalls von Schafwaschen nach Chieming schwingt, aber längs der südlichen, tieferen Rinne.

4. Die Anwendung der P. Du Boysschen Berechnungsmethode ergibt für die Dauer der 41- und 36 Min.-Seiche sehr befriedigende Werte, versagt aber bei der Berechnung der 54 Min.-Seiche vollständig. Ein Vergleich mit den uninodalen Seiches in anderen bereits untersuchten Seen liefert das Ergebnis, daß die Dauer nach der P. Du Boysschen Interpolationsformel in symmetrisch konkaven Seen zu groß erhalten wird, wie auch die Chrystalsche Theorie lehrt, daß aber in konkaven, asymmetrischen Seen, wo der Knoten gegen die tiefste Stelle stark verlagert ist, die Annäherung eine gute wird, wie am Genfersee und bei der 41- und 36 Min.-Seiche des Chiemsees. Fällt aber der Knoten einer Schwingung an eine konvexe Stelle mit starker Beckeneinschnürung, so wird die Dauer nach der Formel viel zu klein, wie bei der 54 Min.-Seiche des Chiemsees und der 62 Min.-Seiche des Waginger—Tachingersees. Die Anwendung der exakten Chrystalschen Theorie aber ist am Chiemsee wegen der plötzlichen, starken Querschnittsänderungen sowohl als besonders wegen der geringen Längenausdehnung gegenüber derjenigen in der Breite nicht mit Erfolg möglich.

5. Eine $28^1/_2$ Min.-Seiche ist binodale Schwingung zu der 36 Min.-Seiche in der Richtung Ostufer – Schafwaschen, wobei die Wassermasse sowohl südlich wie nördlich der Herreninsel beteiligt ist. Die östliche Knotenlinie läuft von Feldwies östlich der Fraueninsel vorbei, die westliche befindet sich genau am Eingang in die Schafwaschener Bucht. Der mittlere Schwingungsbauch fällt vor Harras. Das anormale Verhältnis von Grund- und erster Oberschwingung, 1 : 0,77, erklärt sich übereinstimmend mit den Ergebnissen an anderen Seen durch das Zusammenfallen der Knotenlinien mit starken Beckeneinschnürungen.

6. Eine weitere Seiche von 18 Min. ist zweiknotig in der stark abgebogenen Richtung Seebruck Südufer – Kailbach und zugleich auch uninodale Querseiche Mühlen — Weitsee. Zeitweise schwingt auch die Schafwaschener Bucht mit, wobei am inneren Ende des Rinngangs ein weiterer Knoten entsteht, so daß diese Schwingung zeitweise dreiknotige Seiche der Richtung Seebruck — Schafwaschen ist.

7. In einer Seiche von $15^1/_2$ Min. Dauer konnte die binodale Schwingung Seebruck — Harras erkannt werden, wobei die 1. Knotenlinie südlich Arlaching liegt, und die 2. südöstlich der Herreninsel, zusammenfallend mit dem Knoten der Hauptschwingung und unterbrochen durch die Insel, gegen Osternach läuft. Insofern kann sie auch als dreiknotige Seiche Seebruck — Südufer — Mühlen bezeichnet werden. Auch die nächste Oberschwingung zur $15^1/_2$ Min.-Seiche von 8 Min. Dauer wurde beobachtet, welche also vierknotige Seiche Seebruck — Harras ist. Bei höherem Wasserstande, wo die Schafwaschener Bucht eine Eigenschwingung gleicher Dauer hatte, setzte sich die schwingende Bewegung auch in diese Bucht hinein fort als sechsknotige Seiche Seebruck — Schafwaschen. Endlich ist die 4,2 Min.-Seiche sehr wahrscheinlich die nächste Oberschwingung zur 8 Min.-Seiche, welche sich aber nicht in den Schafwaschener Winkel fortsetzte, so daß sie als achtknotige Seiche Seebruck — Harras gelten kann.

8. Eine Schwingung von 10,7 Min. mittlerer Dauer ist dreiknotige Seiche Weitsee – Inselsee; dabei zerfällt der östliche Schwingungsbauch in zwei getrennte Bäuche, einen nordöstlichen bei Seebruck und einen südöstlichen bei Hagenau. Auch diese Seiche teilt sich zeitweise der Schafwaschener Bucht mit und ist dann vierknotige Schwingung Weitsee — Schafwaschen. Diese Seiche ist mit derjenigen von 28½ Min. und von 18 Min. so recht ein Beispiel dafür, welch komplizierte Schwingungsunterteilungen in einem so unregelmäßigen Becken möglich sind.

9. Eine Seiche von 12½ Min. tritt nur im Inselsee und außerdem noch in Feldwies auf und ist sehr wahrscheinlich die zweiknotige Seiche Feldwies — Kailbach, eine weitere von 7,1 Min. ist schon früher als trinodale Schwingung Seebruck — Hagenau nachgewiesen worden und setzt sich nach den neuen Beobachtungen auch in den Inselsee fort. Weitere Seiches von 9,5 Min., 6,5 Min., 5,7 Min., 5,0 Min. und 3 Min. treten nur an einzelnen Punkten des Weitsees und da nicht so häufig auf, daß ihre Knoten und Bäuche mit Sicherheit aufgefunden werden konnten.

10. Die Schafwaschener Bucht endlich hat eine uninodale Eigenschwingung von 8,57 Min., welche mit dem Wasserstande bis 6,4 Min. abnahm, wo dann die Bucht für diese Periode gleichsam sehr gut abgestimmt war. Auch die binodale Seiche der 6,4 Min.-Schwingung konnte mit einer Dauer von 3,8 Min. gemessen werden.

11. Einen bedeutenderen Einfluß auf die Schwingungsunterteilung übt nur die Herreninsel, die größte der drei Inseln aus. Einmal teilt sie den Inselsee in zwei Kanäle, welche infolge ihrer Tiefen- und Querschnittsunterschiede Eigenschwingungen verschiedener Dauer bedingen. Bei der Mehrzahl der Schwingungen erfolgen die Schwingungsbewegungen südlich und nördlich der Herreninsel, so daß die Knotenlinien durch die Insel in zwei Teile zerlegt werden. Ferner wird durch die zweite Kommunikation die merkwürdige Erscheinung ermöglicht, daß eine Schwingung, nämlich die 18 Min.-Seiche,

zugleich Längs- und Querseiche sein kann. Die Beobachtung auf den Inseln, also mitten im See, ergab eine etwas größere Amplitude, als die korrespondierenden Punkte am Ufer haben, und ermöglichten außerdem die endgültige Festlegung der Knoten mehrerer Schwingungen.

12. Die Seichesuntersuchungen an einem See von so komplizierter Beckengestalt und Umrißform haben ergeben, daß Seichesbewegungen nach den verschiedensten Richtungen möglich sind, daß ferner jede Bucht Ende einer Schwingungsrichtung sein kann, daß weiterhin die Schwingungsrichtungen sich verzweigen können. Wichtig ist endlich das Ergebnis, daß mehrknotige Seiches nur einen Teil des Sees einnehmen können und daß nur zeitweise auch andere Seeteile im nämlichen Rhythmus mitschwingen. Eine Bucht schwingt nicht merklich mit, wenn die Schwingungsachse quer zu derselben verläuft.

13. Der jeweilige Wasserstand des Sees und dessen Veränderungen üben auf die Dauer der Schwingungen einen zum Teil bedeutenden Einfluß aus, indem die Dauer derjenigen Seiches, welche gegen seichte, flache Ufer schwingen, bei Abnahme des Wasserstandes ebenfalls abnimmt, bei anderen zunimmt. Besonders stark änderte sich die Dauer der Hauptschwingung, welche von 44,05 Min. bis 39,34 Min., also um 11 % der mittleren Dauer abnahm, als der Wasserstand nach und nach von 109 cm bis — 57 cm H. P. zurückging. Eben diese starke Veränderung der Dauer läßt schließen, daß flache Ufer auf die Dauer der Seiches auch in sonst konkaven Becken einen merklichen Einfluß ausüben. Endlich bewirken die Veränderungen des Wasserstandes, daß einige Seiches zu Zeiten selten und mit kleiner Amplitude auftreten und rasch gedämpft werden, andere sich überhaupt nicht mehr zeigen. Durch dieses Ergebnis wird verständlich, warum in den einzelnen Seen nicht alle Seiches jeder Nodalität angetroffen werden. Die eben genannten Beobachtungen wurden nur dadurch ermöglicht, daß die Tieferlegung des Chiemseespiegels in die Beobachtungszeit

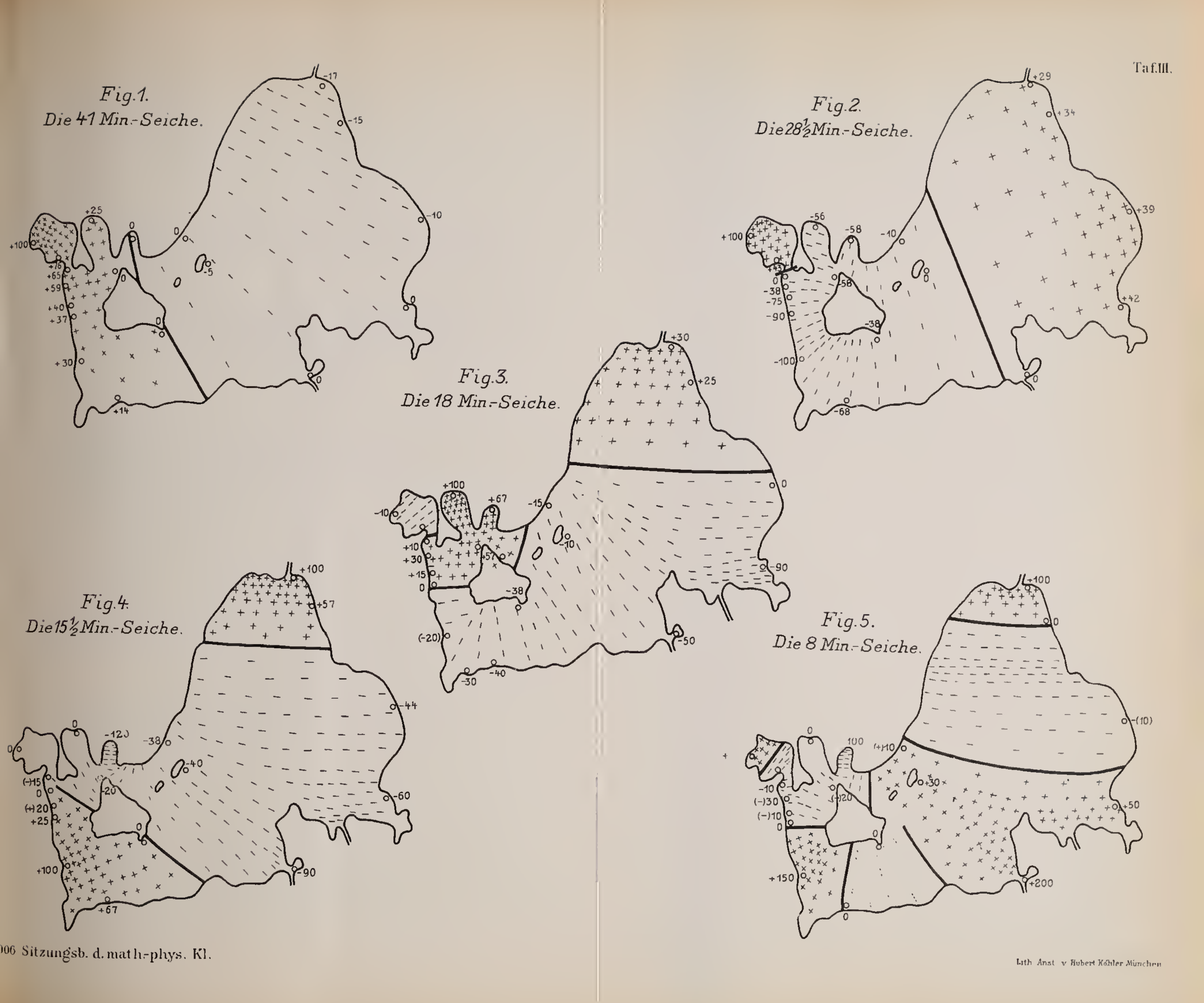
fiel und hiedurch die Differenz des höchsten und tiefsten Wasserstandes den hohen Betrag von 1,66 m erreichte.

Gleichzeitig mit den Untersuchungen der Schwingungsformen des Chiemsees, deren Ergebnisse in vorliegender Schrift mitgeteilt sind, wurden umfangreiche Beobachtungen über die Ursachen der Seiches angestellt und zugleich andere mit den Seiches in Zusammenhang stehende Probleme geophysikalischer Natur in dieselben einbezogen, worüber ich später zu berichten gedenke.

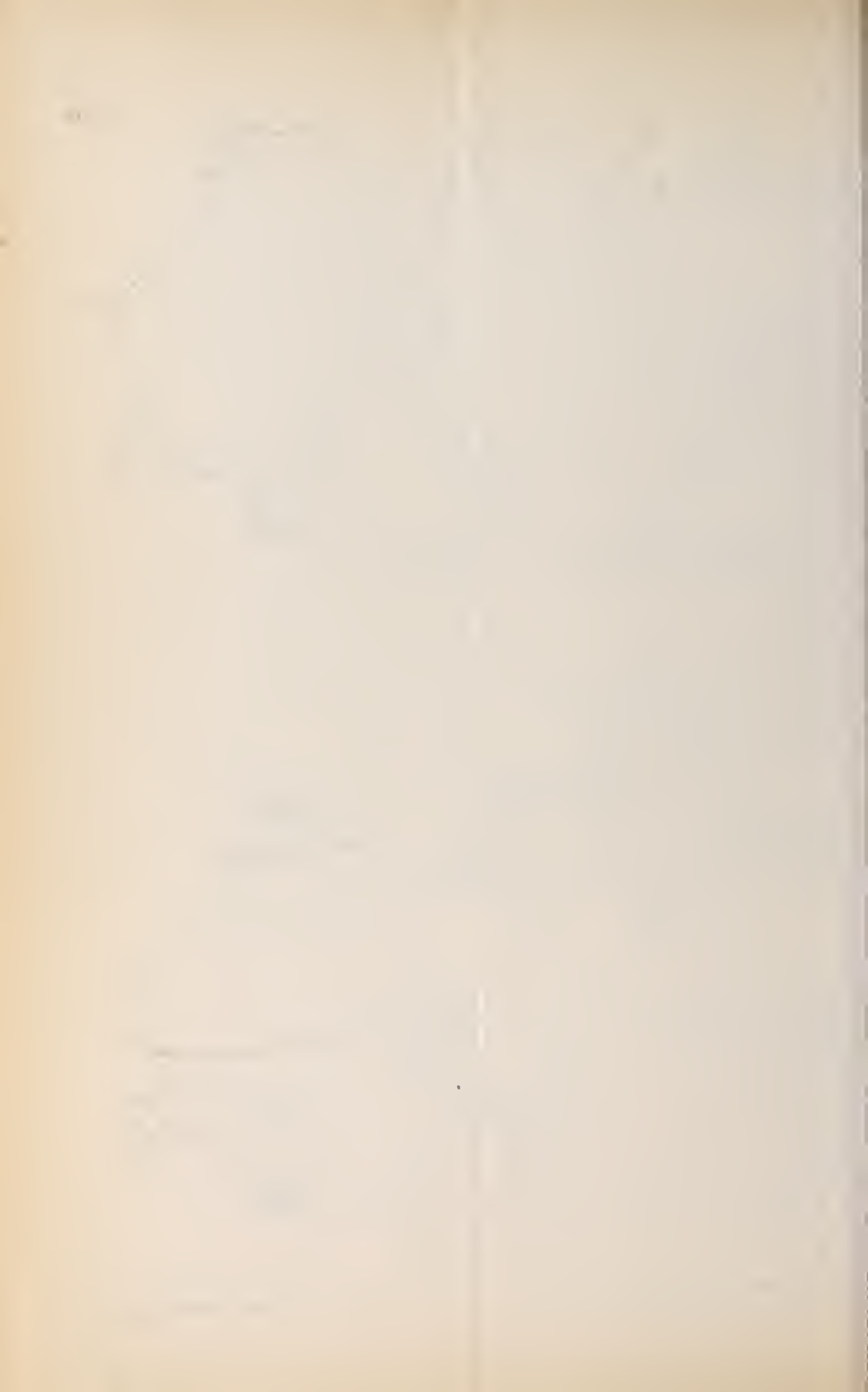
Traunstein, April 1906.


Taf. II.
Normalkurve des Chiem-Sees.
Schafwaschen
Seebruck
Mafsst. für v: 1mm = 50³m²
für б(v): 1mm = 10⁷m³
Die Seeschwankungen (Seiches) des Chiem-Sees.
von
Anton Endrös.
Mafsstab = 1 : 75 000
Seebruck
II. STATION
Alz
Arlaching
6. Station
Gollenshausen
Mitterndorf
Schützing
St Johann
Stöttham
7. Station
Chieming
Weitsee
Aiterbach
Kailbach
14. Station
Gstadt
5. Station
3. Station
Mühlen
I. STATION
Schafwaschen
Aiterbach Winkel
Sassau
Kailbach Winkel
Mühlener Winkel
Weingarten
Urfahrn
Rimsting
9. St.
Prien
Holzen
Frauenchiemsee
17. Station
Osternach
13. St.
Rimsting
15. St.
Kraut-Jnsel
12. Station
11. Station
4. Station
Stock
Jnsel
Herrenchiemsee
Jnsel
Hagenau
8. Station
Grabenstätter Winkel
Achenzipfel
Achen
16. St.
10. Station
Harras
Baumgarten
Grabenstätt
1. Station
Feldwies
10 mtr.
Mühlbach
Jtschner Bucht
2. Station
Felden
Rothbach
Übersee-Bach
Achen
Lith. Anst. v. Hubert Köhler München





Lith. Anst. v. Hubert Köhler München



Abhandlungen zur Elastizitätstheorie.

II.

Die Eigenschwingungen eines elastischen Körpers mit ruhender Oberfläche.

Von **A. Korn.**

(*Eingelaufen 5. Mai.*)

Nachdem wir in der ersten Abhandlung gezeigt haben, daß das elastische Gleichgewichtsproblem:

$$1)\qquad \left\{\begin{aligned} \Delta u + k\frac{\partial \theta}{\partial x} &= -X, \\ \Delta v + k\frac{\partial \theta}{\partial y} &= -Y, \\ \Delta w + k\frac{\partial \theta}{\partial z} &= -Z, \end{aligned}\right\} \text{ in dem elastischen Körper } \tau$$

$$\left(\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right),$$

$$2)\qquad \left\{\begin{aligned} u &= 0, \\ v &= 0, \text{ an der Oberfläche } \omega, \\ w &= 0, \end{aligned}\right.$$

für

$$3)\qquad -1 < k < +\infty$$

bei gewissen Stetigkeitsvoraussetzungen über die gegebenen Funktionen

$$X, Y, Z \text{ von } x, y, z$$

stets ein und nur ein System von Lösungen u, v, w zuläßt,

wollen wir jetzt die Existenz einer abzählbar unendlichen Menge von Funktionentripeln:

$$U_\varkappa \, V_\varkappa \, W_\varkappa$$

beweisen, welche den Differentialgleichungen:

$$4) \quad \begin{cases} \Delta U_\varkappa + k \dfrac{\partial \Theta_\varkappa}{\partial x} + \lambda_\varkappa^2 U_\varkappa = 0, \\[2ex] \Delta V_\varkappa + k \dfrac{\partial \Theta_\varkappa}{\partial y} + \lambda_\varkappa^2 V_\varkappa = 0, \\[2ex] \Delta W_\varkappa + k \dfrac{\partial \Theta_\varkappa}{\partial z} + \lambda_\varkappa^2 W_\varkappa = 0 \end{cases}$$

genügen und an der Oberfläche verschwinden. Dabei sind die $\lambda_\varkappa^2$:

$$5) \quad \lambda_0^2 < \lambda_1^2 < {}_2^2 < \cdots$$

Konstanten, welche wir als die den elastischen Funktionentripeln $U_\varkappa \, V_\varkappa \, W_\varkappa$ zugehörigen Zahlen bezeichnen wollen.

Zur Bestimmung der Eigenschwingungen eines elastischen Körpers bei ruhender Oberfläche haben wir Funktionen $U \, V \, W$ zu bestimmen, welche in τ den Differentialgleichungen genügen:

$$6) \quad \begin{cases} \Delta U + k \dfrac{\partial \Theta}{\partial x} = \sigma^2 \cdot \dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \\[2ex] \Delta V + k \dfrac{\partial \Theta}{\partial y} = \sigma^2 \cdot \dfrac{\partial^2 V}{\partial t^2}, \quad (k, \sigma^2 \text{ Konstanten des Mediums}), \\[2ex] \Delta W + k \dfrac{\partial \Theta}{\partial z} = \sigma^2 \cdot \dfrac{\partial^2 W}{\partial t^2} \end{cases}$$

und an der Grenze verschwinden. Jedem elastischen Funktionentripel $U_\varkappa \, V_\varkappa \, W_\varkappa$ ist nun eine elastische Eigenschwingung bei ruhender Oberfläche zugeordnet:

$$7) \quad \begin{cases} U = U_\varkappa \cos\left(\dfrac{t}{T_\varkappa} + \delta\right) 2\pi, \\[2ex] V = V_\varkappa \cos\left(\dfrac{t}{T_\varkappa} + \delta\right) 2\pi, \quad (\delta \text{ beliebige Konstante}), \\[2ex] W = W_\varkappa \cos\left(\dfrac{t}{T_\varkappa} + \delta\right) 2\pi, \end{cases}$$

und die betreffende Schwingungsdauer bestimmt sich aus der dem elastischen Funktionentripel zugeordneten Zahl $\lambda_\varkappa^2$ durch die folgende Relation:

$$T_\varkappa = \frac{\lambda_\varkappa}{2\pi\sigma}. \tag{8}$$

Die Theorie der elastischen Funktionentripel läßt übrigens nicht bloß diese eine Anwendung zu, sondern die Verwendbarkeit derselben ist dieselbe, wie die der Theorie der Poincaréschen harmonischen Funktionen.

Es läßt sich zeigen, wie wir sehen werden, daß sich jedes Funktionentripel u, v, w von gewissen Stetigkeitseigenschaften nach den elastischen Funktionentripeln entwickeln läßt:

$$\left\{\begin{aligned} u &= \sum\nolimits^\varkappa c_\varkappa U_\varkappa, \\ v &= \sum\nolimits^\varkappa c_\varkappa V_\varkappa, \quad (c_1\, c_2 \ldots \text{ Konstanten}). \\ w &= \sum\nolimits^\varkappa c_\varkappa W_\varkappa, \end{aligned}\right. \tag{9}$$

Nach dem Beweise dieser Entwicklungen kann man das System von Differentialgleichungen:

$$\left\{\begin{aligned} \Delta u + k\frac{\partial\theta}{\partial x} &= \sigma^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ \Delta v + k\frac{\partial\theta}{\partial y} &= \sigma^2\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\ \Delta w + k\frac{\partial\theta}{\partial z} &= \sigma^2\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \end{aligned}\right. \tag{10}$$

das System von Differentialgleichungen:

$$\left\{\begin{aligned} \Delta u + k\frac{\partial\theta}{\partial x} &= \mu\frac{\partial u}{\partial t}, \\ \Delta v + k\frac{\partial\theta}{\partial y} &= \mu\frac{\partial v}{\partial t}, \\ \Delta w + k\frac{\partial\theta}{\partial z} &= \mu\frac{\partial w}{\partial t} \end{aligned}\right. \tag{11}$$

und auch das noch allgemeinere System von Differentialgleichungen:

$$
12) \quad \begin{cases}
\Delta u + k \dfrac{\partial \theta}{\partial x} = \sigma^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \mu \dfrac{\partial u}{\partial t}, \\[2ex]
\Delta v + k \dfrac{\partial \theta}{\partial y} = \sigma^2 \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \mu \dfrac{\partial v}{\partial t}, \\[2ex]
\Delta w + k \dfrac{\partial \theta}{\partial z} = \sigma^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \mu \dfrac{\partial w}{\partial t}
\end{cases}
$$

in sehr allgemeiner Weise bei gegebenen Anfangs- und Grenzbedingungen integrieren.

§ 1.

Ich stelle der Untersuchung den folgenden Hilfssatz voran:

Hilfssatz. Es seien

$$u_j v_j w_j \quad (j = 0, 1, 2 \ldots p)$$

$p + 1$ Funktionentripel, die mit ihren ersten Ableitungen in τ eindeutig und stetig sind, an der Grenze verschwinden, und von denen sonst nichts vorausgesetzt werde, als daß die $u_j v_j w_j$ derart linear unabhängig sind, daß keine Relationen von der Form stattfinden können:

$$
\left.\begin{aligned}
\sum_0^p {}_j\, \beta_j u_j &= 0, \\
\sum_0^p {}_j\, \beta_j v_j &= 0, \\
\sum_0^p {}_j\, \beta_j w_j &= 0
\end{aligned}\right\} \text{ im ganzen Innenraum.}
$$

wo die β_j reelle Konstanten sind, die der Gleichung:

$$\beta_0^2 + \beta_1^2 + \cdots + \beta_p^2 = 1$$

genügen. Man kann dann stets die $p + 1$ reellen Konstanten:

$$\alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_p$$

so berechnen, daß

$$13) \qquad \alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \cdots + \alpha_p^2 = 1$$

und die Funktionentripel:

$$14)\quad \begin{cases} u = \sum_0^p j\, a_j\, u_j, \\ v = \sum_0^p j\, a_j\, v_j, \\ w = \sum_0^p j\, a_j\, w_j \end{cases}$$

die Ungleichung erfüllen:

$$15)\quad \frac{\int_i (u^2 + v^2 + w^2)\, d\tau}{\int_i (\theta^2 + \mathfrak{u}^2 + \mathfrak{v}^2 + \mathfrak{w}^2)\, d\tau} < \frac{\mathfrak{a}^2}{\sqrt[3]{p^2}}$$

wo $\mathfrak{a}$ eine endliche, lediglich von der Gestalt der Fläche abhängende, von den Funktionen $u_j\, v_j\, w_j$ gänzlich unabhängige Länge vorstellt, und wo:

$$16)\quad \theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$17)\quad \begin{cases} \mathfrak{u} = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \\ \mathfrak{v} = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \\ \mathfrak{w} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$$

gesetzt ist.

Es ist in der Tat:

$$18)\quad \begin{cases} \int_i (\theta^2 + \mathfrak{u}^2 + \mathfrak{v}^2 + \mathfrak{w}^2)\, d\tau = -\int_i \Big[u \Big\{ \frac{\partial \theta}{\partial x} - \Big(\frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial z} \Big) \Big\} \\ \quad + v \Big\{ \frac{\partial \theta}{\partial y} - \Big(\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial x} \Big) \Big\} + w \Big\{ \frac{\partial \theta}{\partial z} - \Big(\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial y} \Big) \Big\} \Big] d\tau, \\ = -\int_i [u\, \Delta u + v\, \Delta v + w\, \Delta w]\, d\tau, \\ = \int_i \Big[\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial u}{\partial y}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial u}{\partial z}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial v}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial v}{\partial y}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial v}{\partial z}\Big)^2 \\ \quad + \Big(\frac{\partial w}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial w}{\partial y}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial w}{\partial z}\Big)^2 \Big] d\tau, \end{cases}$$

und wir wissen nach dem Beweise eines Poincaréschen Satzes,[1]) daß bei genügend großem p die Konstanten a_j so bestimmt werden können, daß:

$$19)\quad \begin{cases} \int_i u^2\, d\tau < \dfrac{a^2}{\sqrt[3]{p^2}} \int_i \left[\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right] d\tau, \\ \int_i v^2\, d\tau < \dfrac{a^2}{\sqrt[3]{p^2}} \int_i \left[\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial v}{\partial z}\right)^2\right] d\tau, \\ \int_i w^2\, d\tau < \dfrac{a^2}{\sqrt[3]{p^2}} \int_i \left[\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right] d\tau. \end{cases}$$

Wir haben in dem bekannten Beweise des Poincaréschen Satzes das Gebiet τ nur in eine Anzahl $< \frac{p}{3}$ Teilgebiete τ_j zu zerlegen, und die Konstanten a_j so zu berechnen, daß für jedes Teilgebiet:

$$20)\quad \int_{\tau_j} u\, d\tau = \int_{\tau_j} v\, d\tau = \int_{\tau_j} w\, d\tau = 0,$$

dann ergibt jener Beweis auch unmittelbar die obigen Formeln.

§ 2.

Wir stellen uns jetzt das folgende Problem:

Gegeben sind drei (abteilungsweise) eindeutige und stetige Funktionen der Stelle des Innenraums $f_1\ f_2\ f_3$, von denen wir voraussetzen, daß in den Teilgebieten, in denen Stetigkeit vorhanden ist, für zwei Punkte 1 und 2 in genügend kleiner Entfernung r_{12}:

$$21)\quad \text{abs.}\left[\, f_{j\,2} - f_{j\,1}\right] < A_j r_{12}^{\lambda},\ j=1,2,3 \qquad A_1\ A_2\ A_3 \text{ endliche Konstanten, } \lambda \text{ echter Bruch.}$$

Es sollen drei mit ihren ersten Ableitungen eindeutige und stetige Funktionen $U\ V\ W$ der Stelle des Innenraumes so gefunden werden, daß:

[1]) H. Poincaré, Rendiconti del Circ. Mat. di Palermo, 1894; A. Korn, Abh. zur Potentialtheorie 4 (Berlin, Ferd. Dümmlers Verlag 1902).

22)
$$\begin{cases} \Delta U + k \dfrac{\partial \Theta}{\partial x} + \lambda^2 U^{1)} = -f_1, \\ \Delta V + k \dfrac{\partial \Theta}{\partial y} + \lambda^2 V \quad = -f_2, \\ \Delta W + k \dfrac{\partial \Theta}{\partial z} + \lambda^2 W \quad = -f_3, \end{cases}$$

k und λ^2 gegebene Zahlen $(-1 < k < \infty)$, und daß an der Fläche ω:

23)
$$\begin{cases} U = 0, \\ V = 0, \\ W = 0. \end{cases}$$

Wir bilden successive, entsprechend den Untersuchungen meiner ersten Abhandlung zur Elastizitätstheorie,[2] die mit ihren ersten Ableitungen in τ eindeutigen und stetigen Funktionen:

$$u_j \; v_j \; w_j \qquad (j = 0, 1, 2 \ldots)$$

so, daß:

24)
$$\left.\begin{array}{l} \Delta u_0 + k \dfrac{\partial \theta_0}{\partial x} = -f_1, \\ \Delta v_0 + k \dfrac{\partial \theta_0}{\partial y} = -f_2, \\ \Delta w_0 + k \dfrac{\partial \theta_0}{\partial z} = -f_3, \\ \left.\begin{array}{l} \Delta u_j + k \dfrac{\partial \theta_j}{\partial x} = -u_{j-1}, \\ \Delta v_j + k \dfrac{\partial \theta_j}{\partial y} = -v_{j-1}, \\ \Delta w_j + k \dfrac{\partial \theta}{\partial z} = -w_{j-1}, \end{array}\right\} j = 1, 2, \ldots \end{array}\right\} \text{in } \tau,$$

[1]) Wir könnten auch ebenso leicht das allgemeinere Problem behandeln, in dem statt U, $\varphi^2 U$ steht, ... und φ^2 eine überall von null verschiedene, positive Funktion der Stelle des Innenraumes ist, die nur einer ähnlichen Bedingung 21) wie die f_j genügt.

[2]) Diese Ber. B. 36, S. 37.

während an ω stets:

$$\text{25)} \qquad \left.\begin{cases} u_j = 0, \\ v_j = 0, \\ w_j = 0. \end{cases}\right\} j = 0, 1, 2 \ldots$$

Können wir zeigen, daß:

$$\lim_{j=\infty} (\lambda^2)^j u_j = 0$$

und daß die Reihen:

$$\sum_0^\infty {}_j (\lambda^2)^j u_j,$$

$$\sum_0^\infty {}_j (\lambda^2)^j v_j,$$

$$\sum_0^\infty {}_j (\lambda^2)^j w_j$$

mit ihren ersten Ableitungen eindeutige und stetige Funktionen der Stelle des Innenraumes vorstellen, dann werden diese Reihen die Lösungen der gestellten Aufgabe repräsentieren. Bevor wir zu diesen Konvergenzbetrachtungen übergehen, wollen wir einige Eigenschaften der aufeinander folgenden Funktionen $u_j\, v_j\, w_j$ kennen lernen.

§ 3.

Wir wollen voraussetzen, es bestehen zwischen den $p+1$ Funktionentripeln

$$u_j\, v_j\, w_j \qquad (j = 0, 1, \ldots p)$$

die Relationen:

$$\text{26)} \qquad \begin{aligned} &\sum_0^p {}_j \beta_j u_j = 0, \\ &\sum_0^p {}_j \beta_j v_j = 0, \\ &\sum_0^p {}_j \beta_j w_j = 0. \end{aligned}$$

wo die β_j reelle, den Gleichungen:

$$27)\qquad \beta_0^2 + \beta_1^2 + \cdots + \beta_p^2 = 1$$

genügende Konstanten vorstellen, und wo p eine endliche Zahl ist. Wir wollen zusehen, zu welchen Konsequenzen dies für die drei Funktionen $f_1\, f_2\, f_3$ führen muß. Wir werden zunächst zeigen, daß man aus 26) stets drei Relationen von der Form

$$28)\qquad \begin{cases} \sum_0^{p-1}{}_j\, \gamma_j\, u_j = 0, \\ \sum_0^{p-1}{}_j\, \gamma_j\, v_j = 0, \\ \sum_0^{p-1}{}_j\, \gamma_j\, w_j = 0 \end{cases}$$

ableiten kann, wo die γ_j $(j = 0, 1, \ldots p-1)$ reelle, den Gleichungen:

$$29)\qquad \gamma_0^2 + \gamma_1^2 + \cdots + \gamma_{p-1}^2 = 1$$

genügende Konstanten vorstellen, in folgenden drei Fällen:

1. Wenn die Gleichung:

$$30)\qquad \beta_0\, x^p + \beta_1\, x^{p-1} + \cdots + \beta_p = 0$$

eine komplexe Wurzel:

$$x_1 + i\, x_2 \qquad (x_2 \neq 0)$$

besitzt:

2. wenn diese Gleichung eine reelle, negative Wurzel besitzt;

3. wenn diese Gleichung eine positive Doppelwurzel hat.

In der Tat berechnen wir die $p + 2$ Konstanten

$$\gamma_0\, \gamma_1 \ldots \gamma_{p-1}\, x\, a$$

so, daß:

$$31) \quad \begin{cases} a\gamma_0 = \beta_0, \\ a\gamma_1 = \beta_1 + a x \gamma_0, \\ a\gamma_2 = \beta_2 + a x \gamma_1, \\ - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \qquad\qquad a \neq 0, \\ a\gamma_{p-1} = \beta_{p-1} + a x \gamma_{p-2}, \\ 0 = \beta_p + a x \gamma_{p-1}, \\ \gamma_0^2 + \gamma_1^2 + \cdots \gamma_{p-1}^2 = 1, \end{cases}$$

was auf p Weisen möglich ist, entsprechend den p Wurzeln der Gleichung 30), so folgt aus 26):

$$32\,a) \quad \begin{cases} \gamma_0 u_0 + \gamma_1 u_1 + \cdots + \gamma_{p-1} u_{p-1} = x(\gamma_0 u_1 + \gamma_1 u_2 \\ \qquad + \cdots + \gamma_{p-1} u_p), \\ \gamma_0 v_0 + \gamma_1 v_1 + \cdots + \gamma_{p-1} v_{p-1} = x(\gamma_0 v_1 + \gamma_1 v_2 \\ \qquad + \cdots + \gamma_{p-1} v_p), \\ \gamma_0 w_0 + \gamma_1 w_1 + \cdots + \gamma_{p-1} w_{p-1} = x(\gamma_0 w_1 + \gamma_1 w_2 \\ \qquad + \cdots + \gamma_{p-1} w_p) \end{cases}$$

oder:

$$32\,b) \quad \begin{cases} \Delta(\gamma_0 u_1 + \gamma_1 u_2 + \cdots + \gamma_{p-1} u_p) + k \frac{\partial}{\partial x}(\gamma_0 \theta_1 + \gamma_1 \theta_2 \\ + \cdots + \gamma_{p-1}\theta_p) = -x(\gamma_0 u_1 + \gamma_1 u_2 + \cdots + \gamma_{p-1} u_p), \\ \Delta(\gamma_0 v_1 + \gamma_1 v_2 + \cdots + \gamma_{p-1} v_p) + k \frac{\partial}{\partial y}(\gamma_0 \theta_1 + \gamma_1 \theta_2 \\ + \cdots + \gamma_{p-1}\theta_p) = -x(\gamma_0 v_1 + \gamma_1 v_2 + \cdots + \gamma_{p-1} v_p), \\ \Delta(\gamma_0 w_1 + \gamma_1 w_2 + \cdots + \gamma_{p-1} w_p) + k \frac{\partial}{\partial z}(\gamma_0 \theta_1 + \gamma_1 \theta_2 \\ + \cdots + \gamma_{p-1}\theta_p) = -x(\gamma_0 w_1 + \gamma_1 w_2 + \cdots + \gamma_{p-1} w_p). \end{cases}$$

Hat die Gleichung 30) eine komplexe Wurzel

$$x_1 + i x_2 \qquad (x_2 \neq 0),$$

und setzen wir:

$$33) \quad \begin{cases} \gamma_0 u_1 + \gamma_1 u_2 + \cdots + \gamma_{p-1} u_p = X + i\Xi, \\ \gamma_0 v_1 + \gamma_1 v_2 + \cdots + \gamma_{p-1} v_p = Y + i\Pi, \\ \gamma_0 w_1 + \gamma_1 w_2 + \cdots + \gamma_{p-1} w_p = Z + iZ, \end{cases}$$

so folgt, wenn wir die Gleichung 32 b) bezw. mit

$$X - i\,\Xi, \quad Y - i\,H, \quad Z - i\,Z$$

multiplizieren, addieren und über den Innenraum integrieren:

$$34)\quad \left\{\begin{aligned}
&-\int_i \Big[\frac{\partial(X - i\,\Xi)}{\partial x}\frac{\partial(X + i\,\Xi)}{\partial x} + \frac{\partial(X - i\,\Xi)}{\partial y}\frac{\partial(X + i\,\Xi)}{\partial y} \\
&\quad + \frac{\partial(X - i\,\Xi)}{\partial z}\frac{\partial(X + i\,\Xi)}{\partial z} + \frac{\partial(Y - i\,H)}{\partial x}\frac{\partial(Y + i\,H)}{\partial x} \\
&\quad + \frac{\partial(Y - i\,H)}{\partial y}\frac{\partial(Y + i\,H)}{\partial y} + \frac{\partial(Y - i\,H)}{\partial z}\frac{\partial(Y + i\,H)}{\partial z} \\
&\quad + \frac{\partial(Z - i\,Z)}{\partial x}\frac{\partial(Z + i\,Z)}{\partial x} + \frac{\partial(Z - i\,Z)}{\partial y}\frac{\partial(Z + i\,Z)}{\partial y} \\
&\qquad + \frac{\partial(Z - i\,Z)}{\partial z}\frac{\partial(Z + i\,Z)}{\partial z} + k\Big\{\frac{\partial}{\partial x}(X + i\,\Xi) \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial y}(Y + i\,H) + \frac{\partial}{\partial z}(Z + i\,Z)\Big\}\Big\{\frac{\partial}{\partial x}(X - i\,\Xi) \\
&\qquad\quad + \frac{\partial}{\partial y}(Y - i\,H) + \frac{\partial}{\partial z}(Z - i\,Z)\Big\}\Big]\,d\tau \\
&= -(x_1 + i\,x_2)\int_i (X^2 + Y^2 + Z^2 + \Xi^2 + H^2 + Z^2)\,d\tau,
\end{aligned}\right.$$

somit, falls $x_2 \neq 0$, da die linke Seite reell ist:

$$\int_i (X^2 + Y^2 + Z^2 + \Xi^2 + H^2 + Z^2)^2\,d\tau = 0,$$
$$X = Y = Z = \Xi = H = Z = 0,$$

oder:

$$35)\quad \left\{\begin{aligned}
&\gamma_0 u_1 + \gamma_1 u_2 + \cdots + \gamma_{p-1} u_p = 0; \quad \gamma_0 v_1 + \gamma_1 v_2 \\
&+ \cdots + \gamma_{p-1} v_p = 0; \quad \gamma_0 w_1 + \gamma_1 w_2 + \cdots + \gamma_{p-1} w_p = 0
\end{aligned}\right.$$

und hieraus durch die Operationen

$$\Delta + k\frac{\partial\theta}{\partial x}, \quad \Delta + k\frac{\partial\theta}{\partial y}, \quad \Delta + k\frac{\partial\theta}{\partial z}$$

die Gleichungen:

$$36)\quad \left\{\begin{aligned}
&\gamma_0 u_0 + \gamma_1 u_1 + \cdots + \gamma_{p-1} u_{p-1} = 0; \quad \gamma_0 v_0 + \gamma_1 v_1 \\
&+ \cdots + \gamma_{p-1} v_{p-1} = 0; \quad \gamma_0 w_0 + \gamma_1 w_1 + \cdots + \gamma_{p-1} w_{p-1} = 0.
\end{aligned}\right.$$

Hat die Gleichung 30) eine reelle, negative Wurzel

$$x = -x_0^2,$$

so folgt aus 34):

$$-\int_i \left[\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial X}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial z}\right)^2\right] d\tau$$

$$-k\int_i \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right)^2 d\tau$$

$$= x_0^2 \int_i (X^2 + Y^2 + Z^2)\, d\tau,$$

und hieraus wieder: 35) und 36), da links eine Summe von lauter negativen Gliedern steht.

Hat schließlich die Gleichung 30 b) eine positive Doppelwurzel

$$x = \bar{x}, \tag{37}$$

so können wir die p Konstanten

$$\delta_0\, \delta_1 \ldots \delta_{p-2}\, b$$

so bestimmen, daß sie zusammen mit $\bar{x}$ die Gleichungen erfüllen:

$$\left\{\begin{array}{l} b\,\delta_0 = \gamma_0, \\ b\,\delta_1 = \gamma_1 + b\,\delta_0 \bar{x}, \\ b\,\delta_2 = \gamma_2 + b\,\delta_1 \bar{x}, \\ - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ b\,\delta_{p-2} = \gamma_{p-2} + b\,\delta_{p-3}\bar{x}, \\ 0 = \gamma_{p-1} + b\,\delta_{p-2}\bar{x}, \\ \delta_0^2 + \delta_1^2 + \cdots + \delta_{p-2}^2 = 1, \end{array}\right. \qquad b \neq 0 \tag{38}$$

und wir können die Gleichungen 32 a) in der Form schreiben:

$$\left\{\begin{array}{l} F - 2\bar{x} F_1 + \bar{x}^2 F_2 = 0, \\ G - 2\bar{x} G_1 + \bar{x}^2 G_2 = 0, \\ H - 2\bar{x} H_1 + \bar{x}^2 H_2 = 0 \end{array}\right. \tag{39}$$

$$40)\quad \begin{cases} F = \delta_0 u_0 + \delta_1 u_1 + \cdots + \delta_{p-2} u_{p-2}, \\ F_1 = \delta_0 u_1 + \delta_1 u_2 + \cdots + \delta_{p-2} u_{p-1}, \\ F_2 = \delta_0 u_2 + \delta_1 u_3 + \cdots + \delta_{p-2} u_p; \\ G = \delta_0 v_0 + \delta_1 v_1 + \cdots + \delta_{p-2} v_{p-2}, \\ G_1 = \delta_0 v_1 + \delta_1 v_2 + \cdots + \delta_{p-2} v_{p-1}, \\ G_2 = \delta_0 v_2 + \delta_1 v_3 + \cdots + \delta_{p-2} v_p; \\ H = \delta_0 w_0 + \delta_1 w_1 + \cdots + \delta_{p-1} w_{p-2}, \\ H_1 = \delta_0 w_1 + \delta_1 w_2 + \cdots + \delta_{p-2} w_{p-1}, \\ H_2 = \delta_0 w_2 + \delta_1 w_3 + \cdots + \delta_{p-2} w_p. \end{cases}$$

Es folgt aus 39) und 40):

$$\varDelta F + k \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z}\right) + 2\bar{x} F - \bar{x}^2 F_1 = 0,$$

$$\varDelta G + k \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z}\right) + 2\bar{x} G - \bar{x}^2 G_1 = 0,$$

$$\varDelta H + k \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z}\right) + 2\bar{x} H - \bar{x}^2 H_1 = 0.$$

Diese Gleichungen multiplizieren wir bezw. mit

$$(-F_1), \quad (-G_1), \quad (-H_1),$$

addieren und integrieren über den Innenraum, dann ergibt sich:

$$\int_i \{F^2 + G^2 + H^2 - 2\bar{x}(FF_1 + GG_1 + HH_1) + \bar{x}^2(F_1^2 + G_1^2 + H_1^2)\}\, d\tau = 0,$$

und hieraus:

$$41)\quad \begin{cases} F - \bar{x} F_1 = 0, \\ G - \bar{x} G_1 = 0, \\ H - \bar{x} H_1 = 0, \end{cases}$$

das sind Gleichungen von der Form:

$$\gamma_0 u_0 + \gamma_1 u_1 + \cdots + \gamma_{p-1} u_{p-1} = 0,$$
$$\gamma_0 v_0 + \gamma_1 v_1 + \cdots + \gamma_{p-1} v_{p-1} = 0,$$
$$\gamma_0 w_0 + \gamma_1 w_1 + \cdots + \gamma_{p-1} w_{p-1} = 0.$$

Wir sind damit zu dem Resultate gelangt, daß man Gleichungen von der Form:

$$\beta_0 u_0 + \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_p u_p = 0,$$
$$\beta_0 v_0 + \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_p v_p = 0,$$
$$\beta_0 w_0 + \beta_1 w_1 + \cdots + \beta_r w_p = 0$$

stets auf Gleichungen:

$$42)\quad \begin{cases} \gamma_0 u_0 + \gamma_1 u_1 + \cdots + \gamma_m u_m = 0, \\ \gamma_0 v_0 + \gamma_1 v_1 + \cdots + \gamma_m v_m = 0, \\ \gamma_0 w_0 + \gamma_1 w_1 + \cdots + \gamma_m w_m = 0 \end{cases}$$

reduzieren kann, in denen die

$$\gamma_0 \gamma_1 \cdots \gamma_m$$

reelle, der Relation:

$$43)\quad \gamma_0^2 + \gamma_1^2 + \cdots + \gamma_m^2 = 1$$

genügende Konstanten vorstellen und so beschaffen sind, daß die Gleichung:

$$44)\quad \gamma_0 x^m + \gamma_1 x^{m-1} + \cdots + \gamma_m = 0$$

m positive, einfache Wurzeln besitzt.

Bezeichnen wir mit $x_1 x_2 \ldots x_m$ diese m Wurzeln, so ist, da eine Doppelwurzel nicht existiert, die Determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_m \\ x_1^2 & x_2^2 & \ldots & x_m^2 \\ - & - & - & - \\ x_1^{m-1} & x_2^{m-1} & \ldots & x_m^{m-1} \end{vmatrix} \neq 0,$$

und wir können somit mit Hilfe der Gleichungen:

$$45)\quad \begin{cases} u_0 = U_1 + U_2 + \cdots + U_m, \ldots{}^{1)} \\ u_1 = x_1^{-1} U_1 + x_2^{-1} U_2 + \cdots + x_m^{-1} U_m, \ldots \\ u_2 = x_1^{-2} U_1 + x_2^{-2} U_2 + \cdots + x_m^{-2} U_m, \ldots \\ - - - - - - - - - - - - \\ u_{m-1} = x_1^{-(m-1)} U_1 + x_2^{-(m-1)} U_2 + \cdots + x_m^{-(m-1)} U_m, \ldots \end{cases}$$

[1]) Je zwei analoge Gleichungen, in denen überall u durch v bezw. w und U durch V bezw. W zu ersetzen ist.

die Funktionen

$$\begin{array}{llll} U_1\, U_2 \ldots U_m & \text{linear durch die} & u_0\, u_1 \ldots u_{m-1}, \\ V_1\, V_2 \ldots V_m & \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} & v_0\, v_1 \ldots v_{m-1}, \\ W_1\, W_2 \ldots W_m & \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} & w_0\, w_1 \ldots w_{m-1} \end{array}$$

definieren. Aus 45) und 42) folgt nun, da $x_1\, x_2 \ldots x_m$ die Gleichung 44) erfüllen, auch:

$$u_m = x_1^{-m}\, U_1 + x_2^{-m}\, U_2 + \cdots + x_m^{-m}\, U_m, \ldots,^{1})$$

so daß wir die

$$U_j\, V_j\, W_j \qquad (j = 1, 2 \ldots m)$$

anstatt durch die Gleichungen 45) auch durch die folgenden Gleichungen definieren können:

$$46) \quad u_j = x_1^{-j}\, U_1 + x_2^{-j}\, U_2 + \cdots + x_m^{-j}\, U_m, \ldots^{1}) \quad (j = 1, 2 \ldots m).$$

Nun folgt aus 46) und 24):

$$47) \quad \begin{aligned} - u_{j-1} = x_1^{-j} \left(\Delta\, U_1 + k \frac{\partial\, \Theta_1}{\partial\, x} \right) + x_2^{-j} \left(\Delta\, U_2 + k \frac{\partial\, \Theta_2}{\partial\, x} \right) \\ + \cdots + x_m^{-j} \left(\Delta\, U_m + k \frac{\partial\, \Theta_m}{\partial\, x} \right), \ldots \qquad (j = 1, 2 \ldots m). \end{aligned}$$

und da wir die Gleichungen 45) auch so schreiben können:

$$48) \quad u_{j-1} = x_1^{-(j-1)}\, U_1 + x_2^{-(j-1)}\, U_2 + \cdots x_m^{-(j-1)}\, U_m, \ldots \quad (j = 1, 2 \ldots m)$$

auch:

$$49) \quad \left\{ \begin{aligned} 0 = x_1^{-(j-1)} \left\{ \Delta\, U_1 + k \frac{\partial\, \Theta_1}{\partial\, x} + x_1\, U_1 \right\} \\ + x_2^{-(j-1)} \left\{ \Delta\, U_2 + k \frac{\partial\, \Theta_2}{\partial\, x} + x_2\, U_2 \right\} + \cdots \\ + x_m^{-(j-1)} \left\{ \Delta\, U_m + k \frac{\partial\, \Theta_m}{\partial\, x} + x_m\, U_m \right\}, \ldots \end{aligned} \right\} j = 1, 2 \ldots m.$$

Das sind dreimal m lineare und homogene Gleichungen für die m Größen:

---

[1]) Je zwei analoge Gleichungen, in denen überall u durch v bezw. w und U durch V bezw. W zu ersetzen ist.

$$\left.\begin{array}{l} \Delta U_j + k \dfrac{\partial \Theta_j}{\partial x} + x_j U_j, \\ \text{bezw.} \quad \Delta V_j + k \dfrac{\partial \Theta_j}{\partial y} + x_j V_j, \\ \Delta W_j + k \dfrac{\partial \Theta_j}{\partial z} + x_j W_j, \end{array}\right\} j = 1, 2 \ldots m,$$

es folgt somit, da die Determinante dieser Gleichungen $\neq 0$ ist, einzeln:

$$50) \quad \left\{\begin{array}{l} \Delta U_j + k \dfrac{\partial \Theta_j}{\partial x} = - x_j U_j, \\ \Delta V_j + k \dfrac{\partial \Theta_j}{\partial y} = - x_j V_j, \qquad j = 1, 2 \ldots m. \\ \Delta W_j + k \dfrac{\partial \Theta_j}{\partial z} = - x_j W_j, \end{array}\right.$$

Die erste Gleichung 45) lehrt uns somit: Es ist bei unserer Voraussetzung:

$$51) \quad \left\{\begin{array}{l} u_0 = U_1 + U_2 + \cdots + U_m, \\ v_0 = V_1 + V_2 + \cdots + V_m, \\ w_0 = W_1 + W_2 + \cdots + W_m, \end{array}\right.$$

wo die U_j V_j W_j linear durch die u_j v_j w_j ausdrückbare Funktionen des Innenraumes von w sind, welche in demselben den Differentialgleichungen genügen:

$$\begin{array}{l} \Delta U_j + k \dfrac{\partial \Theta_j}{\partial x} = - x_j U_j, \\ \Delta V_j + k \dfrac{\partial \Theta_j}{\partial y} = - x_j V_j, \qquad j = 1, 2 \ldots m. \\ \Delta W_j + k \dfrac{\partial \Theta_j}{\partial z} = - x_j W_j. \end{array}$$

Dabei sind die x_j positive Zahlen, welche der Gleichung:

$$\beta_0 x^p + \beta_1 x^{p-1} + \cdots + \beta_p = 0$$

genügen.

Wir sprechen das Resultat folgendermaßen aus:

I. Bestehen zwischen den successive durch die Gleichungen 24) und 25) definierten Funktionen $u_j v_j w_j$ Relationen von der Form:

$$\beta_0 u_0 + \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_p u_p = 0,$$
$$\beta_0 v_0 + \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_p v_p = 0,$$
$$\beta_0 w_0 + \beta_1 w_1 + \cdots + \beta_p w_p = 0,$$

wo p eine endliche Zahl, $\beta_0\ \beta_1 \ldots \beta_p$ reelle, der Gleichung:

$$\beta_0^2 + \beta_1^2 + \cdots + \beta_p^2 = 1$$

genügende Konstanten vorstellen, so kann man $u_0 v_0 w_0$ in der Form darstellen:

$$u_0 = U_1 + U_2 + \cdots + U_m, \quad (m \leq p)$$
$$v_0 = V_1 + V_2 + \cdots + V_m,$$
$$w_0 = W_1 + W_1 + \cdots + W_m,$$

wo die $U_j V_j W_j$ linear durch die $u_j v_j w_j$ resp. ausdrückbare, mit ihren ersten Ableitungen eindeutige und stetige Funktionen der Stelle des Innenraumes von ω sind, die in demselben den Differentialgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \Delta U_j + k\frac{\partial \Theta_j}{\partial x} &= -\varkappa_i U_j, \\ \Delta V + k\frac{\partial \Theta_j}{\partial y} &= -\varkappa_j V_j, \\ \Delta W_j + k\frac{\partial \Theta_j}{\partial z} &= -\varkappa_j W_j \end{aligned}\right\} j = 1, 2 \ldots m$$

und an der Oberfläche den Bedingungen:

$$\left.\begin{aligned} U_j &= 0, \\ V_j &= 0, \\ W_j &= 0, \end{aligned}\right\} j = 1, 2 \ldots m$$

genügen; dabei sind die x_j positive Wurzeln der Gleichung:

$$\beta_0 x^p + \beta_1 x^{p-1} + \cdots + \beta_p = 0.$$

Die Funktionen $f_1 f_2 f_3$ sind in der Form darstellbar:

$$52)\quad \begin{cases} f_1 = -x_1 U_1 - x_2 U_2 - \cdots - x_m U_m, \\ f_2 = -x_1 V_1 - x_2 V_2 - \cdots - x_m V_m, \\ f_3 = -x_1 W_1 - x_2 W_2 - \cdots - x_m W_m. \end{cases}$$

Die letzte Behauptung folgt unmittelbar aus 51) und 50).

Setzen wir bei der Voraussetzung des Satzes I

$$53)\quad \begin{cases} U = a_1 U_1 + a_2 U_2 + \cdots + a_m U_m, \\ V = a_1 V_1 + a_2 V_2 + \cdots + a_m V_m. \\ W = a_1 W_1 + a_2 W_2 + \cdots + a_m W_m, \end{cases}$$

so genügen diese Funktionen den Differentialgleichungen:

$$54)\quad \begin{cases} \Delta U + k \dfrac{\partial \Theta}{\partial z} + \lambda^2 U = -f_1, \\ \Delta V + k \dfrac{\partial \Theta}{\partial y} + \lambda^2 V = -f_2, \\ \Delta W + k \dfrac{\partial \Theta}{\partial z} + \lambda^2 W = -f_3, \end{cases}$$

wenn:

$$55)\quad a_j = -\frac{x_j}{\lambda^2 - x_j},$$

bei der Voraussetzung:

$$\lambda^2 \neq x_j.$$

Die Lösungen 53) unseres Hauptproblems haben somit, als Funktionen von λ^2 betrachtet, einfache Pole an den Stellen:

$$\lambda^2 = x_j \qquad (j = 1, 2 \ldots m).$$

Fragen wir, kann es noch ein anderes Lösungssystem $U' V' W'$ der Aufgabe geben, so bemerken wir, daß in dem Falle der Existenz eines zweiten Lösungssystems $U' V' W'$:

$$
56) \quad \begin{cases} \Delta(U' - U) + k \dfrac{\partial(\Theta' - \Theta)}{\partial x} = -\lambda^2 (U' - U), \\ \Delta(V' - V) + k \dfrac{\partial(\Theta' - \Theta)}{\partial y} = -\lambda^2 (V' - V), \\ \Delta(W' - W) + k \dfrac{\partial(\Theta' - \Theta)}{\partial z} = -\lambda^2 (W' - W) \end{cases}
$$

sein müßte: nur um solche Funktionen $U' - U$, $V' - V$, $W' - W$, die im Innenraume den Gleichungen 56) genügen und an der Oberfläche verschwinden, können sich $U\,V\,W$ und $U'\,V'\,W'$ unterscheiden.

§ 4.

Wir betrachten jetzt den Fall, daß sich zwischen den successiven Funktionen $u_j\,v_j\,w_j$ keine Relationen von der Form:

$$
\begin{aligned}
\beta_0 u_0 + \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_p u_p &= 0, \\
\beta_0 v_0 + \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_p v_p &= 0, \\
\beta_0 w_0 + \beta_1 w_1 + \cdots + \beta_p w_p &= 0
\end{aligned}
$$

herleiten lassen, wo p eine endliche Zahl ist und $\beta_0 \beta_1 \ldots \beta_p$ reelle, der Gleichung

$$
\beta_0^2 + \beta_1^2 + \cdots + \beta_p^2 = 1
$$

genügende Konstanten vorstellen.

Wir bilden an Stelle der Reihen $u_j\,v_j\,w_j$ die Reihen, welche entstehen, wenn man anstatt von den Funktionen $f_1 f_2 f_3$ von den Funktionen:

$$
\begin{aligned}
&\alpha_0 f_1 + \alpha_1 u_0 + \alpha_2 u_1 + \cdots + \alpha_p u_{p-1}, \\
&\alpha_0 f_2 + \alpha_1 v_0 + \alpha_2 v_1 + \cdots + \alpha_p v_{p-1}, \\
&\alpha_0 f_3 + \alpha_1 w_0 + \alpha_2 w_1 + \cdots + \alpha_p w_{p-1}
\end{aligned}
$$

ausgeht, wo die

$$
\alpha_0\, \alpha_1 \ldots \alpha_p
$$

$p + 1$ reelle Konstanten sein sollen, die der Gleichung:

$$
\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \cdots + \alpha_p^2 = 1
$$

genügen, und über die wir uns noch weitere Bestimmungen vorbehalten.

Wir bilden also successive die Funktionentripel $\pi_j\,\chi_j\,\varrho_j$, welche in τ den Differentialgleichungen genügen:

$$
57)\quad \begin{cases}
\Delta\pi_0 + k\dfrac{\partial\sigma_0}{\partial x} = -(a_0 f_1 + a_1 u_0 + \cdots + a_p u_{p-1}),\\
\Delta\chi_0 + k\dfrac{\partial\sigma_0}{\partial y} = -(a_0 f_2 + a_1 v_0 + \cdots + a_p v_{p-1}),\\
\Delta\varrho_0 + k\dfrac{\partial\sigma_0}{\partial z} = -(a_0 f_3 + a_1 w_0 + \cdots + a_p w_{p-1}),\\
\left.\begin{array}{l}
\Delta\pi_j + k\dfrac{\partial\sigma_j}{\partial x} = -\pi_{j-1},\\
\Delta\chi_j + k\dfrac{\partial\sigma_j}{\partial y} = -\chi_{j-1},\\
\Delta\varrho_j + k\dfrac{\partial\sigma_j}{\partial z} = -\varrho_{j-1},
\end{array}\right\}\; j = 1, 2 \ldots
\end{cases}
\quad \sigma_j = \frac{\partial\pi_j}{\partial x} + \frac{\partial\chi_j}{\partial y} + \frac{\partial\varrho_j}{\partial z},
$$

und an der Fläche ω den Grenzbedingungen:

$$
58)\quad \left.\begin{cases}
\pi_j = 0,\\
\chi_j = 0,\\
\varrho_j = 0,
\end{cases}\right\}\; j = 0, 1, 2 \ldots
$$

Wir wollen zeigen, daß wir bei genügend großem p die Konstanten

$$a_0\, a_1 \ldots a_p$$

so wählen können, daß

$$
59)\quad \left.\begin{cases}
\text{abs. } \lambda^{2j}\,\pi_j < A\cdot L^j,\\
\text{abs. } \lambda^{2j}\,\chi_j < A\cdot L^j,\\
\text{abs. } \lambda^{1j}\,\varrho_j < A\cdot L^j,
\end{cases}\right\}\; \begin{array}{l} A \text{ endliche Konstante,}\\ L \text{ echter Bruch,}\end{array}
$$

wenn λ^2 eine beliebige positive, festgegebene Zahl vorstellt, so daß die Reihen:

$$
60)\quad \begin{cases}
\pi = \pi_0 + \lambda^2\,\pi_1 + \lambda^4\,\pi_2 + \cdots\\
\chi = \chi_0 + \lambda^2\,\chi_1 + \lambda^4\,\chi_2 + \cdots\\
\varrho = \varrho_0 + \lambda^2\,\varrho_1 + \lambda^4\,\varrho_2 + \cdots
\end{cases}
$$

mit ihren ersten Ableitungen eindeutige und stetige Funktionen der Stelle des Innenraumes von ω vorstellen, die in demselben den Differentialgleichungen:

$$61)\quad \begin{cases} \varDelta \pi + k \dfrac{\partial \sigma}{\partial x} = -(a_0 f_1 + a_1 u_0 + \cdots + a_p u_{p-1}), \\ \varDelta \chi + k \dfrac{\partial \sigma}{\partial x} = -(a_0 f_2 + a_1 v_0 + \cdots + a_p v_{p-1}), \\ \varDelta \varrho + k \dfrac{\partial \sigma}{\partial z} = -(a_0 f_3 + a_1 w_0 + \cdots + a_p w_{p-1}) \end{cases}$$

und an der Fläche ω den Grenzbedingungen:

$$62)\quad \begin{cases} \pi = 0, \\ \chi = 0, \\ \varrho = 0 \end{cases}$$

genügen.

Wir betrachten zum Beweise dieser Behauptung den Quotienten:

$$\frac{\int\limits_i (\pi_m^2 + \chi_m^2 + \varrho_m^2)\, d\tau}{\int\limits_i (\pi_{m-1}^2 + \chi_{m-1}^2 + \varrho_{m-1}^2)\, d\tau}, \qquad (m \text{ eine endliche Zahl}),$$

der nach 57):[1])

[1]) Es ist nach 57):

$$\int\limits_i (\pi_{m-1}^2 + \chi_{m-1}^2 + \varrho_{m-1}^2)\, d\tau$$

$$= \int\limits_i \left[\left(\varDelta \pi_m + k \frac{\partial \sigma_m}{\partial x} \right)^2 + \left(\varDelta \chi_m + k \frac{\partial \sigma_m}{\partial y} \right)^2 + \left(\varDelta \varrho_m + k \frac{\partial \sigma_m}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau$$

und:

$$\int\limits_i \left[(1+k)\, \sigma_m^2 + \left(\frac{\partial \varrho_m}{\partial y} - \frac{\partial \chi_m}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \pi_m}{\partial z} - \frac{\partial \varrho_m}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \chi_m}{\partial x} - \frac{\partial \pi_m}{\partial y} \right)^2 \right] d\tau$$

$$< \sqrt{\int\limits_i (\pi_m^2 + \chi_m^2 + \varrho_m^2)\, d\tau \int\limits_i \left[\left(\varDelta \pi_m + k \frac{\partial \sigma_m}{\partial x} \right)^2 + \left(\varDelta \chi_m + k \frac{\partial \sigma_m}{\partial y} \right)^2 + \left(\varDelta \varrho_m + k \frac{\partial \sigma_m}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau},$$

somit:

$$< \left[\frac{\int_i (\pi_m^2 + \chi_m^2 + \varrho_m^2)\, d\tau}{\int_i \left[(1+k)\,\sigma_m^2 + \left(\frac{\partial \varrho_m}{\partial y} - \frac{\partial \chi_m}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial \pi_m}{\partial z} - \frac{\partial \varrho_m}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \chi_m}{\partial x} - \frac{\partial \pi_m}{\partial y}\right)^2 \right] d\tau} \right]^2$$

und

$$< \frac{a^2}{\sqrt[3]{p^4}}$$

wenn wir $a_0\, a_1 \ldots a_p$ in geeigneter Weise wählen, nach dem Hilfssatz auf S. 354, da

$$\begin{aligned}
\pi_m &= a_0\, u_{m-1} + a_1\, u_m + \cdots + a_p\, u_{m+p-1}, \\
\chi_m &= a_0\, v_{m-1} + a_1\, v_m + \cdots + a_p\, v_{m+p-1}, \\
\varrho_m &= a_0\, w_{m-1} + a_1\, w_m + \cdots + a_p\, w_{m+p-1}.
\end{aligned}$$

Das Resultat:

$$\frac{\int_i (\pi_m^2 + \chi_m^2 + \varrho_m^2)\, d\tau}{\int_i (\pi_{m-1}^2 + \chi_{m-1}^2 + \varrho_{m-1}^2)\, d\tau} < \frac{\text{endl. Konst.}}{\sqrt[3]{p^4}} \tag{63}$$

gilt somit für jedes bestimmte, endliche m, bei beliebigem p und geeignet gewählten $a_0\, a_1 \ldots a_p$.

Bedenken wir jetzt, daß:

$$\begin{aligned}
\int_i (\pi_{m-1}^2 + \chi_{m-1}^2 + \varrho_{m-1}^2)\, d\tau &= -\int_i \left[\pi_{m-1} \left(\Delta \pi_m + k \frac{\partial \sigma_m}{\partial x} \right) + \cdots \right] d\tau, \\
&= -\int_i \left[\pi_m \left(\Delta \pi_{m-1} + k \frac{\partial \sigma_{m-1}}{\partial x} \right) + \cdots \right] d\tau, \\
&= -\int_i (\pi_m \pi_{m-2} + \chi_m \chi_{m-2} + \varrho_m \varrho_{m-2})\, d\tau,^{1)}
\end{aligned}$$

$$> \frac{\int_i (\pi_{m-1}^2 + \chi_{m-1}^2 + \varrho_{m-1}^2)\, d\tau}{\dfrac{\left[\int_i \left[(1+k)\,\sigma_m^2 + \left(\frac{\partial \varrho_m}{\partial y} - \frac{\partial \chi_m}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial \pi_m}{\partial z} - \frac{\partial \varrho_m}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \chi_m}{\partial x} - \frac{\partial \pi_m}{\partial y}\right)^2 \right] d\tau\right]^2}{\int_i (\pi_m^2 + \chi_m^2 + \varrho_m^2)\, d\tau}}.$$

[1]) Für $m = 1$ soll

$$\begin{aligned}
\pi_{m-2} &\text{ für } a_0 f_1 + a_1 u_0 + \cdots + a_p u_{p-1}, \\
\chi_{m-2} &\text{ für } a_0 f_2 + a_1 v_0 + \cdots + a_p v_{p-1}, \\
\varrho_{m-2} &\text{ für } a_0 f_3 + a_1 w_0 + \cdots + a_p w_{p-1}
\end{aligned}$$

stehen.

so folgt:

$$\Big[\int_i (\pi_{m-1}^2 + \chi_{m-1}^2 + \varrho_{m-1}^2)\, d\tau\Big]^2$$

$$< \int_i (\pi_m^2 + \chi_m^2 + \varrho_m^2)\, d\tau \int_i (\pi_{m-2}^2 + \chi_{m-2}^2 + \varrho_{m-2}^2)\, d\tau,$$

oder:

$$64)\quad \begin{cases} \dfrac{\int_i (\pi_{m-1}^2 + \chi_{m-1}^2 + \varrho_{m-1}^2)\, d\tau}{\int_i (\pi_{m-2}^2 + \chi_{m-2}^2 + \varrho_{m-2}^2)\, d\tau} < \dfrac{\int_i (\pi_m^2 + \chi_m^2 + \varrho_m^2)\, d\tau}{\int_i (\pi_{m-1}^2 + \chi_{m-1}^2 + \varrho_{m-1}^2)\, d\tau} \\ \qquad < \dfrac{\text{endl. Konst.}}{\sqrt[3]{p^4}}. \end{cases}$$

Infolge dieses Schlusses von m auf $m-1$ ist allgemein für jedes bestimmte, endliche m bei geeignet gewählten $a_0\ a_1\ a_p$:

$$65)\quad \begin{cases} \dfrac{\int_i (\pi_0^2 + \chi_0^2 + \varrho_0^2)\, d\tau}{\int_i \{(a_0 f_1 + a_1 u_0 + \cdots + a_p u_{p-1})^2 + (a_0 f_2 + a_1 v_0 + \cdots + a_p v_{p-1})^2 + (a_0 f_3 + a_1 w_0 + \cdots + a_p w_{p-1})^2\}\, d\tau} \\ < \dfrac{\int_i (\pi_1^2 + \chi_1^2 + \varrho_1^2)\, d\tau}{\int_i (\pi_0^2 + \chi_0^2 + \varrho_0^2)\, d\tau} < \dfrac{\int_i (\pi_2^2 + \chi_2^2 + \varrho_2^2)\, d\tau}{\int_i (\pi_1^2 + \chi_1^2 + \varrho_1^2)\, d\tau} < \cdots < \dfrac{\int_i (\pi_m^2 + \chi_m^2 + \varrho_m^2)\, d\tau}{\int_i (\pi_{m-1}^2 + \chi_{m-1}^2 + \varrho_{m-1}^2)\, d\tau} \\ < \dfrac{\text{endl. Konst.}}{\sqrt[3]{p^4}}. \end{cases}$$

Man kann dieses Resultat aber auch für unendlich wachsende m beweisen, nach der bekannten, von Poincaré gefundenen Schlußweise: Man betrachte die für ein beliebiges endliches m unseren Voraussetzungen genügenden

$$a_0^{(m)}\ a_1^{(m)}\ \ldots\ a_p^{(m)}\,[1]$$

als Koordinaten von Punkten der Kugelfläche:

$$66)\qquad a_0^2 + a_1^2 + \cdots + a_p^2 = 1$$

in einem $p+1$ dimensionalen Raume, dann wird für die

[1]) Ich füge die Indices (m) zur genaueren Bezeichnung hinzu.

$$a_0^{(m)}\ a_1^{(m)} \ldots a_p^{(m)}$$

eines gewissen Gebietes δ_m der Kugelfläche die Bedingung 65) erfüllt sein. Wir können in gleicher Weise, bei geeignet gewählten

$$a_0^{(m+1)}\ a_1^{(m+1)} \ldots a_p^{(m+1)}$$

erreichen, daß:

$$67)\ \begin{cases} \dfrac{\int\limits_i (\pi_0^2 + \chi_0^2 + \varrho_0^2)\, d\tau}{\int\limits_i \{(a_0 f_1 + a_1 u_0 + \cdots + a_p u_{p-1})^2 + (a_0 f_2 + a_1 v_0 + \cdots + a_p v_{p-1})^2 + (a_0 f_3 + a_1 w_0 + \cdots + a_p w_{p-1})^2\}\, d\tau} \\ < \dfrac{\int\limits_i (\pi_1^2 + \chi_1^2 + \varrho_1^2)\, d\tau}{\int\limits_i (\pi_0^2 + \chi_0^2 + \varrho_0^2)\, d\tau} < \dfrac{\int\limits_i (\pi_2^2 + \chi_2^2 + \varrho_2^2)\, d\tau}{\int\limits_i (\pi_1^2 + \chi_1^2 + \varrho_1^2)\, d\tau} < \cdots < \dfrac{\int\limits_i (\pi_{m+1}^2 + \chi_{m+1}^2 + \varrho_{m+1}^2)\, d\tau}{\int\limits_i (\pi_m^2 + \chi_m^2 + \varrho_m^2)\, d\tau} \\ < \dfrac{\text{endl. Konst.}}{\sqrt[3]{p^4}}, \end{cases}$$

wo die endliche Konstante rechts von m und p ganz unabhängig ist. Die Punkte

$$a_0^{(m+1)}\ a_1^{(m+1)} \ldots a_p^{(m+1)},$$

welche der Bedingung 67) genügen, werden einem Gebiete δ_{m+1} der Kugelfläche 66) angehören, welches ganz in dem Gebiete δ_m enthalten ist, da die Bedingungen 65) eine Folge von 67) sind; in dieser Weise fortgehend sieht man, daß das entsprechende Gebiet δ_{m+2} ganz in dem Gebiete δ_{m+1}, δ_{m+3} ganz in dem Gebiete δ_{m+2} enthalten ist, und so fort; daraus folgt, daß ein Wertsystem:

$$a_0\ a_1 \ldots a_p$$

existiert, für welches die Ungleichungen 67) auch bei unendlich wachsendem m erfüllt sind, und es ergibt sich:

$$68)\qquad \int\limits_i (\pi_j^2 + \chi_j^2 + \varrho_j^2)\, d\tau < B \cdot L_p^{2j},$$

wenn wir

$$69)\qquad L_p = \frac{\text{endl. Konst.}}{\sqrt[3]{p^2}}$$

setzen und unter B eine endliche Konstante verstehen, die von j ganz unabhängig ist.

Wir folgern aus 68) auch

$$\int_\tau F_j^2 \, d\tau \overline{<} \text{endl. Konst. } L_p^{2j}$$

(man vgl. die letzte Formel Anm. S. 371), wenn man unter F_j eine der vier Funktionen

$$\sigma_j = \frac{\partial \pi_j}{\partial x} + \frac{\partial \chi_j}{\partial y} + \frac{\partial \varrho_j}{\partial z}, \quad \frac{\partial \varrho_j}{\partial y} - \frac{\partial \chi_j}{\partial z}, \quad \frac{\partial \pi_j}{\partial z} - \frac{\partial \varrho_j}{\partial x}, \quad \frac{\partial \chi_j}{\partial x} - \frac{\partial \pi_j}{\partial y}$$

versteht; denken wir uns um einen Punkt $(x\, y\, z)$ innerhalb ω eine Kugel vom Radius R, der nur klein genug gewählt ist, daß die Kugel ganz in dem Gebiete τ liegt, so ist:

$$F_j = -\frac{1}{4\pi} \int \left[\frac{\Delta F_j}{r} - \frac{\Delta F_j}{R} \right] d\tau + \frac{1}{4\pi R^2} \int F_j \, d\omega,$$

wo die Integrale rechts über die Kugel bezw. Kugelfläche zu erstrecken sind, somit:

$$\frac{4\pi}{3} R^3 F_j = \int F_j \, d\tau - \int_0^R R^2 \int_{(R)} \left[\frac{\Delta F_j}{r} - \frac{\Delta F_j}{R} \right] d\tau \, dR,$$

$$\frac{4\pi}{3} R^3 |F_j| \overline{<} \text{endl. Zahl} \cdot \sqrt{\int F_j^2 \, d\tau \cdot R^3}$$

$$+ \int_0^R \text{endl. Zahl } R^2 \sqrt{R \cdot \int \Delta F_j^2 \, d\tau} \, dR,$$

$$\overline{<} (\text{endl. Zahl} \cdot R^{\frac{3}{2}} + \text{endl. Zahl} \cdot R^{\frac{7}{2}}) \, L_p^j,$$

also:

$$|F_j| < \text{endl. Konst. } \frac{L_p^j}{\mathfrak{r}^{\frac{3}{2}}},$$

wenn $\mathfrak{r}$ die kleinste Entfernung des Punktes $(x\, y\, z)$ von ω ist. Ferner ist wegen der Formeln:

$$u_j = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_\tau \theta_j \frac{d\tau}{r} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_\tau \mathfrak{w}_j \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_\tau \mathfrak{v}_j \frac{d\tau}{r}, \ldots$$

in dem Punkte $(x\, y\, z)$:

$$\text{abs. Max. } (\pi_j \chi_j \varrho_j) \overline{<} \text{ abs. Max. } F_j + \text{endl. Konst. } \frac{L_p^j}{\sqrt{\mathfrak{r}}},$$

somit, wenn wir mit C_j den absolut größten Wert von $\pi_j \chi_j \varrho_j \sigma_j$ in $(x\, y\, z)$ bezeichnen:

$$C_j \overline{<} \text{ endl. Konst. } \frac{L_p^j}{\mathfrak{r}^{\frac{3}{2}}}.$$

Andererseits ist nach den Untersuchungen meiner ersten Abhandlung zur Elastizitätstheorie:

abs. $|\sigma_j|_1^2 \overline{<}$ endl. Konst. $C_{j-1}\, r_{12}^{\lambda}$, (vgl. diese Ber. 36, S. 80, 1906), somit

$$C_j \overline{<} \text{ endl. Konst. } C_{j-1}\, \mathfrak{r}^{\lambda} + \text{endl. Konst. } \frac{L_p^j}{\mathfrak{r}^{\frac{3}{2}}},$$

wobei man für $\mathfrak{r}$ eine beliebig kleine Länge einsetzen kann, hieraus in bekannter Weise, daß C_j, somit auch

70) $$\text{abs. Max. } (\pi_j \chi_j \varrho_j\, D_1 \pi_j\, D_1 \chi_j\, D_1 \varrho_j) \overline{<} A \cdot L_p^j,$$

wo A eine endliche, von j unabhängige Konstante, L_p eine Zahl vorstellt, die durch Vergrößerung von p beliebig klein gemacht werden kann.

Ist nun λ^2 eine beliebige, positive, fest gegebene Zahl, so können wir dadurch, daß wir

$$L_p \overline{<} \frac{L}{\lambda^2}$$

machen (L irgend ein echter Bruch), erreichen, daß

71) $$\text{abs. Max. } [\lambda^{2j}\pi_j, \lambda^{2j}\chi_j, \lambda^{2j}\varrho_j, \lambda^{2j}D_1\pi_j, \lambda^{2j}D_1\chi_j, \lambda^{2j}D_1\varrho_j] \overline{<} A \cdot L_j$$

wird, und es wird dann tatsächlich in den Reihen:

72) $$\begin{cases} \pi = \pi_0 + \lambda^2 \pi_1 + \lambda^4 \pi_2 + \cdots, \\ \chi = \chi_0 + \lambda^2 \chi_1 + \lambda^4 \chi_2 + \cdots, \\ \varrho = \varrho_0 + \lambda^2 \varrho_1 + \lambda^4 \varrho_2 + \cdots \end{cases}$$

ein mit seinen ersten Ableitungen in τ eindeutiges und stetiges Funktionentripel gegeben, das im Innenraume den Differentialgleichungen:

$$73)\quad \begin{cases} \Delta\pi + k\dfrac{\partial\sigma}{\partial x} = -(a_0 f_1 + a_1 u_0 + a_2 u_1 + \cdots + a_p u_{p-1}), \\ \Delta\chi + k\dfrac{\partial\sigma}{\partial y} = -(a_0 f_2 + a_1 v_0 + a_2 v_1 + \cdots + a_p v_{p-1}), \\ \Delta\varrho + k\dfrac{\partial\sigma}{\partial z} = -(a_0 f_3 + a_1 w_0 + a_2 w_1 + \cdots + a_p w_{p-1}) \end{cases}$$

und an der Oberfläche ω den Grenzbedingungen:

$$74)\quad \begin{cases} \pi = 0, \\ \chi = 0, \\ \varrho = 0 \end{cases}$$

genügt.

§ 5.

Wir definieren jetzt die $p + 1$ Funktionentripel

$$U\, U'\, U'' \ldots U^{(p)}, \quad V\, V'\, V'' \ldots V^{(p)}, \quad W\, W'\, W'' \ldots W^{(p)}\,[1]$$

durch die dreimal $p + 1$ linearen Gleichungen:

$$75)\quad \begin{cases} a_0 U + a_1 U' + a_2 U'' + \cdots + a_p U^{(p)} = \pi, \ \ldots [2] \\ U - \lambda^2 U' = u_0, \ldots \\ U' - \lambda^2 U'' = u_1, \ldots \\ - \ - \ - \ - \ - \ - \ - \ - \ - \ - \ - \\ U^{(p-1)} - \lambda^2 U^{(p)} = u_{p-1}; \end{cases}$$

man kann dann zeigen, daß für den Fall des Nichtverschwindens der Determinante dieser Gleichungen:

$$76)\quad \begin{cases} D = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_p \\ 1 & -\lambda^2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda^2 & \ldots & 0 \\ - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & \ldots 1 & -\lambda^2 \end{vmatrix}, \\ = (-\lambda^2)^p a_0 + (-\lambda^2)^{p-1} a_1 + \cdots - \lambda^2 a_{p-1} + a_p, \end{cases}$$

---

[1]) Die Zeichen (j) sollen hier als Indizes stehen.

[2]) Je zwei analoge Gleichungen, die dadurch entstehen, daß man für U bezw. $V\,W$, für π bezw. $\chi\,\varrho$, für u bezw. $v\,w$ schreibt.

die Funktionen $U\,V\,W$ mit ihren ersten Ableitungen eindeutige und stetige Funktionen der Stelle des Innenraumes von ω darstellen, die den Differentialgleichungen:

$$\text{77)}\quad \begin{cases} \Delta U + k\dfrac{\partial \Theta}{\partial x} + \lambda^2 U = -f_1, \\ \Delta V + k\dfrac{\partial \Theta}{\partial y} + \lambda^2 V = -f_2, \\ \Delta W + k\dfrac{\partial \Theta}{\partial z} + \lambda^2 W = -f_3 \end{cases}$$

und den Grenzbedingungen:

$$\text{78)}\quad \begin{cases} U = 0, \\ V = 0, \\ W = 0 \end{cases}$$

genügen. Wir schreiben hierzu die an zweiter bis $p+1^{\text{ter}}$ Stelle stehenden Gleichungen 75) in der Form:

$$\text{79)}\quad U^{(j-1)} - \lambda^2 U^{(j)} - u_{j-1} = 0, \ldots \quad (j = 1,[1]\ 2 \ldots p)$$

und folgern hieraus durch die Operationen

$$\Delta + k\frac{\partial\theta}{\partial x},\quad \Delta + k\frac{\partial\theta}{\partial y},\quad \Delta + k\frac{\partial\theta}{\partial z},$$

daß:

$$\text{80)}\quad \left\{\begin{aligned} &\Delta U^{(j-1)} + k\frac{\partial\,\Theta^{(j-1)}}{\partial x} - \lambda^2\left(\Delta U^{(j)} + k\frac{\partial\,\Theta^{(j)}}{\partial x}\right) \\ &\qquad + u_{j-2}{}^{2)} = 0, \\ &\Delta V^{(j-1)} + k\frac{\partial\,\Theta^{(j-1)}}{\partial y} - \lambda^2\left(\Delta V^{(j)} + k\frac{\partial\,\Theta^{(j)}}{\partial y}\right) \\ &\qquad + v_{j-2} = 0, \\ &\Delta W^{(j-1)} + k\frac{\partial\,\Theta^{(j-1)}}{\partial z} - \lambda^2\left(\Delta W^{(j)} + k\frac{\partial\,\Theta^{(j)}}{\partial z}\right) \\ &\qquad + w_{j-2} = 0. \end{aligned}\right| \quad j = 1, 2 \ldots p$$

---

[1]) Im Falle $j=1$ steht $U^{(j-1)}\,V^{(j-1)}\,W^{(j-1)}$ für $U\,V\,W$.

[2]) Im Falle $j=1$ steht $u_{j-2}\,v_{j-2}\,w_{j-2}$ für $f_1\,f_2\,f_3$.

Während nun die an erster Stelle stehenden Gleichungen 75) mit Rücksicht auf die Gleichungen 73) die Relationen liefern:

$$81^{a})\quad \begin{cases} \quad a_0\left\{\Delta U + k\dfrac{\partial \Theta}{\partial x} + \lambda^2 U + f_1\right\} \\ + a_1\left\{\Delta U' + k\dfrac{\partial \Theta'}{\partial x} + \lambda^2 U' + u_0\right\} \\ + a_2\left\{\Delta U'' + k\dfrac{\partial \Theta''}{\partial x} + \lambda^2 U'' + u_1\right\} + \cdots \\ + a_p\left\{\Delta U^{(p)} + k\dfrac{\partial \Theta^{(p)}}{\partial x} + \lambda^2 U^{(p)} + u_{p-1}\right\} = 0, \ldots \end{cases}$$

folgen, wenn man die Gleichungen 79) mit λ^2 multipliziert und bezw. zu 80) addiert, die folgenden Gleichungen, die wir für $j = 1, 2 \ldots p$ explicite hinschreiben:

$$81^{b})\quad \begin{cases} \Delta U + k\dfrac{\partial \Theta}{\partial x} + \lambda^2 U + f_1 \\ -\lambda^2\left(\Delta U' + k\dfrac{\partial \Theta'}{\partial x} + \lambda^2 U' + u_0\right) = 0, \ldots \\ \Delta U' + \dfrac{\partial \Theta'}{\partial x} + \lambda^2 U' + u_0 \\ -\lambda^2\left(\Delta U'' + k\dfrac{\partial \Theta''}{\partial x} + \lambda^2 U'' + u_1\right) = 0, \ldots \\ - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \\ \Delta U^{(p-1)} + k\dfrac{\partial \Theta^{(p-1)}}{\partial x} + \lambda^2 U^{(p-1)} + u_{p-2} \\ -\lambda^2\left(\Delta U^{(p)} + k\dfrac{\partial \Theta^{(p)}}{\partial x} + \lambda^2 U^{(p)} + u_{p-1}\right) = 0, \ldots \end{cases}$$

Die Gleichungen 81 a) und 81 b) bilden zusammen ein System von dreimal $p + 1$ linearen, homogenen Gleichungen in Bezug auf die dreimal $p + 1$ Größen:

$$\Delta U + k\frac{\partial \Theta}{\partial x} + \lambda^2 U + f_1, \quad \Delta U' + k\frac{\partial \Theta'}{\partial x} + \lambda^2 U' + u_0,$$

$$\Delta U'' + k\frac{\partial \Theta''}{\partial x} + \lambda^2 U'' + u_1, \ldots \Delta U^{(p)} + k\frac{\partial \Theta^{(p)}}{\partial x} + \lambda^2 U^{(p)} + u_{p-1};$$

$$\Delta V + k\frac{\partial \Theta}{\partial x} + \lambda^2 V + f_2, \quad \Delta V' + k\frac{\partial \Theta'}{\partial y} + \lambda^2 V' + v_0,$$

$$\Delta V'' + k\frac{\partial \Theta''}{\partial y} + \lambda^2 V'' + v_1, \ldots \Delta V^{(p)} + k\frac{\partial \Theta^{(p)}}{\partial y} + \lambda^2 V^{(p)} + v_{p-1};$$

$$\Delta W + k\frac{\partial \Theta}{\partial z} + \lambda^2 W + f_3, \quad \Delta W' + k\frac{\partial \Theta'}{\partial z} + \lambda^2 W' + w_0,$$

$$\Delta W'' + k\frac{\partial \Theta''}{\partial z} + \lambda^2 W'' + w_1, \ldots \Delta W^{(p)} + k\frac{\partial \Theta^{(p)}}{\partial z} + \lambda^2 W^{(p)} + w_{p-1}.$$

Ist ihre Determinante D (76) $\neq 0$, so müssen sie einzeln verschwinden; im Besonderen genügen also $U\,V\,W$ den Differentialgleichungen 77).

Nach den Definitionsgleichungen 75) sind $U\,V\,W$ in der Form darstellbar:

$$82)\quad \begin{cases} U = \dfrac{P}{D}, \\ V = \dfrac{Q}{D}, \\ W = \dfrac{R}{D}, \end{cases}$$

wenn:

$$83)\quad \begin{cases} P = \begin{vmatrix} \pi & a_1 & a_2 & \ldots & a_{p-1} & a_p \\ u_0 & -\lambda^2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ u_1 & 1 & -\lambda^2 & \ldots & 0 & 0 \\ - & - & - & - & - & - \\ u_{p-1} & 0 & 0 & \ldots & 1 & -\lambda^2 \end{vmatrix}, \\ Q = \begin{vmatrix} \chi & a_1 & a_2 & \ldots & a_{p-1} & a_p \\ v_0 & -\lambda^2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ v_1 & 1 & -\lambda^2 & \ldots & 0 & 0 \\ - & - & - & - & - & - \\ v_{p-1} & 0 & 0 & \ldots & 0 & -\lambda^2 \end{vmatrix}, \\ R = \begin{vmatrix} \varrho & a_1 & a_2 & \ldots & a_{p-1} & a_p \\ w_0 & -\lambda^2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ w_1 & 1 & -\lambda^2 & \ldots & 0 & 0 \\ - & - & - & - & - & - \\ w_{p-1} & 0 & 0 & \ldots & 1 & -\lambda^2 \end{vmatrix}. \end{cases}$$

Die Formeln 82) stellen in jedem Falle die Lösungen unseres Hauptproblems dar, falls nicht λ^2 gerade eine Wurzel der Gleichung

$$D = 0$$

ist; dieser Ausnahmefall bedarf einer besonderen Diskussion.

§ 6.

Wir haben λ^2 bisher als eine bestimmte, festgegebene positive Zahl betrachtet, wir wollen jetzt λ^2 als eine beliebige, positive Zahl unterhalb dieser festen Zahl auffassen. Die Funktionen $\pi \chi \varrho$, somit auch $P\,Q\,R$ sind in allen diesen Fällen mit ihren ersten Ableitungen (nach $x\,y\,z$) eindeutige und stetige Funktionen der Stelle des Innenraumes von ω; dagegen wachsen die Lösungen $U\,V\,W$ unseres Hauptproblems ins Unendliche, wenn sich λ^2 einer Wurzel der Gleichung

$$D = 0$$

unendlich nähert und nicht etwa gleichzeitig auch P bezw. $Q\,R$ zu Null konvergieren.

Die Wurzeln

$$\lambda_1^2\,\lambda_2^2 \ldots \lambda_p^2 \qquad (< \lambda^2)$$

der Gleichung:

$$D = 0$$

werden somit Pole der Funktionen $U\,V\,W$ in Bezug auf die Variable λ^2 sein, falls dieselben nicht Nullstellen für P bezw. $Q\,R$ sind.

Unsere wesentliche Aufgabe wird daher jetzt sein, das Verhalten der Funktionen $P\,Q\,R$ an den Stellen

$$\lambda^2 = \lambda_1^2,\ \lambda_2^2,\ \ldots\ \lambda_p^2$$

zu untersuchen. Es folgt aus 83):

$$\Delta P = \begin{vmatrix} \Delta\pi & a_1 & a_2 & \ldots & a_{p-1} & a_p \\ \Delta u_0 & -\lambda^2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \Delta u_1 & 1 & -\lambda^2 & \ldots & 0 & 0 \\ - & - & - & - & - & - \\ \Delta u_{p-1} & 0 & 0 & \ldots & 1 & -\lambda^2 \end{vmatrix}, \ldots$$

und:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta P + k\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}\right) \\ \qquad + \lambda^2 P \end{array}\right\} = \left|\begin{array}{llllll} -(a_0 f_1 + a_1 u_0 + a_0 u_1 + \cdots + a_p u_{p-1}) & a_1 & a_2 & \ldots & a_{p-1} & a_p \\ -f_1 + \lambda^2 u_0 & -\lambda^2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -u_0 + \lambda^2 u_1 & 1 & -\lambda^2 & \ldots & 0 & 0 \\ - & - & - & - & - & - \\ -u_{p-2} + \lambda^2 u_{p-1} & 0 & 0 & \ldots & 1 & \lambda^2 \end{array}\right|, \ldots$$

oder:

$$84)\quad \begin{cases} \Delta P + k\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}\right) + \lambda^2 P = -f_1 D. \\ \Delta Q + k\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}\right) + \lambda^2 Q = -f_2 D, \\ \Delta R + k\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}\right) + \lambda^2 R = -f_3 D. \end{cases}$$

Bezeichnen wir die Werte von $P\,Q\,R$ für

$$\lambda^2 = \lambda_j^2 \quad (j = 1, 2 \ldots p)$$

mit $P_j\,Q\,R_j$, so folgt:

$$85)\quad \begin{cases} \Delta P_j + k\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial P_j}{\partial x}+\dfrac{\partial Q_j}{\partial y}+\dfrac{\partial R_j}{\partial z}\right) = -\lambda_j^2 P_j, \\ \Delta Q_j + k\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial P_j}{\partial x}+\dfrac{\partial Q_j}{\partial y}+\dfrac{\partial R_j}{\partial z}\right) = -\lambda_j^2 Q_j, \\ \Delta R_j + k\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial P_j}{\partial x}+\dfrac{\partial Q_j}{\partial y}+\dfrac{\partial R_j}{\partial z}\right) = -\lambda_j^2 R_j. \end{cases}$$

Definition. Wir bezeichnen als elastische Funktionentripel des Innenraumes von ω 3 mit ihren ersten Ableitungen eindeutige und stetige Funktionen der Stelle des Innenraumes $U_j\,V_j\,W_j$, welche in demselben den Differentialgleichungen genügen:

$$86^a)\quad \begin{cases} \Delta U_j + k\dfrac{\partial \Theta_j}{\partial x} + \lambda_j^2 U_j = 0, \\ \Delta V_j + k\dfrac{\partial \Theta_j}{\partial y} + \lambda_j^2 V_j = 0, \\ \Delta W_j + k\dfrac{\partial \Theta_j}{\partial z} + \lambda_j^2 W_j = 0, \end{cases}$$

den Grenzbedingungen:

$$86^b)\qquad \begin{cases} U_j = 0, \\ V_j = 0, \\ W_j = 0 \end{cases}$$

und der Beziehung:

$$86^c)\qquad \int_i (U_j^2 + V_j^2 + W_j^2)\, d\tau = 1;$$

λ_j^2 bezeichnen wir als die dem elastischen Funktionentripel $U_j V_j W_j$ zugehörige Zahl.

Wir können nach dieser Definition das Resultat 85) auch so aussprechen:

Die Werte, welche $P\,Q\,R$ für

$$\lambda^2 = \lambda_1^2,\ \lambda_2^2, \ldots \lambda_p^2$$

annehmen, sind entweder identisch Null oder elastische Funktionentripel des Innenraumes von ω, multipliziert mit von Null verschiedenen Konstanten.

Die Wurzeln λ_j^2, denen elastische Funktionentripel entsprechen, können nicht Doppelwurzeln der Gleichung

$$D = 0$$

sein. Für eine solche Doppelwurzel wäre:

$$\frac{dD}{d\lambda^2} = 0,$$

somit nach 84).

$$\lambda_j^2 P_j = -\Delta P_j - k\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial P_j}{\partial x} + \frac{\partial Q_j}{\partial y} + \frac{\partial R_j}{\partial z}\right), \ldots$$

$$\Delta \frac{dP_j}{d\lambda^2} + k\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\frac{dP_j}{d\lambda^2} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{dQ_j}{d\lambda^2} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{dR_j}{d\lambda^2}\right\} = -\lambda_j^2\frac{dP_j}{d\lambda^2} - P_j \ldots$$

Multipliziert man diese Gleichungen bezw. miteinander, addiert und integriert über den Innenraum, so folgt mit Rücksicht auf die Relation:

$$\int_i \left[P_j \left[\Delta \frac{d P_j}{d \lambda^2} + k \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \frac{d P_j}{d \lambda^2} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{d Q_j}{d \lambda^2} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{d R_j}{d \lambda^2} \right\} \right] + \cdots \right] d \tau$$

$$= \int_i \left[\frac{d P_j}{d \lambda^2} \left[\Delta P_j + k \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial P_j}{\partial x} + \frac{\partial Q_j}{\partial y} + \frac{\partial R_j}{\partial z} \right) \right] + \cdots \right] d \tau,$$

daß:

$$\int_i \left[P_j \left[\Delta P_j + k \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial P_j}{\partial x} + \frac{\partial Q_j}{\partial y} + \frac{\partial R_j}{\partial z} \right) \right] + \cdots \right] = 0,$$

oder:

$$\int_i \left[(1 + k) \left(\frac{\partial P_j}{\partial x} + \frac{\partial Q_j}{\partial y} + \frac{\partial R_j}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial R_j}{\partial y} - \frac{\partial Q_j}{\partial z} \right)^2 \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial P_j}{\partial z} - \frac{\partial R_j}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial Q_j}{\partial x} - \frac{\partial P_j}{\partial y} \right)^2 \right] d \tau = 0,$$

also:

$$P_j = Q_j = R_j = 0,$$

womit die Behauptung erwiesen ist, daß einer Doppelwurzel λ_j^2 kein elastisches Funktionentripel $U_j V_j W_j$ entspricht.

Es ist ferner leicht zu ersehen, daß die Wurzeln λ_j^2 der Gleichung

$$D = 0,$$

denen identisch verschwindende $P_j Q_j R_j$ entsprechen, nicht Pole für die Lösungen $U V W$ unseres Hauptproblems sein können, da in diesem Falle, wenn das betreffende λ_j^2 eine m fache Wurzel der Gleichung

$$D = 0$$

ist $(m = 1, 2, \ldots p)$:

$$D = \frac{d D}{d \lambda^2} = \frac{d^2 D}{(d \lambda^2)^2} = \cdots = \frac{d^{m-1} D}{(d \lambda^2)^{m-1}} = 0, \quad \frac{d^m D}{(d \lambda^2)^m} \neq 0$$

$$U = \frac{\dfrac{d^m P}{(d \lambda^2)^m}}{\dfrac{d^m D}{(d \lambda^2)^m}}, \quad V = \frac{\dfrac{d^m Q}{(d \lambda^2)^m}}{\dfrac{d^m D}{(d \lambda^2)^m}}, \quad W = \frac{\dfrac{d^m R}{(d \lambda^2)^m}}{\dfrac{d^m D}{(d \lambda^2)^m}}$$

und $\frac{d^m P}{(d \lambda^2)^m}, \frac{d^m Q}{(d \lambda^2)^m}, \frac{d^m R}{(d \lambda^2)^m}$ an der Stelle $\lambda^2 = \lambda_j^2$ eindeutig und

stetig sind.[1]) Wir können das Resultat in folgender Weise zusammenfassen:

II. Bestehen zwischen den successive durch die Gleichungen 24) und 25) definierten Funktionen

$$u_j \; v_j \; w_j \qquad (j = 0, 1, 2 \ldots)$$

keine Relationen von der Form:

$$\begin{aligned} \beta_0 u_0 + \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_p u_p = 0, \\ \beta_0 v_0 + \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_p v_p = 0, \\ \beta_0 w_0 + \beta_1 w_1 + \cdots + \beta_p w_p = 0, \end{aligned}$$

wo p eine endliche Zahl, $\beta_0 \beta_1 \ldots \beta_p$ reelle, der Gleichung:

$$\beta_0^2 + \beta_1^2 + \cdots + \beta_p^2 = 1$$

genügende Konstanten vorstellen, so kann man für ein beliebiges

$$\lambda^2 < \frac{1}{L_m}, \quad L_m = \frac{\text{endl. Konst.}}{\sqrt[3]{m^2}},$$

wenn m eine beliebig große, fest gegebene Zahl vorstellt, ein Lösungssystem unseres Hauptproblems in der folgenden Form angeben:

$$87) \quad \left\{ \begin{aligned} U &= \frac{X(\lambda^2, x, y, z)}{(\lambda^2 - \lambda_1^2)(\lambda^2 - \lambda_2^2) \ldots (\lambda^2 - \lambda_n^2)}, \\ V &= \frac{Y(\lambda^2, x, y, z)}{(\lambda^2 - \lambda_1^2)(\lambda^2 - \lambda_2^2) \ldots (\lambda^2 - \lambda_n^2)}, \\ W &= \frac{Z(\lambda^2, x, y, z)}{(\lambda^2 - \lambda_1^2)(\lambda^2 - \lambda_2^2) \ldots (\lambda^2 - \lambda_n^2)}, \end{aligned} \right| \quad 0^{2)} \overline{<} n < m,$$

[1]) Dies ist ohne weiteres klar für $m = 1$; für $m = 2$ folgt aus 84) und $\frac{dD}{d\lambda^2} = 0$, da nun das betreffende λ_j^2 eine Doppelwurzel der Gleichung $D = 0$ ist:

$$\frac{dP}{d\lambda^2} = 0, \ldots \text{ somit: } U = \frac{\frac{d^2 P}{(d\lambda^2)^2}}{\frac{d^2 D}{(d\lambda^2)^2}}, \ldots$$

und so fort, für $m = 3, 4 \ldots$

[2]) Für den Fall $n = 0$ soll die rechte Seite einfach für $X(\lambda^2, x, y, z)$, $Y(\lambda^2, x, y, z)$, $Z(\lambda^2, x, y, z)$ stehen.

wo $\lambda_1^2\ \lambda_2^2 \ldots \lambda_m^2$ bestimmte, von einander verschiedene positive Zahlen $\left(\overline{\overline{<}}\ \frac{1}{L_m}\right)$ sind, XYZ für jeden Wert von λ^2:

$$0 \overline{\overline{<}} \lambda^2 \overline{\overline{<}} \frac{1}{L_m}$$

ein mir ihren ersten Ableitungen in τ eindeutiges und stetiges Funktionentripel darstellen und abgesehen von einem konstanten Faktor für

$$\lambda^2 = \lambda_j^2 \qquad (j = 1, 2 \ldots n)$$

in ein elastisches Funktionentripel des Innenraumes von ω mit zugehöriger Zahl λ_j^2 übergehen.

Die kurze auf den Satz I folgende Betrachtung (S. 367) zeigt uns, daß der Fall:

$$\begin{aligned} \beta_0 u_0 + \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_p u_p &= 0, \\ \beta_0 v_0 + \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_p v_p &= 0, \\ \beta_0 w_0 + \beta_1 w_1 + \cdots + \beta_p w_p &= 0 \end{aligned}$$

(p endlich) keinen Ausnahmefall des vorstehenden Satzes darstellt:

Zusatz 1 zu II. Der Satz II gilt in gleicher Weise, auch wenn zwischen den successiven Funktionen:

$$u_j\ v_j\ w_j \qquad (j = 0, 1, 2 \ldots)$$

Relationen von der Form:

$$\begin{aligned} \beta_0 u_0 + \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_p u_p &= 0, \\ \beta_0 v_0 + \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_p v_p &= 0, \\ \beta_0 w_0 + \beta_1 w_1 + \cdots + \beta_p w_p &= 0 \end{aligned}$$

(p endlich) bestehen.

Zusatz 2 zu II. Für irgend ein von

$$\lambda_1^2\ \lambda_2^2 \ldots \lambda_n^2$$

verschiedenes λ^2 kann sich eine andere Lösung $U'V'W'$ unseres Hauptproblem's von der Lösung 87) nur um Funktionen

$$U' - U,\ V' - V,\ W' - W$$

unterscheiden, die selbst ein elastisches Funktionentripel für den Innenraum von ω mit dem betreffenden λ^2 als zugehöriger Zahl bilden.

Dies folgt genau in derselben Weise, wie in dem Spezialfalle S. 369. Die Frage nach der Existenz der Lösungen unseres Hauptproblems wird durch den Satz II vollständig beantwortet, wir wollen uns nun besonders mit den Polen dieser Lösungen und den elastischen Funktionentripeln beschäftigen, welche diesen Polen entsprechen.

§ 7.

III[a]). Die einem elastischen Funktionentripel $U_j V_j W_j$ zugehörige Zahl λ_j^2 ist eine reelle, positive, von null verschiedene Zahl.

Der Beweis von III[a]) liegt in der Betrachtung S. 359—362.

III[b]). Jedes elastische Funktionentripel $U_j V_j W_j$ entspricht der Ungleichung:

$$\text{abs. Max. } (U_j V_j W_j) \leqq \alpha \cdot \lambda_j^2,$$

wo α eine endliche, lediglich von der Gestalt der Fläche ω abhängende Konstante vorstellt.

Zum Beweise dieses Satzes braucht man eine Verallgemeinerung der Formeln 137) meiner ersten Abhandlung zur Elastizitätstheorie (diese Ber. 36, S. 80, 1906); man kann nämlich ohne Schwierigkeit auch aus den Formeln 103), 105) und 136) folgern,[1]) daß auch in dem Falle

$$F \equiv \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} \neq 0$$

die Formeln 136) bestehen. Bedenkt man, daß wegen der Definitionsgleichungen:

---

[1]) In einer Abhandlung „Sur les équations de l'élasticité", die demnächst in den Ann. de L'Ec. Norm. erscheinen wird, werde ich übrigens etwas ausführlicher auf diese Verallgemeinerung eingehen.

$$\Delta U_j + k \frac{\partial \Theta_j}{\partial x} = -\lambda_j^2 U_j, \ldots :$$

$$\int_\tau \Theta_j^2 \, d\tau \overline{<} \text{ endl. Konst. } \lambda_j^2, \quad \int_\tau \mathfrak{U}_j^2 \, d\tau \overline{<} \text{ endl. Konst. } \lambda_j^2, \ldots$$

und setzt man:

$$C_j = \text{abs. Max. } (U_j V_j W_j),$$

so folgt leicht wegen der Formeln:

$$U_j = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_\tau \Theta_j \frac{d\tau}{r} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_\tau \mathfrak{W}_j \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_\tau \mathfrak{V}_j \frac{d\tau}{r}, \ldots :$$

$$C_j \overline{<} \text{ endl. Konst. } \frac{\lambda_j}{\sqrt{\mathfrak{r}}} + \text{ endl. Konst. } \mathfrak{r} \cdot \lambda_j^2 C_j,$$ (r beliebig kleine Länge),

somit die Behauptung, wenn man $\mathfrak{r} = \frac{1}{\lambda_j^2} \times$ einer genügend kleinen, endlichen Konstanten setzt.

III[c]) Setzt man:

$$\text{88}^{\text{a}}) \qquad \begin{cases} f_1 = U_j, \\ f_2 = V_j, \\ f_3 = W_j. \end{cases}$$

wo $U_j V_j W_j$ ein elastisches Funktionentripel des Innenraumes von ω, λ_j^2 die zugehörige Zahl vorstellt, so ist:

$$\text{88}^{\text{b}}) \qquad \begin{cases} u = u_0 + \lambda^2 u_1 + \lambda^4 u_2 + \cdots = \dfrac{U_j}{\lambda_j^2 - \lambda^2}, \\ v = v_0 + \lambda^2 v_1 + \lambda^4 v_2 + \cdots = \dfrac{V_j}{\lambda_j^2 - \lambda^2}, \\ w = w_0 + \lambda^2 w_1 + \lambda^4 w^2 + \cdots = \dfrac{W_j}{\lambda_j^2 - \lambda^2}, \end{cases} \quad (\lambda^2 < \lambda_j^2).$$

Denn es ist in diesem Falle:

$$u_0 = \frac{U_j}{\lambda_j^2}, \ldots$$

$$u_1 = \frac{U_j}{\lambda_j^4}, \ldots \qquad \text{und so fort.}$$

$$u_2 = \frac{U_j}{\lambda_j^6}, \ldots$$

Diese Überlegung beweist zugleich den Zusatz:

Zusatz zu III^c). Setzt man:

$$
89^{a})\quad \begin{cases} f_1 = a_1 U_1 + a_2 U_2 + \cdots + a_p U_p, \\ f_2 = a_1 V_1 + a_2 V_2 + \cdots + a_p V_p, \\ f_3 = a_1 W_1 + a_2 W_2 + \cdots + a_p W_p, \end{cases}
$$

wo $a_1 a_2 \ldots a_p$ Konstanten, $U_j V_j W_j$ $(j = 1, 2, \ldots p)$ p elastische Funktionentripel des Innenraumes von ω mit den zugehörigen Zahlen $\lambda_1^2 \lambda_2^2 \ldots \lambda_p^2$ vorstellen, so ist:

$$
89^{b})\quad \begin{cases} u \equiv u_0 + \lambda^2 u_1 + \lambda^4 u_2 + \cdots = \sum_1^p{}_j \dfrac{a_j U_j}{\lambda_j^2 - \lambda_j^2}, \\ v \equiv v_0 + \lambda^2 v_1 + \lambda^4 v_2 + \cdots = \sum_1^p{}_j \dfrac{a_j V_j}{\lambda_j^2 - \lambda_j^2}, \\ w \equiv w_0 + \lambda^2 w_1 + \lambda^4 w_2 + \cdots = \sum_1^p{}_j \dfrac{a_j W_j}{\lambda_j^2 - \lambda_j^2}, \end{cases}
$$

solange λ^2 kleiner als die kleinste der Zahlen $\lambda_1^2 \lambda_2^2 \ldots \lambda_p^2$ und p eine endliche Zahl ist.

III^d). Es existiert für jede stetig gekrümmte, geschlossene Fläche ω und für jeden Wert von $k > -1$ eine endliche, positive Zahl m von solcher Beschaffenheit, daß, falls p eine beliebige endliche positive ganze Zahl $\geqq m$ vorstellt, die Zahl der überhaupt möglichen, linear unabhängigen elastischen Funktionentripel des Innenraumes von ω mit zugehörigen Zahlen

$$
\lambda_j^2 < \frac{1}{L_p}, \quad L_p = \frac{\text{endl. Konst.}}{\sqrt[3]{p^2}},
$$

$\leqq p$ sein muß.

Man kann nach unseren früheren Resultaten bei genügend großem p die Konstanten $a_1 a_2 \ldots a_p$ so wählen, daß:

$$
a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_p^2 = 1
$$

und die Reihen 89^b) für ein beliebiges

$$\lambda^2 < \frac{1}{L_p}$$

konvergent sind. Wären nun alle

$$\lambda_j^2 < \frac{1}{L_p},$$

so würden die Gleichungen:

$$u = \sum_1^p {}_j \frac{a_j U_j}{\lambda_j^2 - \lambda^2},$$

$$v = \sum_1^p {}_j \frac{a_j V_j}{\lambda_j^2 - \lambda^2}, \quad \text{des vorangehenden Zusatzes zu III}^{c})$$

$$w = \sum_1^p {}_j \frac{a_j W_j}{\lambda_j^2 - \lambda^2},$$

diesem Resultate widersprechen, es muß somit wenigstens eines der λ_j^2

$$> \frac{1}{L_p}$$

sein, wenn $U_j V_j W_j$ p linear unabhängige elastische Funktionentripel des Innenraumes von ω vorstellen.

Wir können diesem Satze sofort die folgenden Zusätze hinzufügen:

Zusatz 1 zu III^{d}). Die Anzahl der elastischen Funktionentripel, die von einander linear unabhängig sind und zugehörige Zahlen

$$\lambda_j^2 < m$$

besitzen, wo m eine endliche Zahl vorstellt, ist endlich.

Zusatz 2 zu III^{d}). Die Anzahl der möglichen, linear unabhängigen elastischen Funktionentripel mit derselben zugehörigen, endlichen Zahl λ_j^2 ist endlich.

IIIe). Sind $U_i V_i W_i$ und $U_k V_k W_k$ irgend zwei elastische Funktionentripel mit den von einander verschiedenen zugehörigen Zahlen λ_i^2 und λ_k^2, so ist:

$$90) \qquad \int_\tau (U_i U_k + V_i V_k + W_i W_k)\, d\tau = 0, \quad (\lambda_i^2 \neq \lambda_k^2).$$

Wir multiplizieren zum Beweise die Relationen:

$$\Delta U_i + k \frac{\partial \Theta_i}{\partial x} = -\lambda_i^2 U_i,$$

$$\Delta V_i + k \frac{\partial \Theta_i}{\partial y} = -\lambda_i^2 V_i,$$

$$\Delta W_i + k \frac{\partial \Theta_i}{\partial z} = -\lambda_i^2 W_i$$

bezw. mit $U_k V_k W_k$, addieren und integrieren über den Innenraum, dann folgt:

$$\lambda_i^2 \int_i (U_i U_k + V_i V_k + W_i W_k)\, d\tau$$

$$= - \int_i \left[U_k \left(\Delta U_i + k \frac{\partial \Theta_i}{\partial x} \right) + V_k \left(\Delta V_i + k \frac{\partial \Theta_i}{\partial y} \right) + W_k \left(\Delta W_i + k \frac{\partial \Theta_i}{\partial z} \right) \right] d\tau,$$

$$= - \int_i \left[U_i \left(\Delta U_k + k \frac{\partial \Theta_k}{\partial x} \right) + V_i \left(\Delta V_k + k \frac{\partial \Theta_k}{\partial y} \right) + W_i \left(\Delta W_k + k \frac{\partial \Theta_k}{\partial z} \right) \right] d\tau,$$

$$= \lambda_k^2 \int_i (U_i U_k + V_i V_k + W_i W_k)\, d\tau;$$

es folgt somit die Gleichung 90), sobald

$$\lambda_i^2 \neq \lambda_k^2.$$

Zusatz zu IIIe.). Können wir drei Funktionen $f_1 f_2 f_3$ der Stelle des Innenraumes, die an der Oberfläche ω verschwinden, in der Form darstellen:

$$\text{91)} \qquad \begin{cases} f_1 = C_1 U_1 + C_2 U_2 + \cdots, \\ f_2 = C_1 V_1 + C_2 V_2 + \cdots, \\ f_3 = C_1 W_1 + C_2 W_2 + \cdots, \end{cases}$$

wo $U_j V_j W_j$ $(j = 1, 2 \ldots)$ elastische Funktionentripel mit von einander verschiedenen Zahlen $\lambda_1^2 \lambda_2^2 \ldots$ vorstellen, so müssen die Konstanten C_j die Werte haben:

$$\text{92)} \qquad C_j = \int_i (f_1 U_j + f_2 V_j + f_3 W_j)\, d\tau, \quad (j = 1, 2 \ldots).$$

Wir haben zum Beweise nur die Formeln 91) bezw. mit $U_i V_i W_i$ zu multiplizieren, zu addieren und über den Innenraum zu integrieren, schließlich die Formeln

$$\int_i (U_i U_k + V_i V_k + W_i W_k)\, d\tau = 0, \quad (i \neq k)$$

$$\int_i (U_i^2 + V_i^2 + W_i^2)\, d\tau = 1$$

zu beachten.

Die Frage, unter welchen Bedingungen wir vorgelegte Funktionentripel $f_1 f_2 f_3$ nach elastischen Funktionentripeln entwickeln können, soll uns in dem folgenden Paragraphen beschäftigen.

§ 8.

Die Untersuchung, welche uns zu dem Satze II. führte, hat uns gelehrt, daß jedem Pole λ_j^2 der Lösungen unsers Hauptproblems:

$$\left.\begin{aligned} \Delta U_j + k \frac{\partial \Theta_j}{\partial z} + \lambda^2 U &= -f_1, \\ \Delta V_j + k \frac{\partial \Theta_j}{\partial y} + \lambda^2 V &= -f_2, \\ \Delta W_j + k \frac{\partial \Theta_j}{\partial x} + \lambda^2 W &= -f_3, \end{aligned}\right\} \text{ in } \tau$$

$$U = V = W = 0, \quad \text{an } \omega$$

(für $0 < \lambda^2 < \frac{1}{L_p}$, wo p eine endliche, im übrigen beliebig große positive Zahl vorstellt), ein elastisches Funktionentripel $U_j V_j W_j$ entspricht, und daß die Anzahl dieser Pole höchstens $= p$ ist.

Wir definieren nun die Funktionen $R_p S_p T_p$ durch die Gleichungen:

$$93) \quad \begin{cases} R_p = f_1 - C_1 U_1 - C_2 U_2 - \cdots - C_p U_p, \\ S_p = f_2 - C_1 V_1 - C_2 V_2 - \cdots - C_p V_p, \\ T_p = f_3 - C_1 W_1 - C_2 W_2 - \cdots - C_p W_p, \end{cases}$$

wo:

94) $C_j = \int_i (f_1 U_j + f_2 V_j + f_3 W_j)\, d\tau, \; (j = 1, 2 \ldots n, \; 0 \leqq n \leqq p),$

entsprechend den n Polen von $U V W$ im Intervalle

$$0 < \lambda^2 \leqq \frac{1}{L_p}$$

während

95) C_j[1] $= 0, \quad (j = n + 1, \; n + 2, \ldots p)$

sein soll, und wir wollen jetzt von den Funktionen $f_1 f_2 f_3$ voraussetzen, daß sie an der Oberfläche ω verschwinden und in τ eindeutig und stetig sind mit ihren ersten Ableitungen, während ihre zweiten Ableitungen endlich und integrabel vorausgesetzt werden sollen.

Es gilt dann gleiches auch für die Funktionen $R_p S_p T_p$.[2]

Wir werden von dem Ausdruck

$$\int_i (R_p^2 + S_p^2 + T_p^2)\, d\tau$$

zunächst nachweisen, daß er durch Vergrößerung von p unter jeden beliebigen Kleinheitsgrad herabgedrückt werden kann.

---

[1]) Mit der Festsetzung, daß auch

$$C_j U_j = C_j V_j = C_j W_j = 0 \quad (j = n + 1, \; n + 2, \ldots p).$$

[2]) Der Beweis, daß die zweiten Ableitungen von $U_j V_j W_j$ stetig sind, folgt daraus, daß man in dem in der ersten Abhandlung zur Elastizitätstheorie behandelten allgemeinen Gleichgewichtsprobleme die Stetigkeit der zweiten Ableitungen von $u v w$ stets beweisen kann, falls $f_1 f_2 f_3$ von der Art stetig sind:

$$\text{abs.} \left| f_j \right|_1^2 \leqq \text{endl. Konst. } r_{12}^{\lambda}, \ldots, \; 0 < \lambda < 1.$$

Eine ausführliche Behandlung dieser Dinge wird in meiner demnächst in den Ann. de l'Ec. Norm. erscheinenden Arbeit: Sur les équations de l'élasticité gegeben. Für den Beweis der Stetigkeit der zweiten Ableitungen von $u v w$ ist allerdings noch die Bedingung hinzuzufügen, daß die ersten Ableitungen der Richtungskosinusse der inneren Normalen $\cos(\nu x)$, $\cos(\nu y)$, $\cos(\nu z)$ auch von der Art stetig sind:

$$\text{abs.} \left| D_1 \cos(\nu x) \right|_1^2 \leqq \text{endl. Konst. } r_{12}^{\lambda}, \ldots, \; 0 < \lambda < 1.$$

Wir betrachten zu diesem Zwecke die Lösungen $u\,v\,w$ des folgenden Problems:

$$96)\qquad \begin{cases} \Delta u + k\dfrac{\partial\theta}{\partial x} + \lambda^2 u = -R_p, \\ \Delta v + k\dfrac{\partial\theta}{\partial y} + \lambda^2 v = -S_p, \\ \Delta w + k\dfrac{\partial\theta}{\partial z} + \lambda^2 w = -T_p, \\ u = v = w = 0, \quad \text{an } \omega, \end{cases}$$

welche wir analog der zu dem Satze II. führenden Untersuchung zu finden imstande sind, und wir wollen zunächst zeigen, daß die früheren Werte

$$\lambda^2 = \lambda_1^2,\ \lambda_2^2, \ldots \lambda_n^2$$

nicht Pole des Funktionentripels $u\,v\,w$ sein können.

Multiplizieren wir die erste Gleichung 96) mit U_j, die zweite mit V_j, die dritte mit W_j, addieren und integrieren über den Innenraum, so folgt mit Rücksicht auf

$$\int_i \left[U_j\left(\Delta u + k\frac{\partial\theta}{\partial x}\right) + V_j\left(\Delta u + k\frac{\partial\theta}{\partial y}\right) + W_j\left(\Delta u + k\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)\right] d\tau$$
$$= -\lambda_j^2 \int_i (u\,U_j + v\,V_j + w\,W_j)\,d\tau$$

und

$$\int_i (R_p\,U_j + S_p\,V_j + T_p\,W_j)\,d\tau = 0,$$

daß:

$$97)\qquad (\lambda^2 - \lambda_j^2)\int_i (u\,U_j + v\,V_j + w\,W_j)\,d\tau = 0,$$
$$(j = 1, 2 \ldots n).$$

Ist λ_1^2 das kleinste λ_j^2, so ist, wenn wir $u_j\,v_j\,w_j$ $(j = 0, 1, 2, \ldots)$ durch die Gleichungen definieren:

98)
$$\left\{\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l}
\Delta u_0 + k\dfrac{\partial\theta_0}{\partial x} = -R_p,\\[2mm]
\Delta v_0 + k\dfrac{\partial\theta_0}{\partial y} = -S_p,\\[2mm]
\Delta w_0 + k\dfrac{\partial\theta_0}{\partial z} = -T_p;\\[2mm]
\left.\begin{array}{l}
\Delta u_j + k\dfrac{\partial\theta_j}{\partial x} = -u_{j-1},\\[2mm]
\Delta v_j + k\dfrac{\partial\theta_j}{\partial y} = -v_{j-1},\\[2mm]
\Delta w_j + k\dfrac{\partial\theta_j}{\partial z} = -w_{j-1},
\end{array}\right\} j = 1, 2 \ldots
\end{array}\right\} \text{in } \tau,\\[2mm]
u_j = v_j = w_j = 0, \text{ an } \omega, \quad (j = 0, 1, 2 \ldots),
\end{array}\right.$$

99)
$$\left\{\begin{array}{l}
u = u_0 + \lambda^2 u_1 + \lambda^4 u_2 + \cdots = U - \sum_1^n{}_j \dfrac{C_j U_j}{\lambda_j^2 - \lambda^2},\\[2mm]
v = v_0 + \lambda^2 v_1 + \lambda^4 v_2 + \cdots = V - \sum_1^n{}_j \dfrac{C_j V_j}{\lambda_j^2 - \lambda^2},\\[2mm]
w = w_0 + \lambda^2 w_1 + \lambda^4 w_2 + \cdots = W - \sum_1^n{}_j \dfrac{C_j W_j}{\lambda_j^2 - \lambda^2}.
\end{array}\right.$$

Nun ist nach Satz II:

100)
$$\left\{\begin{array}{l}
U = \dfrac{\gamma_1 U_1}{\lambda_1^2 - \lambda^2} + U',\\[2mm]
V = \dfrac{\gamma_1 V_1}{\lambda_1^2 - \lambda^2} + V',\\[2mm]
W = \dfrac{\gamma_1 W_1}{\lambda_1^2 - \lambda^2} + W',
\end{array}\right.$$

wo γ_1 eine Konstante, U' V' W' Größen darstellen, die auch für $\lim\,(\lambda_1^2 - \lambda^2) = 0$ endlich bleiben; es folgt somit aus 99):

$$u = (\gamma_1 - C_1) \frac{U_1}{\lambda_1^2 - \lambda^2} + U' - \sum_2^n j \frac{C_j U_j}{\lambda_j^2 - \lambda^2},$$
$$v = (\gamma_1 - C_1) \frac{V_1}{\lambda_1^2 - \lambda^2} + V' - \sum_2^n j \frac{C_j V_j}{\lambda_j^2 - \lambda^2},$$
$$w = (\gamma_1 - C_1) \frac{W_1}{\lambda_1^2 - \lambda^2} + W' - \sum_2^n j \frac{C_j W_j}{\lambda_j^2 - \lambda^2},$$

oder

$$101)\qquad \begin{cases} (\lambda_1^2 - \lambda^2)\, u = (\gamma_1 - C_1)\, U_1 + \varepsilon_1, \\ (\lambda_1^2 - \lambda^2)\, v = (\gamma_1 - C_1)\, V_1 + \varepsilon_2, \\ (\lambda_1^2 - \lambda^2)\, w = (\gamma_1 - C_1)\, W_1 + \varepsilon_3, \end{cases}$$

wo $\varepsilon_1\, \varepsilon_2\, \varepsilon_3$ durch Verkleinerung von $(\lambda_1^2 - \lambda^2)$ unter jeden beliebigen Kleinheitsgrad herabgedrückt werden können.

Es folgt hieraus mit Benützung von 97) — diese Gleichung gilt, wie nahe wir auch λ^2 an λ_1^2 heranrücken lassen — durch Übergang zur Grenze $\lim (\lambda_1^2 - \lambda^2) = 0$:

$$\gamma_1 - C_1 = 0$$

und

$$102)\qquad \begin{cases} u = U' - \sum_2^n j \dfrac{C_j U_j}{\lambda_j^2 - \lambda^2}, \\ v = V' - \sum_2^n j \dfrac{C_j V_j}{\lambda_j^2 - \lambda^2}, \\ w = W' - \sum_2^n j \dfrac{C_j W_j}{\lambda_j^2 - \lambda^2}, \end{cases}$$

wo $U'\ V'\ W'$ endlich bleiben, wie nahe wir auch λ^2 an λ_1^2 heranrücken lassen.

Die Stelle $\lambda^2 = \lambda_1^2$ ist somit kein Pol für die Lösungen $u\, v\, w$, dieselben können überhaupt keinen Pol $\overline{<}\, \lambda_1^2$ haben. Die Reihe 99) konvergieren hiernach nicht blos für alle Werte von λ^2, die kleiner als λ_1^2 sind, sondern für alle λ^2, die kleiner sind, als das nächstgrößere λ_2^2; wir können nun in analoger Weise weiterschließen und finden, daß die Reihen 99) für alle λ^2, deren Wert $< \frac{1}{L_p}$ ist, konvergiert; wir können aus dieser Konvergenz schließen, es ist:

$$103)\qquad \frac{\int\limits_i (u_0^2 + v_0^2 + w_0^2)\, d\tau}{\int\limits_i (R_p^2 + S_p^2 + T_p^2)\, d\tau} < L_p^2;$$

es bestehen nämlich nach einer früheren Betrachtung die Ungleichungen:

$$\frac{\int\limits_i (u_0^2 + v_0^2 + w_0^2)\, d\tau}{\int\limits_i (R_p^2 + S_p^2 + T_p^2)\, d\tau} < \frac{\int\limits_i (u_1^2 + v_1^2 + w_1^2)\, d\tau}{\int\limits_i (u_0^2 + v_0^2 + w_0^2)\, d\tau} < \frac{\int\limits_i (u_2^2 + v_2^2 + w_2^2)\, d\tau}{\int\limits_i (u_1^2 + v_1^2 + w_1^2)\, d\tau} < \cdots;$$

wäre nun:

$$\frac{\int\limits_i (u_0^2 + v_0^2 + w_0^2)\, d\tau}{\int\limits_i (R_p^2 + S_p^2 + T_p^2)\, d\tau} > L_p^2,$$

so würde hieraus folgen:

$$\lambda^{4j} \int\limits_i (u_j^2 + v_j^2 + w_j^2)\, d\tau > (\lambda^2 L_p)^{2j}$$

und das würde der Konvergenz der Reihen 99) für $\lambda^2 = \frac{1}{L_p}$ widersprechen. Wir haben damit tatsächlich die Ungleichung 103) bewiesen.

Es ist nun andererseits:

$$\int\limits_i (R_p^2 + S_p^2 + T_p^2)\, d\tau$$

$$= -\int\limits_i \left[R_p\left(\Delta u_0 + k\frac{\partial \theta_0}{\partial x}\right) + S_p\left(\Delta v_0 + k\frac{\partial \theta_0}{\partial y}\right) + T_p\left(\Delta w_0 + k\frac{\partial \theta_0}{\partial z}\right)\right] d\tau,$$

$$= \int\limits_i [(1 + k)\, \tau_p\, \theta_0 + \pi_p\, \mathfrak{u}_0 + \chi_p\, \mathfrak{v}_0 + \varrho_p\, \mathfrak{w}_0]\, d\tau,$$

wo:

$$104)\quad \tau_p = \frac{\partial R_p}{\partial x} + \frac{\partial S_p}{\partial y} + \frac{\partial T_p}{\partial z},\ \pi_p = \frac{\partial T_p}{\partial y} - \frac{\partial S_p}{\partial z},\ \chi_p = \frac{\partial R_p}{\partial z} - \frac{\partial T_p}{\partial x},$$

$$\varrho_p = \frac{\partial S_p}{\partial x} - \frac{\partial R_p}{\partial y},$$

somit:

$$105)\qquad \int\limits_i (R_p^2 + S_p^2 + T_p^2)\, d\tau$$

$$< \sqrt{\int [(1+k)\tau_p^2 + \pi_p^2 + \chi_p^2 + \varrho_p^2]\, d\tau \int [(1+k)\,\theta_0^2 + \mathfrak{u}_0^2 + \mathfrak{v}_0^2 + \mathfrak{w}_0^2]\, d\tau}$$

oder, da:

$$\int_i [(1+k)\,\theta_0^2 + \mathfrak{u}_0^2 + \mathfrak{v}_0^2 + \mathfrak{w}_0^2]\, d\tau = + \int_i [u_0 R_p + v_0 S_p + w_0 T_p]\, d\tau,$$

$$\overline{<} \sqrt{\int_i (u_0^2 + v_0^2 + w_0^2)\, d\tau \int_i (R_p^2 + S_p^2 + T_p^2)\, d\tau},$$

$$\overline{<} L_p \int_i (R_p^2 + S_p^2 + T_p^2)\, d\tau, \text{ nach 103)},$$

so folgt aus 105):

$$106)\quad \int_i (R_p^2 + S_p^2 + T_p^2)\, d\tau \overline{<} L_p \int_i [(1+k)\,\tau_p^2 + \pi_p^2 + \chi_p^2 + \varrho_p^2]\, d\tau.$$

Es ist nun weiter nach 93):

$$107)\quad \int_i [(1+k)\,\tau_p^2 + \pi_p^2 + \chi_p^2 + \varrho_p^2]\, d\tau$$

$$= \int_i [(1+k)\,\tau^2 + \mathfrak{u}^2 + \mathfrak{v}^2 + \mathfrak{w}^2 - \lambda_1^2 C_1^2 - \lambda_2^2 C_2^2 - \cdots - \lambda_n^2 C_n^2]\, d\tau \overline{>} 0,$$

wo:

$$108)\quad \tau = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}, \quad \pi = \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \quad \chi = \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \quad \varrho = \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}.$$

Diese stets positive Größe 107) nimmt nach der soeben abgeleiteten Ungleichung mit wachsendem p fortdauernd ab, so daß, wie groß auch p sein möge:

$$109)\quad \begin{aligned} &\int_i [(1+k)\,\tau_p^2 + \pi_p^2 + \chi_p^2 + \varrho_p^2]\, d\tau \\ &\overline{<} \int_i [(1+k)\,\tau^2 + \pi^2 + \chi^2 + \varrho^2]\, d\tau, \end{aligned}$$

somit folgt nach 106):

$$110)\quad \int_i (R_p^2 + S_p^2 + T_p^2)\, d\tau \overline{<} L_p \int_i [(1+k)\,\tau^2 + \pi^2 + \chi^2 + \varrho^2]\, d\tau.$$

Diese Formel beweist die Behauptung, daß das Integral:

$$\int_i (R_p^2 + S_p^2 + T_p^2)$$

durch Vergrößerung von p unter jeden beliebigen Kleinheitsgrad herabgedrückt werden kann.

Wir wollen nun aber auch zeigen, daß die Funktionen

$R_p S_p T_p$ durch Vergrößerung von p unter jeden beliebigen Kleinheitsgrad herabgedrückt werden können.

Es ist:

$$111)\quad \int_i [(1+k)\,\tau_p^2 + \pi_p^2 + \chi_p^2 + \varrho_p^2]\,d\tau$$

$$< \sqrt{\int_i (R_p^2+S_p^2+T_p^2)\,d\tau \int_i \left[\left(\Delta R_p + k\frac{\partial \tau_p}{\partial x}\right)^2 + \left(\Delta S_p + k\frac{\partial \tau_p}{\partial y}\right)^2 + \left(\Delta T_p + k\frac{\partial \tau_p}{\partial z}\right)^2\right] d\tau},$$

und da:

$$112)\quad \int_i \left[\left(\Delta R_p + k\frac{\partial \tau_p}{\partial x}\right)^2 + \cdots\right] d\tau$$

$$= \int_i \left[\left(\Delta f_1 + k\frac{\partial \tau}{\partial x}\right)^2 + \cdots\right] d\tau - \lambda_1^4 C_1^2 - \lambda_2^4 C_2^2 - \cdots - \lambda_n^4 C_n^2 \geqq 0$$

eine mit wachsendem p stets abnehmende Größe, also:

$$113)\quad \int_i \left[\left(\Delta R_p + k\frac{\partial \tau_p}{\partial x}\right)^2 + \cdots\right] d\tau \leqq \int_i \left[\left(\Delta f_1 + k\frac{\partial \tau}{\partial x}\right)^2 + \cdots\right] d\tau$$

ist, so folgt aus 111) und 106):

$$114)\quad \int_i [(1+k)\,\tau_p^2 + \pi_p^2 + \chi_p^2 + \varrho_p^2]\,d\tau < \text{endl. Konst. } L_p.$$

Wir bemerken weiter, daß nach 112) die Reihe:

$$\lambda_1^4 C_1^2 + \lambda_2^4 C_2^2 + \cdots$$

konvergiert, und daß, wenn wir mit F eine der vier Größen:

$$\frac{\partial}{\partial x}(C_1 U_1 + C_2 U_2 + \cdots + C_n U_n)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y}(C_1 V_1 + C_2 V_2 + \cdots + C_n V_n) + \frac{\partial}{\partial z}(C_1 W_1 + C_2 W_2 + \cdots + C_n W_n),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(C_1 W_1 + C_2 W_2 + \cdots + C_n W_n) - \frac{\partial}{\partial z}(C_1 V_1 + C_2 V_2 + \cdots + C_n V_n),$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(C_1 U_1 + C_2 U_2 + \cdots + C_n U_n) - \frac{\partial}{\partial x}(C_1 W_1 + C_2 W_2 + \cdots + C_n W_n),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(C_1 V_1 + C_2 V_2 + \cdots + C_n V_n) - \frac{\partial}{\partial y}(C_1 U_1 + C_2 U_2 + \cdots + C_n U_n)$$

bezeichnen:

$$\int_t \Delta\, \overline{F}^2\, d\tau \overline{\overline{<}} \text{endl. Konst. } \lambda_p^2;$$

da nun, wenn wir mit F eine der vier Größen $\tau_p\, \pi_p\, \chi_p\, \varrho_p$ bezeichnen, (man vgl. die analoge Untersuchung auf S. 375):

$$|F| \overline{\overline{<}} \text{endl. Konst.} \sqrt{\frac{L_p}{\mathfrak{r}^3}} + \text{endl. Konst.} \sqrt{\mathfrak{r}}\, \lambda_p + \text{endl. Konst.},$$

wo $\mathfrak{r}$ eine beliebig kleine Länge sein kann, so ergiebt sich, wenn wir:

$$\mathfrak{r} = \text{endl. Konst. } \frac{1}{\lambda_p}$$

setzen:

$$\text{115)} \qquad \text{abs. Max. } (\tau_p\, \pi_p\, \chi_p\, \varrho_p) \overline{\overline{<}} \text{endl. Konst. } \frac{1}{\sqrt[4]{L_p}}.$$

Es bestehen nun die Formeln:

$$\text{116)} \quad R_p = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_t \tau_p \frac{d\tau}{r} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_t \varrho_p \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int_t \chi_p \frac{d\tau}{r} \cdots$$

Sei $(x\, y\, z)$ irgend ein Punkt in τ, wir konstruieren wieder um denselben, ähnlich wie S. 375, eine Kugel mit dem Radius $\mathfrak{r}$, bezeichnen das Gebiet, das τ und diese Kugel gemein haben, mit τ_1, dann ist:

$$\text{117}^{\text{a}}) \quad \begin{cases} |R_p^{\tau_1}| \overline{\overline{<}} \text{endl. Konst. abs. Max. } (\tau_p\, \varrho_p\, \chi_p) \displaystyle\int_{\tau_1} \frac{d\tau}{r^2}, \\ \overline{\overline{<}} \dfrac{\text{endl. Konst. } \mathfrak{r}}{\sqrt[4]{L_p}}, \text{ mit Rücksicht auf 115),} \end{cases}$$

wenn wir durch Hinzufügung des Index τ_1 andeuten, daß in 116) die Integrale rechts nur über τ_1 erstreckt werden sollen, ferner:

$$\text{117)} \quad \begin{cases} |R_p^{\tau-\tau_1}| < \text{endl. Konst.} \sqrt{\displaystyle\int_{\tau-\tau_1} \frac{d\tau}{r^4} \cdot \int_{\tau-\tau_1} (\tau_p^2 + \varrho_p^2 + \chi_p^2)\, d\tau}, \\ \overline{\overline{<}} \text{endl. Konst.} \sqrt{\dfrac{L_p}{\mathfrak{r}}}, \text{ mit Rücksicht auf 114).} \end{cases}$$

Somit folgt:

$$118) \qquad |R_p| \overline{<} \frac{c_1}{\sqrt[4]{L_p}} \mathfrak{r} + c_2 \sqrt{\frac{L_p}{\mathfrak{r}}},$$

wo c_1 und c_2 endliche Konstanten sind.

Setzen wir daher:

$$119) \qquad \mathfrak{r} = \sqrt{L_p}$$

so ergiebt sich:

$$120) \qquad |R_p| \overline{<} c \sqrt[4]{L_p}, \ldots$$

wo c eine endliche Konstante vorstellt.

Wir erhalten das Resultat:

IV. Jedes Tripel von Funktionen $f_1 f_2 f_3$, die an ω verschwinden, in τ mit ihren ersten Ableitungen eindeutig und stetig sind, und für welche die Ausdrücke:

$$\begin{aligned} &\Delta f_1 + k \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} \right), \\ &\Delta f_2 + k \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} \right), \\ &\Delta f_3 + k \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} \right), \end{aligned}$$

endlich und integrabel sind, kann in Reihen entwickelt werden, die nach den elastischen Funktionentripeln $U_j V_j W_j$ fortschreiten:

$$\begin{aligned} f_1 &= C_1 U_1 + C_2 U_2 + \cdots, \\ f_2 &= C_1 V_1 + C_2 V_2 + \cdots, \\ f_3 &= C_1 W_1 + C_2 W_2 + \cdots, \end{aligned}$$

Dabei sind die Konstanten dieser Entwicklungen:

$$C_j = \int_\tau (f_1 U_j + f_2 V_j + f_3 W_j)\, d\tau.$$

Berichtigungen zu der Abhandlung:

Untersuchungen zur allgemeinen Theorie der Potentiale von Flächen und Räumen. (Diese Ber. B. 31, S. 3.)

S. 6, Zeile 8 von unten lies:

„größer als echter Bruch $\times r_{12}$" statt „kleiner als r_{12}"
Anm. [2]) ist fortzulassen.

S. 9, Zeile 16 von oben lies:

„endl. Konst abs. Max. $H \cdot r_{12}$ statt „2 abs. Max. $H \cdot r_{12}$".

Berichtigung zu der Abhandlung I. (Diese Ber. B. 31, S. 37.)

S. 53, in Formel 36) lies: r_{12}^{ij} statt r_{12}.

S. 56, Zeile 12 und 13 von unten lies: „die" statt „deren erste Ableitungen";

in Formel 45 lies: $\left|\Xi_j\right|_1^2$ statt $\left|\frac{\partial\,\Xi_j}{\partial h}\right|_1^2$;

Zeile 9 von unten ist: „h eine beliebige tangentiale Richtung", zu streichen.

Sitzung der math.-phys. Klasse vom 9. Juni 1906.

1. Herr Joh. Rückert teilt die Resultate einer mit Herrn Professor Dr. Siegfried Mollier ausgeführten Untersuchung: „Über die Entwicklung des Blutes bei Wirbeltieren“ mit. Dieselben werden anderweit veröffentlicht.

Das Blut ursprünglich entodermaler Herkunft entsteht bei den gnathostomen Wirbeltieren aus dem ventralen Mesoblast, der seinerseits bei den einzelnen Wirbeltierklassen mehr oder weniger innige genetische Beziehung zum Entoblast besitzt.

2. Herr C. v. Voit legt eine von dem korrespondierenden Mitgliede Jakob Lüroth in Freiburg i. Br. eingesandte Abhandlung: „Über die Extreme einer Funktion von zwei oder drei veränderlichen Größen“ vor.

In dieser Arbeit wird gezeigt, daß man den Weiherstraßschen sogenannten Vorbereitungssatz benutzen kann, um die Untersuchung des Extremums einer Funktion auf die Frage zurückzuführen, ob eine algebraische Gleichung nur komplexe Wurzeln hat. Sind die Bedingungen dafür bekannt, so läßt sich bei zwei Variabeln die Untersuchung leicht erledigen; bei mehr Veränderlichen sind, abgesehen vom einfachsten Falle, größere Rechnungen oder Reihenentwicklungen nötig.



Über die Extreme einer Funktion von zwei oder drei veränderlichen Grössen.

Von **J. Lüroth.**

(Eingelaufen 9. Juni.)

§ 1.

Es sei $R(x, y)$ eine Potenzreihe der zwei reellen Veränderlichen x und y, die für $(x = 0,\ y = 0)$ verschwindet. Die Veränderlichen seien durch einen Punkt in einer Ebene dargestellt. Um zu untersuchen, ob dem Ursprung O ein Maximum oder Minimum von $R(x, y)$ entspricht, kann man den folgenden Weg einschlagen.

Es seien $(x, y)_{2p}$ die Glieder niedrigster Dimension in R. Man kann immer annehmen, daß sie eine der Veränderlichen, etwa y, in der $2p^{\text{ten}}$ Potenz enthalten, denn wenn dies nicht an sich der Fall ist, kann man es immer durch eine passende lineare Transformation der Veränderlichen erreichen.

Nach dem Weierstraßschen „Vorbereitungssatze“[1]) kann man

$$R(x, y) = C f(x, y) \cdot F(x, y) \qquad 1)$$

setzen, wo C eine Konstante, $F(x, y)$ eine Potenzreihe nach x und y ist, die für $x = 0$, $y = 0$ sich auf Eins reduziert, und $f(x, y)$ eine ganze rationale Funktion von y bezeichnet, die in Bezug auf y vom Grade $2p$ ist, und deren Koeffizienten Potenzreihen nach x sind, die für $x = 0$ verschwinden. Dabei hat y^{p} den Koeffizienten Eins. Soll nun im Punkte O ein

[1]) Weierstraß' Werke, Bd. 2, S. 135. Stickelberger, Math. Annalen Bd. 30, S. 401.

Extremum von R stattfinden, so muß es möglich sein um O ein Quadrat Q so abzugrenzen, daß in ihm R nur in dem Punkte O und sonst nicht verschwindet. Wenn man Q gehörig klein macht, sind die in ihm liegenden Nullen von R mit denen von $f(x, y)$ identisch. Also darf in Q kein von O verschiedener Nullpunkt von f liegen. Wie Weierstraß gezeigt hat, werden aber alle Nullpunkte von R in einem passenden kleinen Bereich erhalten, indem man die Gleichung $f = 0$ nach y auflöst, wobei man x auf ein gewisses Gebiet, $|x| < \delta$, beschränkt. Soll also in O ein Extremum von R eintreten, so muß ein Gebiet von x, $|x| < \delta$. existieren, für welches die Gleichung $f(x, y) = 0$ nur komplexe Wurzeln y liefert, den Punkt $x = 0$ ausgenommen.

Ist umgekehrt diese Bedingung erfüllt so gibt es ein Gebiet um O, in dem $f(x, y)$ überall positiv ist, R also als Zeichen von C hat und nur für O selbst verschwindet. Dann liefert der Punkt O sicher ein Extremum von R. Ein uneigentliches Extremum findet statt, wenn für eine oder mehrere den Punkt O enthaltende Kurven R verschwindet, ohne daß beim Durchschreiten dieser Kurven ein Zeichenwechsel eintritt. Dies verlangt, daß die Gleichung $f(x, y) = 0$ für y reelle Werte ergiebt, ohne daß in deren Nähe f verschiedene Zeichen hätte. Die entsprechenden Wurzeln besitzen dann eine gerade Vielfachheit. Dies erfordert, daß die Diskriminante von $f(x, y)$ gebildet nach y, identisch Null, und daß $f(x, y)$ von der Form $g(x, y)^2 \cdot h(x, y)$ sei, wo h nur komplexe Wurzeln hat.

Die Bedingungen dafür, daß $f(x, y) = 0$ nur komplexe Wurzeln hat, können sich in der Form darstellen

$$S_1(x) > 0, \quad S_2(x) > 0, \ldots, \tag{2}$$

wo die S Potenzreihen nach x sind, die für $x = 0$ verschwinden. Es ist aber auch möglich — und dies tritt z. B. schon ein, wenn $f(x, y)$ vom vierten Grade ist — daß jene Bedingungen nur die alternative Form haben:

$$\text{wenn } S_1(x) > 0 \text{ ist, muß } S_2(x) > 0 \ldots \tag{3}$$

$$\text{wenn aber } S_1(x) < 0 \text{ ist, muß } S_3(x) > 0 \ldots \text{ sein.}$$

Aus den Exponenten der niedrigsten Potenzen von x in den Reihen S und den Zeichen von deren Koeffizienten ist leicht zu entscheiden, ob es für x einen Bereich gibt, der die Bedingungen 2) oder 3) erfüllt.

Als ein Beispiel betrachte ich die Reihe

$$R(x.y) = y^4 + a\,x^5\,y + x^6 + b\,x^8\,y + c\,x^7\,y^2 + d\,x^6\,y^3 + (x,y)_5\,y^4 + \cdots$$

Durch unbestimmte Koeffizienten findet man $C = 1$,

$$f(x,y) = y^4 + y^3\,(d\,x^6 + \cdots) + y^2\,(c\,x^7 + \cdots) + y\,(a\,x^5 + b\,x^8 + \cdots) + x^6 + \cdots$$

$$F(x,y) = 1 + (x,y)_5 + \cdots$$

Schafft man in $f(x,y)$ das Glied mit y^3 fort indem man

$$y = z - \frac{1}{4}(d\,x^6 + \cdots)$$

setzt, so erhält man

$$z^4 + z^2\,(c\,x^7 + \cdots) + z\,(a\,x^5 + b\,x^8 + \cdots) + x^6 + \cdots$$

Die Bedingungen, daß eine Gleichung vierten Grades

$$z^4 + r\,z^2 + s\,z + t = 0 \qquad 4)$$

lauter komplexe Wurzeln habe, sind nun: die Diskriminante

$$16\,r^4\,t - 4\,r^3\,s^2 + 144\,r\,s^2\,t - 128\,r^2\,t^2 + 256\,t^3 - 27\,s^4$$

muß > 0, und entweder

$$r^2 - 4\,t < 0 \text{ oder } r^2 - 4\,t \geqq 0 \text{ und } r > 0$$

sein.

Die Diskriminante wird hier $256\,(x^{18} + \cdots)$, also für gehörig kleine x positiv.

Die Funktion $r^2 - 4\,t$ wird $= -4\,x^6 + \cdots$ folglich < 0. Somit sind die Bedingungen komplexer Wurzeln für gehörig kleine x erfüllt und daher gibt es ein Gebiet, in dem die

gegebene Reihe R stets positiv ist, so daß dem Wertsystem $(x = 0,\ y = 0)$ ein Minimum entspricht und zwar ein eigentliches, weil die Diskriminante nicht identisch Null ist.

§ 2.

Bei Funktionen von drei Veränderlichen lassen sich die ersten Betrachtungen des vorigen Paragraphen ebenfalls durchführen. An die Stelle der Ungleichungen 2) oder 3) treten dann änliche, in denen statt der Reihen nach x, solche nach zwei Veränderlichen, etwa x und y, vorkommen. Wenn die Bedingungen für komplexe Wurzeln sich stets in die Form 2) bringen ließen, so könnte man nach dem in § 1 gegebenen Verfahren untersuchen, ob es einen Bereich gibt, in dem diese Ungleichungen erfüllt sind. Schwieriger ist die Entscheidung im Falle 3) der alternativen Bedingungen, falls es Gebiete gibt, für die $S_1 > 0$ und andere in denen $S_1 < 0$ ist. Setzt man nach dem Vorbereitungssatze

$$S_1(x, y) = C_1 \cdot f_1(x, y)\, F_1(x, y)$$
$$S_2(x, y) = C_2 \cdot f_2(x, y)\, F_2(x, y),$$

wo die C, f, F analoge Bedeutung haben wie in § 1, so wird man zu untersuchen haben, ob $f_1(x, y) = 0$ als Gleichung für y reelle oder komplexe Wurzeln hat, und ferner ob aus $C_1 f_1(x, y) > 0$ stets auch $C_2 f_2(x, y) > 0$ folge.

Gesetzt es seien die Bedingungen aufzustellen, daß aus $F(w) > 0$ folge $G(w) > 0$, wenn $F(w)$ und $G(w)$ ganze Funktionen von w sind. Man zerlege $F(w) = \Phi(w)^2 f(w)$, $G(w) = \Psi(w)^2 g(w)$ wo die Funktionen f und g nur einfache Nullen haben. Ist $f(w)$ constant oder hat es nur komplexe Nullstellen, so muß $g(w)$ stets > 0 sein, darf also nur komplexe Nullen haben. Hat $f(w) = 0$ reelle Wurzeln, so muß entweder $g(w)$ stets > 0 sein, darf also nur komplexe Nullen haben. Oder es ist notwendig und hinreichend, daß für alle reellen Nullen von $f(w)$ die Funktion $g(w) > 0$ sei, und für alle reellen Nullen von $g(w)$ die Funktion $f(w)$ negativ aus-

falle. Unter Umständen folgt die eine Aussage aus der anderen. Stellt man sich die beiden Gleichungen auf, von denen die eine die Werte von f für alle — reelle und komplexe — Nullen von g, und die andere die Werte von g in den Nullpunkten von f zu Wurzeln hat, so sind deren Koeffizienten rational durch die Koeffizienten von F und G ausdrückbar. Die eine von ihnen darf dann keine positiven, die andere keine negativen Wurzeln haben, was sich mit Sturmschen Reihen, vielleicht schon mit der Descartes'schen Zeichenregel, entscheiden läßt.

Wendet man diese Methode auf den vorhin erörterten Fall an, so kommt man wieder auf die Betrachtung von Potenzreihen nach x zurück. Hier dürfte es indessen bequemer sein für die Wurzeln von $f_1(x, y) = 0$ und $f_2(x, y) = 0$ in bekannter Weise Reihenentwicklungen aufzustellen und mit deren Hilfe die Entscheidung nach den oben gegebenen Kriterien zu treffen.

Als Beispiel diene die Reihe

$$z^4 + z^2(3y^2 - x^2 + (x, y)_4 + \cdots) + y^4 + x^4 + (x, y)_5 + \cdots$$

die schon die Form der Funktion f hat.

In den Bezeichnungen von 4) ist $s = 0$, daher die Diskriminante $= 16(r^2 - 4t)^2 \cdot t$. Damit die Gleichung für z vier komplexe Wurzeln habe, muß also $t > 0$, und entweder $r^2 - 4t < 0$ oder $r^2 - 4t \geqq 0$ und $r > 0$ sein. Setzt man

$$(x, y)_5 = d_0 x^5 + d_1 x^4 y + \cdots d_5 y^5$$

so wird

$$t = y^4 + y^3(d_3 x^2 + \cdots) + y^2(d_2 x^3 + \cdots) + y(d_1 x^4 + \cdots) \\ + x^4 + d_0 x^5 \cdots = f_1(x, y).$$

Mit $y = \eta - \frac{1}{4}(d_3 x^2 + \cdots)$ folgt

$$f_1(x, y) = \eta^4 + \eta^2(d_2 x^3 + \cdots) + \eta(d_1 x^4 + \cdots \\ + x^4 + d_0 x^5 + \cdots$$

Schreibt man dies

$$f_1(x, y) = \eta^4 + r_1 \eta^2 + s_1 \eta + t_1,$$

so wird die Diskriminante $256\, x^{12} + \cdots, r_1^2 - 4\, t_1 = -4\, x^4 + \cdots$ Also sind für gehörig kleine x die Bedingungen komplexer Wurzeln erfüllt, t ist für kleine x und y positiv und verschwindet nur für $x = y = 0$. Die Kombination $r^2 - 4\, t$ ergibt sich

$$5\, y^4 - 6\, y^2 x^2 - 3\, x^4 - 4\, (x, y)_5 + 6\, y^2 (x, y)_4 - 6\, x^2 (x, y)_4 + \cdots$$

Setzt man diese Reihe $S_2(x\, y)$ und bestimmt dazu $f_2(x, y)$, so wird $C_2 = 5$,

$$f_2(x, y) = y^4 + y^3 \left(-\frac{4}{5}\, d_3\, x^2 + \cdots\right) + y^2 \left(-\frac{6}{5}\, x^2 + \cdots\right)$$
$$+ y \left(-\frac{4}{5}\, d_1\, x^4 + \cdots\right) - \frac{3}{5}\, x^4 + \cdots$$

Mit $y = \eta - \frac{1}{5}\, d_3\, x^2 + \cdots$ folgt

$$f_2(x, y) = \eta^4 + \eta^2 \left(-\frac{6}{5}\, x^2 + \cdots\right)$$
$$+ \eta \left(\left(-\frac{4}{5}\, d_1 + \frac{12}{5}\, d_3\right) x^4 + \cdots\right) - \frac{3}{5}\, x^4 + \cdots$$

Da die Diskriminante

$$= -\left(16 \cdot \frac{6^4}{5^4} \cdot \frac{3}{5} + 128 \cdot \frac{6^2}{5^2} \cdot \frac{9}{25} + 256\, \frac{3^3}{5^3}\right) x^{12} + \cdots$$

ist, so hat $f_2(x, y) = 0$ zwei reelle und zwei komplexe Wurzeln und folglich kann $r^2 - 4\, t = S_2(x, y)$ positiv oder negativ sein. Somit liegt der Fall 3) vor und wir haben noch $r = S_3(x, y)$ zu betrachten. Hier findet sich $C_3 = 3$ und

$$f_3(x, y) = y^2 + y\, (e_1\, x^3 + \cdots) - \frac{1}{3}\, x^2 + \cdots$$

wobei $(x, y)_4 = e_0\, x^4 + 3\, e_1\, x^3\, y + \cdots$ gesetzt ist. Es muß nun, wenn die Gleichung $f(x, y, z) = 0$ nur komplexe Wurzeln haben soll, da die Diskriminante > 0 ist, aus $r^2 - 4\, t > 0$ auch

$r > 0$ oder aus $f_2(x, y) > 0$ $f(x, y) > 0$ folgen. Da $f_2(x, y) = 0$ nur zwei reelle Wurzeln y hat, so genügt es hiezu, daß die Nullen von $f_3(x, y)$ die Funktion $f_2(x, y) < 0$ machen. Jene Nullen haben die Entwickelung

$$y = \frac{x}{\sqrt{3}} + \cdots \text{ und } y = -\frac{x}{\sqrt{3}} + \cdots$$

Trägt man in $f_2(x, y)$ ein, so erhält man beidemale $-\frac{8}{9}x^4 + \cdots$ Alles zusammengenommen folgt also, daß es für die x, y einen Bereich gibt, in dem die Gleichung $f(x, y, z) = 0$ nur komplexe Wurzeln hat und somit stets > 0 bleibt. Aber die Diskriminante kann auch Null werden. Dies tritt ein für $t = 0$ und $r^2 - 4t = 0$, also für die Kurven $f_1(x, y) = 0$ und $f_2(x, y) = 0$. Die erstere hat, wie oben bewiesen, außer $(x = y = 0)$ keinen reellen Punkt in der Nähe des Ursprungs. Die zweite geht aber mit zwei reellen Ästen durch den Ursprung, und für sie wird

$$f(x, y, z) = \left(z^2 + \frac{r}{2}\right)^2,$$

also $= 0$, wenn $z^2 + \frac{r}{2} = 0$ ist. Für die reellen Wurzeln von $f_2(x, y) = 0$ ergibt sich

$$y = \pm\sqrt{\frac{3 + \sqrt{24}}{5}}\,x + \cdots$$

$$r = \frac{1}{5}(3\sqrt{24} + 4)\,x^2 + \cdots$$

$$z^2 = -\frac{1}{10}(3\sqrt{24} + 4)\,x^2 + \cdots;$$

also werden, für kleine x, auch wenn die Deskriminante Null ist, die Wurzeln von $f(x, y, z) = 0$ imaginär, folglich wird diese Funktion in der Nähe des Ursprungs überhaupt nicht Null und bleibt beständig > 0. Sie hat demnach im Ursprung ein eigentliches Minimum.

§ 3.

Wenn man die Bedingungen für komplexe Wurzeln stets durch eine Reihe von Ungleichungen darstellen könnte, ohne Alternative, könnte man das geschilderte Verfahren auf Funktionen von beliebig vielen Variabeln ausdehnen. Sicher geht dies an, wenn die Glieder niedrigster Dimension in allen vorkommenden Reihen von der zweiten Dimension sind.

Gegenüber den Methoden von Scheeffer, Stolz und Dantscher[1]) hat die obige den Vorteil, daß sie theoretisch übersichtlicher ist und in jedem Fall die Entscheidung liefert. Ein Nachteil ist, wenigstens zur Zeit, daß die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für lauter komplexe Wurzeln einer Gleichung nur für Gleichungen der niedrigsten Grade bekannt sind und für Gleichungen höherer Grade erst durch die Sturmschen Reihen gebildet werden müssen. Ferner ist bei Funktionen von mehr als drei Veränderlichen die Anwendung von Reihenentwicklungen nicht stets möglich und damit unter Umständen die Entscheidung nach der im § 2 entwickelten Methode mühsam.

[1]) Zitate findet man in der Enzykl. d. Math. Bd. 2, Teil 1, S. 83.

Sitzung der math.-phys. Klasse vom 7. Juli 1906.

1. Herr Paul Groth hält einen Vortrag: „Über die Krystallstruktur des Ammoniumjodides und seiner Alkylderivate.“ Die Abhandlung wird in der Zeitschrift für Krystallographie und Mineralogie veröffentlicht werden.

Auf Grund der neueren Anschauungen über die Krystallstruktur wurde an Modellen erläutert, wie sich von der kubischen Krystallstruktur des Ammoniumjodides die tetragonale Struktur des Tetramethyl- und des Tetraäthylammoniumjodides ableiten läßt, und aus diesen sich die Struktur und somit auch die Krystallform und die Volumenverhältnisse des intramediären Dimethyldiäthylammoniumjodides in einer mit der Erfahrung übereinstimmenden Weise ergeben.

2. Herr Alfred Pringsheim spricht „Über das Additions-Theorem der elliptischen Funktionen.“

Auf gemeinsamer, überaus einfacher Grundlage werden die Additions-Theoreme sowohl der Weierstraß'schen Pe-Funktion als auch der Jacobi'schen Funktionen hergeleitet, ohne daß von deren Darstellung durch Sigma- bezw. Theta-Quotienten Gebrauch gemacht wird.

3. Herr August Rothpletz legt eine Fortsetzung zu den wissenschaftlichen Ergebnissen der Merzbacher'schen Tian-Schan-Expedition vor; nämlich „III. Die Gesteine des Profiles durch das südliche Musart-Tal im zentralen Tian-Schan“ von P. A. Kleinschmidt und P. H. Limbrock, S. V. D. Die Abhandlung ist für die Denkschriften bestimmt.



Über das Additions-Theorem der elliptischen Funktionen.

Von **Alfred Pringsheim.**

(*Eingelaufen 7. Juli.*)

Die im folgenden mitgeteilte Methode zur Herleitung des Additions-Theorems der elliptischen Funktionen dürfte zwar kaum danach angetan sein, auf prinzipielle Neuheit irgendwelchen Anspruch zu erheben. Immerhin ist sie wohl, wie ich glaube, in der hier angegebenen Weise bisher nicht durchgeführt worden, scheint mir aber andererseits einer solchen Durchführung nicht unwert, da sie auf gemeinsamer, überaus einfacher Grundlage ganz direkt und ohne jeden Kunstgriff nicht nur die verschiedenen Formen des Additions-Theorems für das Weierstraßsche $\wp u$, sondern auch die Additions-Theoreme für die Jacobischen Funktionen $sn\, u$, $cn\, u$, $dn\, u$ liefert. Dabei wird von der Darstellung der Funktionen $\wp u$ bzw. $sn\, u$ durch Sigma- bzw. Theta-Quotienten keinerlei Gebrauch gemacht. Als Beweismittel dienen vielmehr lediglich die bekannten Liouvilleschen Sätze über Anzahl und Summe der Nullstellen bzw. Pole einer doppelt-periodischen Funktion und die Differentialgleichung für $\wp u$ bzw. $sn\, u$.

§ 1.

Additions-Theorem für gewisse doppelt-periodische Funktionen zweiter Ordnung.

Es sei $\varphi(u)$ eine eindeutige doppelt-periodische Funktion, welche im ersten Perioden-Parallelogramm nur für $u = 0$ und zwar von der zweiten Ordnung unendlich wird. Es ist dann

also $\varphi(u)$ eine doppelt-periodische Funktion zweiter Ordnung und zwar allemal eine gerade Funktion[1]). Denn, da die Summe der im ersten Perioden-Parallelogramm gelegenen Pole den Wert 0 hat, so wird:

$$\varphi(v) = \varphi(u), \text{ wenn: } u + v = 0,$$

d. h. man hat in der Tat:

$$\varphi(-u) = \varphi(u).$$

Es seien ferner u_1, u_2 zwei beliebige Zahlen von der Beschaffenheit, daß $\varphi(u_1)$, $\varphi(u_2)$ nicht unendlich und von einander verschieden, d. h. man habe, wenn die Perioden von $\varphi(u)$ mit 2ω, $2\omega'$ bezeichnet werden:

$$\left.\begin{array}{lll} (1) & u_1 \not\equiv 0 & u_2 \not\equiv 0 \\ (2) & u_2 \not\equiv -u_1 & \\ (3) & u_2 \not\equiv u_1 & \end{array}\right\} (\text{mod. } 2\omega, 2\omega').$$

Setzt man sodann:

$$\frac{\varphi'(u_1) - \varphi'(u_2)}{\varphi(u_1) - \varphi(u_2)} = Q, \tag{4}$$

so besteht die Identität:

$$\varphi'(u_1) - Q \cdot \varphi(u_1) = \varphi'(u_2) - Q \cdot \varphi(u_2), \tag{5}$$

und, wenn noch gesetzt wird:

$$\left.\begin{array}{l} \varphi'(u_1) - Q \cdot \varphi(u_1) \\ \varphi'(u_2) - Q \cdot \varphi(u_2) \end{array}\right\} = R, \text{ also: } R = \frac{\varphi(u_1)\varphi'(u_2) - \varphi(u_2)\varphi'(u_1)}{\varphi(u_1) - \varphi(u_2)}, \tag{6}$$

so folgt zunächst, daß der Ausdruck

$$\varphi'(u) - Q \cdot \varphi(u) - R$$

die beiden nach den Moduln 2ω, $2\omega'$ inkongruenten Nullstellen $u = u_1$ und $u = u_2$ und folglich, da er eine doppelt-

---

[1]) In der Tat folgt ja aus der Vorraussetzung, daß die fragliche Funktion von der Form

$$\varphi(u) = A \cdot \wp u + B$$

sein muß, wovon aber im Texte kein Gebrauch gemacht wird.

periodische Funktion dritter Ordnung mit dem dreifachen Pole $u = 0$ darstellt, noch die durch die Gleichung:

$$u_1 + u_2 + u_3 = 0 \tag{7}$$

definierte Nullstelle $u = u_3$ besitzen muß. Da hiernach:

$$\varphi'(u) - Q \cdot \varphi(u) - R = 0 \quad \text{für } u = u_1, u_2, u_3, \tag{8}$$

so ergibt sich fürs erste, daß allemal die Relation besteht:

$$\begin{vmatrix} \varphi'(u_1) & \varphi(u_1) & 1 \\ \varphi'(u_2) & \varphi(u_2) & 1 \\ \varphi'(u_3) & \varphi(u_3) & 1 \end{vmatrix} = 0, \tag{9}$$

wenn u_1, u_2, u_3 irgend drei durch die Gleichung (7) verbundene, lediglich den Beschränkungen (1) — (3) genügende Zahlen bedeuten. Sie bleibt überdies auch noch giltig, wenn man die Beschränkung (3) fallen läßt, da im Falle $u_2 \equiv u_1 \pmod{2\omega, 2\omega'}$ die Determinante (9) wegen Gleichheit zweier Zeilen identisch verschwindet.

Aus Gleichung (8) folgt nun weiter, daß für $u = u_1, u_2, u_3$:

$$\varphi'(u)^2 = (Q \cdot \varphi(u) + R)^2$$

also:

$$\varphi'(u)^2 - Q^2 \cdot \varphi(u)^2 - 2\,Q\,R \cdot \varphi(u) - R^2 = 0. \tag{10}$$

Andererseits muß $\varphi(u)$ als eindeutige doppelt-periodische Funktion zweiter Ordnung mit zweifachem Pol einer Differentialgleichung von folgender Form genügen:[1])

$$\varphi'(u)^2 = a_0 \cdot \varphi(u)^3 + a_1 \cdot \varphi(u)^2 + a_2 \cdot \varphi(u) + a_3 \tag{11}$$

Durch Einsetzen dieser für jeden Wert von u giltigen Darstellung von $\varphi'(u)^2$ in die Gleichung (10) ergibt sich, daß die in Bezug auf $\varphi(u)$ kubische Gleichung

---

[1]) Zur Herleitung dieses Resultates ist es keineswegs erforderlich, den Weg über die Begehung $\varphi(u) = A \cdot \wp\, u + B$ oder irgend eine andere spezielle Darstellungsform für $\varphi(u)$ zu nehmen. Es genügt dazu, außer den Liouvilleschen Sätzen über Anzahl und Summe der Nullen bzw. Pole noch denjenigen heranzuziehen, welcher die Konstanz einer doppelt-periodischen Funktion ohne Pole besagt.

$$(12) \quad a_0 \cdot \varphi(u)^3 - (Q^2 - a_1) \cdot \varphi(u)^2 - (2\,QR - a_2) \cdot \varphi(u) - (R^2 - a_3) = 0$$

die Wurzeln $\varphi(u_1)$, $\varphi(u_2)$, $\varphi(u_3)$ besitzt. Daraus folgt aber,[1]) daß:

$$\text{(I)} \qquad \varphi(u_1) + \varphi(u_2) + \varphi(u_3) = \frac{1}{a_0} \cdot Q^2 - \frac{a_1}{a_0},$$

$$\text{(II)} \quad \varphi(u_1) \cdot \varphi(u_2) + (\varphi(u_1) + \varphi(u_2)) \cdot \varphi(u_3) = -\frac{2}{a_0} \cdot QR + \frac{a_2}{a_0},$$

$$\text{(III)} \qquad \varphi(u_1) \cdot \varphi(u_2) \cdot \varphi(u_3) = \frac{1}{a_0} \cdot R^2 - \frac{a_3}{a_0}.$$

Man gewinnt also auf diese Weise drei verschiedene Formeln zur Darstellung von $\varphi(u_3)$, d. h. von $\varphi(u_1 + u_2)$, als rationale Funktion von $\varphi(u_1)$, $\varphi(u_2)$, $\varphi'(u_1)$, $\varphi'(u_2)$, somit drei verschiedene Formen für das Additions-Theorem der Funktion $\varphi(u)$.

Schließlich kann man noch mit Hilfe einer einfachen Stetigkeits-Betrachtung die ursprünglich eingeführte, lediglich durch die für Q und R gewählte Form geforderte, nach Lage der Sache offenbar aber unnötige Beschränkung $u_2 \neq u_1$ (siehe Gl. (2)) beseitigen. Hierzu hat man Q und R nur in die Form zu setzen:

$$Q = \frac{\varphi'(u_1)^2 - \varphi'(u_2)^2}{(\varphi(u_1) - \varphi(u_2))\,(\varphi'(u_1) + \varphi'(u_2))}$$

$$(13) \quad = \frac{a_0(\varphi(u_1)^2 + \varphi(u_1) \cdot \varphi(u_2) + \varphi(u_2)^2) + a_1(\varphi(u_1) - \varphi(u_2)) + a_2}{\varphi'(u_1) + \varphi'(u_2)}$$

$$R = \frac{\varphi(u_1)^2 \cdot \varphi'(u_2)^2 - \varphi(u_2)^2 \cdot \varphi'(u_1)^2}{(\varphi(u_1) - \varphi(u_2))\,(\varphi(u_1) \cdot \varphi'(u_2) + \varphi(u_2) \cdot \varphi'(u_1))}$$

$$(14) \quad = \frac{-a_0 \cdot \varphi(u_1)^2 \cdot \varphi(u_2)^2 + a_2 \varphi(u_1) \cdot \varphi(u_2) + a_3(\varphi(u_1) + \varphi(u_2))}{\varphi(u_1) \cdot \varphi'(u_2) + \varphi(u_2) \cdot \varphi'(u_1)}.$$

---

[1]) Man bemerke, daß $\varphi(u_1)$, $\varphi(u_2)$, $\varphi(u_3)$ stets alle möglichen Wurzeln der kubischen Gl. (12) darstellen. Denn auf Grund der Voraussetzung (2) und (3) hat man stets $\varphi(u_2) \neq \varphi(u_1)$. Zugleich ist aber auch $\varphi(u_3) \neq \varphi(u_1)$ und $\varphi(\varphi u_3) \neq \varphi(u_2)$, außer wenn $u_2 \equiv -2u_1$ oder $u_2 \equiv -\frac{u_1}{2}$ (mod 2ω, $2\omega'$), in welchen Spezialfällen dann $\varphi(u_3) = \varphi(u_1)$ bzw. $\varphi(u_3) = \varphi(u_2)$ als Doppelwurzel auftritt.

§ 2.

Additions-Theorem der Funktion $\wp u$.

Die Funktion $\wp u$ besitzt offenbar genau den Charakter $\varphi(u)$. Man findet also zunächst, indem man in Gl. (9) $\varphi(u) = \wp u$ setzt:

$$(15) \quad \begin{vmatrix} \wp' u_1 & \wp u_1 & 1 \\ \wp' u_2 & \wp u_2 & 1 \\ \wp' u_3 & \wp u_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ (wenn } u_1 + u_2 + u_3 = 0 \text{ bzw. } \equiv 0),$$

eine Relation, welche sonst gewöhnlich als Folgerung aus dem Additions-Theorem der Funktion $\wp u$ hergeleitet wird[1]) und einer bekannten geometrischen Deutung (geradlinige Lage dreier Punkte der Kurve dritter Ordnung: $x = \wp u$, $y = \wp' u$) fähig ist.

Da die Gl. (11) hier die Form annimmt:

$$(16) \qquad (\wp' u)^2 = 4 \wp^3 u - g_2 \wp u - g_3,$$

so daß also:

$$(17) \qquad a_0 = 4, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = -g_2, \quad a_3 = -g_3,$$

so liefert die Gleichung (I), wenn man noch $\wp u_3$ durch $\wp(u_1 + u_2)$ ersetzt, das Additions-Theorem in der bekannten Form:

$$(18) \quad \wp u_1 + \wp u_2 + \wp(u_1 + u_2) = \frac{1}{4} \left(\frac{\wp' u_1 - \wp' u_2}{\wp u_1 - \wp u_2} \right)^2,$$

welche mit Benützung von Gl. (13) in die folgende, auch im Falle $u_2 = u_1$ brauchbare übergeht:

$$(19) \quad \wp u_1 + \wp u_2 + \wp(u_1 + u_2) = \frac{1}{4} \left(\frac{4(\wp^2 u_1 + \wp u_1 \cdot \wp u_2 + \wp^2 u_2) - g_2}{\wp' u_1 + \wp' u_2} \right)^2.$$

Die andere bekannte Form des Additions-Theorems resultiert sowohl aus Gl. (II), als aus Gl. (III). Man findet z. B. aus Gl. (III):

---

[1]) S. z. B. H. Burkhardt, Elliptische Funktionen, p. 62.

$$\wp u_1 \cdot \wp u_2 \cdot \wp u_3 = \frac{1}{4}(R^2 + g_3),$$

wo:

$$R^2 + g_3 = \frac{\wp^2 u_1 (\wp' u_2)^2 + \wp^2 u_2 (\wp' u_1)^2 - 2\wp u_1 \wp u_2 \cdot \wp' u_1 \wp' u_2}{(\wp u_1 - \wp u_2)^2} + g_3$$

$$= \wp u_1 \wp u_2 \frac{(4\wp u_1 \wp u_2 - g_2)(\wp u_1 + \wp u_2) - 2\wp' u_1 \wp' u_2 - 2 g_3}{(\wp u_1 - \wp u_2)^2},$$

sodaß sich ergibt:

$$(20)\quad \wp(u_1 + u_2) = \frac{\left(2\wp u_1 \wp u_2 - \frac{1}{2} g_2\right)(\wp u_1 + \wp u_2) - \wp' u_1 \wp' u_2 - g_3}{2(\wp u_1 - \wp u_2)^2}.$$

§ 3.

Die Additions-Theoreme der Funktionen snu, cnu, dnu.

Aus den Beziehungen

$$sn(u + 2K) = -snu \qquad sn(u + 2iK') = snu$$
$$sn(2mK + 2niK') = 0 \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

erkennt man, daß $sn^2 u$ die Perioden $2K$, $2iK'$ und somit im ersten Perioden-Parallelogramm die einzige Nullstelle $u = 0$ und zwar als zweifache Nullstelle besitzt. Es ist somit $sn^{-2} u$ wiederum eine Funktion vom Charakter $\varphi(u)$[1]) (wenn noch gesetzt wird: $\omega = K$, $\omega' = iK'$). Aus Gl. (9) folgt dann durch die Substitution von $\varphi(u) = sn^{-2} n$, also: $\varphi'(u) = -2sn^{-3} u \cdot sn' u$, wenn man die betreffende Gleichung noch mit $-\frac{1}{2} sn^3 u$ multipliziert:

$$(21)\quad \begin{vmatrix} sn' u_1 & sn u_1 & sn^3 u_1 \\ sn' u_2 & sn u_2 & sn^3 u_2 \\ sn' u_3 & sn u_3 & sn^3 u_3 \end{vmatrix} = 0 \text{ (wenn } u_1 + u_2 + u_3 = 0 \text{ bzw.} \equiv 0).$$

---

[1]) Dies würde natürlich auch unmittelbar aus der Formel:

$$sn^{-2} u = \frac{1}{e_1 - e_3} \wp\left(\frac{u}{\sqrt{e_1 - e_3}}\right)$$

folgen, von welcher ich aber absichtlich keinen Gebrauch machen will.

eine Relation, welche in analogem Zusammenhange, wie die Gl. (15) auftritt, wenn man die Theorie der Kurven dritter Ordnung mit homogenen statt mit rechtwinkeligen Koordinaten behandelt.[1])

Aus der Differentialgleichung:

$$(sn' u)^2 = (1 - sn^2 u)(1 - k^2 sn^2 u)$$

folgt sodann durch Multiplikation mit $(-2 sn^{-3} u)^2 = 4 sn^{-6} u$:

$$(-2 sn^3 u \cdot sn' u)^2 = 4 sn^{-2} u (sn^{-2} u - 1)(sn^{-2} u - k^2),$$

sodaß also die Differential-Gleichung für $\varphi(u) = sn^{-2} u$ folgendermaßen lautet:

$$\varphi'(u)^2 = 4\varphi(u)^3 - 4(1 + k^2)\varphi(u)^2 + 4k^2\varphi(u). \tag{22}$$

Man übersieht unmittelbar, daß die einfachste Form des Additions-Theorems hier durch Anwendung der Formel (III) resultieren muß. Man findet (wegen $a_3 = 0$) auf diese Weise:

$$sn^{-2} u_1 \cdot sn^{-2} u_2 \cdot sn^{-2} u_3$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{-2 sn^{-2} u_1 \cdot sn^{-3} u_2 \cdot sn' u_2 + 2 sn^{-2} u_2 \cdot sn^{-3} u_1 \cdot sn' u_1}{sn^{-2} u_1 - sn^{-2} u_2}\right)^2$$

$$= \left(\frac{sn\, u_1 \cdot sn' u_2 - sn\, u_2 \cdot sn' u_1}{sn\, u_1 \cdot sn\, u_2 (sn^2 u_2 - sn^2 u_1)}\right)^2$$

und daher:

$$sn^2 u_3 = \left(\frac{sn^2 u_2 \cdot sn^2 u_1}{sn\, u_1 \cdot sn' u_2 - sn\, u_2 \cdot sn' u_1}\right)^2. \tag{23}$$

Daraus folgt, wegen $sn\, u_3 = -sn(u_1 + u_2)$, zunächst:

$$sn(u_1 + u_2) = \varepsilon \cdot \frac{sn^2 u_1 - sn^2 u_2}{sn\, u_1 \cdot sn' u_2 - sn\, u_2 \cdot sn' u_1}, \tag{24}$$

---

[1]) S. Clebsch-Lindemann, Vorlesungen über Geometrie I (1876), p. 605, Gl. (8). (Es muß dort übrigens p. 604, Gl. (5) statt:

$$\varrho x_1 = \sin^3 \operatorname{am} u$$

heißen:

$$\varrho x_1 = k^2 \sin^3 \operatorname{am} u).$$

wo $\varepsilon = \pm 1$. Da aber Gl. (23) und somit Gl. (24) infolge der Stetigkeit von $sn\,u$ bei $u = 0$ auch noch für den ursprünglich ausgeschlossenen Fall $u_2 = 0$ gilt, so folgt, wegen $sn'\,0 = 1$:

$$sn\,u_1 = \varepsilon \cdot \frac{sn^2 u_1}{sn\,u_1}, \text{ also } \varepsilon = +1,$$

und somit schließlich:

$$sn(u_1 + u_2) = \frac{sn^2 u_1 - sn^2 u_2}{sn\,u_1 \cdot sn'\,u_2 - sn\,u_2 \cdot sn'\,u_1}. \tag{25}$$

Um auch diese Formel zu einer für den bisher ebenfalls ausgeschlossenen Fall $u_2 = u_1$ brauchbaren umzugestalten, hat man wieder nur Zähler und Nenner der rechten Seite mit einem passenden Faktor, nämlich $(sn\,u_1 \cdot sn'\,u_2 + sn\,u_2 \cdot sn'\,u_1)$ zu multiplizieren und zu beachten, daß:

$$\begin{aligned} & sn^2 u_1 \cdot sn'^2 u_2 - sn^2 u_2 \cdot sn'^2 u_1 \\ &= sn^2 u_1 \cdot cn^2 u_2 \cdot (1 - k^2 sn^2 u_2) - sn^2 u_2 \cdot cn^2 u_1 \cdot (1 - k^2 sn^2 u_1) \\ &= (sn^2 u_1 - sn^2 u_2) \cdot (1 - k^2 sn^2 u_1 \cdot sn^2 u_2), \end{aligned}$$

sodaß sich schließlich das fragliche Additions-Theorem in der zumeist üblichen Form ergibt:

$$sn(u_1 + u_2) = \frac{sn\,u_1 \cdot cn\,u_2 \cdot dn\,u_2 + sn\,u_2 \cdot cn\,u_1 \cdot dn\,u_1}{1 - k^2 sn^2 u_1 \cdot sn^2 u_2} \tag{26}$$

Will man hieraus lediglich mit Hilfe der Beziehungen:

$$\begin{cases} cn^2(u_1 + u_2) = 1 - sn^2(u_1 + u_2) \\ dn^2(u_1 + u_2) = 1 - k^2 sn^2(u_1 + u_2) \end{cases} \tag{27}$$

auch noch die entsprechenden Formeln für $cn(u_1 + u_2)$, $dn(u_1 + u_2)$ herleiten, so läßt sich die erforderliche Rechnung etwa in folgender Weise ziemlich einfach durchführen.

Es werde gesetzt:

$$1 - k^2 sn^2 u_1 \cdot sn^2 u_2 = N. \tag{28}$$

Die Substitution von $1 = cn^2 u_1 + sn^2 u_1 = cn^2 u_2 + sn^2 u_2$ liefert alsdann für N die beiden Ausdrücke:

$$N = cn^2 u_1 + sn^2 u_1 \cdot dn^2 u_2 = cn^2 u_2 + sn^2 u_2 \cdot dn^2 u_1$$

und somit für N^2 dem symmetrischen Ausdruck:

$$(29) \quad N^2 = (cn^2 u_1 + sn^2 u_1 \cdot dn^2 u_2)(cn^2 u_2 + sn^2 u_2 \cdot dn^2 u_1).$$

Ebenso ergibt sich aus dem Ausdrucke für N durch Substitution von $1 = dn^2 u_1 + k^2 sn^2 u_1 = dn^2 u_2 + k^2 sn^2 u_2$:

$$(30) \quad N^2 = (dn^2 u_1 + k^2 sn^2 u_1 \cdot cn^2 u_2)(dn^2 u_2 + k^2 sn^2 u_2 \cdot cn^2 u_1).$$

Durch Einführung von (29) bzw. (30) in die rechte Seite der mit N^2 multiplizierten Beziehungen (27) findet man dann aber ohne weiteres:

$$(31) \quad \begin{cases} N^2 \cdot cn^2(u_1+u_2) = (cn u_1 \cdot cn u_2 - sn u_1 \cdot dn u_1 \cdot sn u_2 \cdot dn u_2)^2 \\ N^2 \cdot dn^2(u_1+u_2) = (dn u_1 \cdot dn u_2 - k^2 \cdot sn u_1 \cdot cn u_1 \cdot sn u_2 \cdot cn u_2)^2 \end{cases}$$

und, da sich das Vorzeichen der Quadratwurzeln wieder unmittelbar durch Substitution von $u_2 = 0$ bestimmen läßt, so erhält man auf diese Weise in der Tat die bekannten Formeln für $cn(u_1 + u_2)$, $dn(u_1 + u_2)$.



Öffentliche Sitzung

zur Feier des 147. Stiftungstages

am 14. März 1906.

Die Sitzung eröffnete der Präsident der Akademie, Geheimrat Dr. Karl Theodor v. Heigel, mit folgender Ansprache:

Wir haben im Frühling des vorigen Jahres dem volkstümlichsten Dichter der Deutschen unsere Huldigung dargebracht; wir haben in der Novembersitzung aus Anlaß des bevorstehenden Zentenariums die Schöpfer des modernen Staates Bayern dankbar gefeiert; nun wandeln wir auch den heutigen Stiftungstag in einen Festtag, indem wir das Bild eines Kollegen unter den Laren unseres Hauses aufstellen und seinem Gedächtnis Kränze flechten. Da möchte der ferner Stehende wohl den Eindruck gewinnen, daß wir uns zu Heroenkult und Festgepränge allzu willig „vom Kalender kommandieren“ ließen. Doch der Vorwurf wäre nicht berechtigt, denn es gilt heute nicht so fast ein längst verehrtes Ehrenmal zu schmücken, als ein altes Unrecht zu sühnen. Handelt es sich doch um einen Forscher, der in zielbewußter, rastloser Arbeit seine ganze Kraft aufgezehrt, sein Leben lang aber Enttäuschung und Zurücksetzung geerntet hat! Sollte da nicht der Nachwelt die Verpflichtung obliegen, durch einen ehrerbietigen Gruß der Treue den Dank zu erstatten, den die Zeitgenossen kurzsichtig versagt haben?

Freilich, wenn die Bewertung eines Gelehrten davon abhinge, ob sein Name in aller Welt Mund oder doch in weiten Kreisen der Gebildeten bekannt sei, dürfte unser Johann Kaspar

Zeuss kaum zu den Großen gezählt werden. Wie wenige wissen oder wußten bis vor kurzem etwas von der Grammatica celtica und ihrem Verfasser! Da aber der Gradmesser der Bedeutung eines Gelehrten nur darin zu suchen ist, welchen Fortschritt, welche Förderung ihm die Wissenschaft zu danken hat, da nicht in der Celebrität, sondern in der Autorität das maßgebende Moment zu erblicken ist, darf der Maurersohn aus dem fränkischen Dörfchen Vogtendorf im auserlesensten Kreis berühmter Bayern des 19. Jahrhunderts einen Ehrenplatz beanspruchen.

Es ist nicht meine Aufgabe, auf die Werke und Tage des Gefeierten näher einzugehen. Von einem berufeneren Redner wird Ihnen dargelegt werden, wie sich diese geistige Kraft entwickelt, wie Zeuß auf den Gebieten der Sprachkunde, der Ethnologie und der Geschichtswissenschaft als Entdecker in die Nähe und Weite für alle Zeiten gewirkt hat.

Nur mit ein paar Worten möchte ich Zeugnis ablegen, daß auch mir das Herz aufging, als ich aus Anlaß der bevorstehenden Jahrhundertfeier mich eingehender mit unserem gelehrten Landsmann beschäftigte. Welch harmonisches, reines, gerade in seiner rührenden Bescheidenheit bedeutendes Lebensbild! Welche Hingebung an den Forscherberuf! Welche Arbeitskraft! Und ebenso in den Schriften: welche Schlichtheit, welche Größe! Einzelheiten mögen veraltet sein, als Ganzes sind die hier niedergelegten Lösungen wichtiger Probleme unerreicht und unerschüttert.

Doch unter wie trüben Verhältnissen mußten diese Werke geschaffen werden! Eine Passionsgeschichte rollt sich vor uns auf. Auch Zeuß mußte, wie unzählige andere, die Erfahrung machen, daß der Dienst der Wissenschaft mit Entbehrung verknüpft ist und die Sehnsucht nach Wahrheit eine treue Gefährtin nötig hat, die Geduld. Er brauchte ja nicht gerade Not zu leiden, doch aus ärmlichen Verhältnissen konnte er sich niemals emporringen, und peinliche Enttäuschungen begleiteten seine Erdentage mit unbarmherziger Treue. Die für Zeitgenossen und Nachwelt so fruchtbringende Arbeit brachte ihm keinen Lohn. Die Aufnahme in unsere Akademie — er

war von 1842—1847 korrespondierendes Mitglied der philosophisch-philologischen, von 1847—1856 ordentliches, später wieder korrespondierendes Mitglied der historischen Klasse — war fast die einzige Auszeichnung, die ihm zuteil wurde. In der Gelehrtenwelt Deutschlands, der Urheimat der Sprachwissenschaft, wurden zwar die bahnbrechenden Schriften selbstverständlich mit Hochachtung aufgenommen, aber man kümmerte sich nicht um den Verfasser. „Auch im Gelehrtenberuf", sagt Ernst Curtius, „wird das Glück immer als das größte Verdienst anerkannt; nach dem, was man durch stille, entsagungsvolle Arbeit zu stande bringt, fragen nur wenige!"

Wenn es sich um Anstellung handelte, wurde zwar seine „scientifische Bildung" von den maßgebenden Persönlichkeiten gnädig anerkannt, doch die Türen blieben ihm verschlossen. Von der Universität Würzburg wird er abgelehnt, weil eine Professur für deutsche Philologie nicht notwendig sei, — von Erlangen bleibt er ausgeschlossen, weil die philosophische Fakultät den Bewerber nicht genügend kenne, — in Berlin findet er angeblich aus konfessionellen Gründen keine Aufnahme. Vom Archivdienst, für welchen er wie geschaffen gewesen wäre, wurde er von Hormayr mit spöttischen Witzen zurückgewiesen. Endlich verlieh das Ministerium Maurer-Zenetti dem Vierzigjährigen in München eine Professur für allgemeine Weltgeschichte, doch nun vermochte sich der schüchterne, für den Katheder ohnehin wenig geeignete Mann in den neuen Wirkungskreis nicht mehr zu finden. Es war schon nicht mehr zweifelhaft, daß er einer in seiner Familie erblichen, tückischen Krankheit zum Opfer fallen werde; der Arme mußte seinen Benediktinerfleiß mit immer häufigeren Blutopfern bezahlen. Es war ihm nicht mehr möglich, sich im weiten Hörsaal verständlich zu machen; die Zuhörerschaft lichtete sich immer auffälliger; er wurde im Kollegium als Drohne angesehen und vermutlich auch als solche behandelt. Welche Pein für eine feinfühlige Natur! Es begreift sich, daß er eine Versetzung an das Bamberger Lyzeum mit erheblich vermindertem Gehalt als erlösende Wohltat empfand. Einsam verlebte er in der Main-

stadt seine letzten Lebensjahre, doch sie entbehrten nicht der Sonnenstrahlen des Glückes. Ersatz für Familienfreuden und heiteren Lebensgenuß bot ihm die Arbeit, dieser glückselige Fluch, womit Gott das Menschengeschlecht in Wahrheit gesegnet hat. Die Arbeit gab ihm einen Frieden, den Frau Welt nicht zu geben vermag. Die menschliche Sprache war für ihn das Buch des Lebens, und die Erforschung ihrer Gesetze gewährte ihm Anregung, Befriedigung, Erhebung. Sein Umgang beschränkte sich nur noch auf irische Mönche der Merowinger- und Karolingerzeit, deren Glossen ihm den Stoff zu der seit langem in Angriff genommenen keltischen Grammatik boten. Während die Forscher auf anderen Gebieten, wie der Landmann bei günstigem Erdreich, nur den Samen in die Krume zu streuen brauchen, mußte Zeuß erst eine Wildnis urbar machen durch Beseitigung der Auswüchse einer Keltomanie, die das Wissen über die keltische Völkerfamilie nicht bereichert, nur verwirrt hatte. Gott ließ ihn die Freude erleben, daß dichte Saat, wogend im Felde, den Samen zurückgab; er konnte noch die keltische Grammatik vollenden, das monumentale Werk, dem nur die deutsche Grammatik von Jakob Grimm und die Grammatik der romanischen Sprachen von Diez ebenbürtig zur Seite stehen. Kaum war das Tagewerk vollbracht, so erlosch das nur der Wissenschaft geweihte Leben.

Auf eine Persönlichkeit, die sich auf ganz anderem Gebiete Ruhm und Ehre erkämpfte, auf Prinz Eugen, den edlen Ritter, hat der Dichter Jean Baptiste Rousseau das Wort geprägt: „Nie war in andrem Manne so viel Einfachheit mit so viel Größe vereinigt!“ Dieses Wort darf auch auf Sinnesart und wissenschaftliche Taten unseres Zeuß angewendet werden.

Ein Name ohne Makel! Eine Erinnerung ohne Schatten!

Im Jahre 1903 hat die Akademie zur Bewerbung um einen Preis aus dem Zographosfonds folgende Preisaufgabe ausgeschrieben:

„Die meteorologischen Theorien des griechischen Altertums auf Grund der literarischen und monumentalen Überlieferung“.

Hiefür sind zwei Bewerbungen eingelaufen.

Die erste mit dem Motto: *Δῖνος βασιλεύει τὸν Δί' ἐξεληλακώς* ist eine hochbedeutsame wissenschaftliche Leistung, welche sich durch gründliche Sachkenntnis, scharfsinnige Kombination und umsichtiges Urteil auszeichnet. Sie bietet neues Material und neue Gesichtspunkte. Gleich im ersten Abschnitt, welcher „über meteorologische Instrumente“ betitelt ist, wird ein bei Antikythera im Meere gefundenes Bronzeinstrument als eine Art Planetarium erkannt. Ferner wird unter anderem ein Fragment des Meteorologen Arrian über Ebbe und Flut aus dem Lateinischen des Priscianus Lydus in das Griechische zurückübersetzt und in der Hauptsache auf Poseidonios zurückgeführt. Überhaupt werden verschiedene Quellenschriften der antiken Meteorologie in ihrem gegenseitigen Verhältnis untersucht und wird vor allem die Bedeutung des Poseidonios für die meteorologische Forschung in ihrem vollen Umfange festgestellt.

Leider ist der Verfasser infolge äußerer Hemmnisse nicht über diese Vorarbeiten hinaus zur Hauptsache, zu einer systematischen Feststellung der meteorologischen Theorien gekommen. Deshalb kann ihm der Preis nicht zuerkannt und nur der lebhafte Wunsch ausgesprochen werden, der Verfasser möge seine vielversprechenden Forschungen fortführen und bald in der Lage sein, deren Ergebnisse zu veröffentlichen.

Die zweite Bearbeitung mit dem Motto: *τότε γὰρ οἰόμεθα γινώσκειν ἕκαστον κτλ.* besteht aus zwei Teilen. Der Verfasser, welcher Meteorologie im Sinne der Alten auffaßt, so daß auch Fragen der Geophysik und Astronomie diesem Gebiete zufallen, geht von der Ansicht aus, daß nach der Auffassung der griechi-

schen Philosophen alle meteoren Erscheinungen aus der Wirksamkeit der vier Elemente hervorgehen, und gibt deshalb im ersten Teile eine ausführliche Darlegung, wie sich die Vorstellungen von den vier Elementen bei den griechischen Philosophen und Naturforschern gebildet und entwickelt haben. Wenn in dieser Darlegung auch die eine oder andere Aufstellung nicht einwandfrei erscheint, so ist damit doch eine breite Unterlage für den zweiten, den systematischen Teil gewonnen, in welchem eine umfassende Darstellung der alten Meteorologie geboten wird, die den inneren Zusammenhang der Theorien verfolgt und deren Haltbarkeit teilweise an den Ergebnissen moderner Forschung prüft. Hiernach trägt die Akademie kein Bedenken, der mit umfassender Gelehrsamkeit abgefaßten, nahezu druckfertigen Abhandlung den Preis zuzuerkennen.

Als Verfasser ergibt sich Geheimer Regierungsrat, Professor Dr. Otto Gilbert, Bibliotheksdirektor a. D. in Halle a/S.

Aus dem Thereianos-Fonds konnten folgende Unterstützungen gewährt werden:

1. 1500 M. für das von Adolf Furtwängler und Reichhold herausgegebene Werk über „Griechische Vasenmalerei",

2. 1500 M. für die von Karl Krumbacher herausgegebene „Byzantinische Zeitschrift",

3. 1000 M. an Professor Spyridion Lampros in Athen für eine wissenschaftliche Reise nach Italien zu Forschungen über die Geschichte des Despotats des Peloponnes unter den Paläologen,

4. 1100 M. für Dr. Paul Marc in München zu einer wissenschaftlichen Reise auf dem Athos zum Zwecke von Handschriftenstudien,

5. 600 M. für Dr. Ludwig Curtius in München zu archäologischen Untersuchungen im westlichen Kleinasien.

Endlich wurde dem Ephoros Georgios Sotiriades in Athen für seine wertvollen Untersuchungen über die Topographie und die älteste Kulturgeschichte von Böotien und Phokis ein Preis von 800 M. zuerkannt.

Im Anschluß an die Mitteilung über den Thesaurus linguae Latinae vom November 1904 ist jetzt mitzuteilen, daß der Reservefonds für den Thesaurus, eine Stiftung Geheimrats von Wölfflin, gegenwärtig 18,500 M. beträgt. Es mag noch hervorgehoben werden, daß der bayerische Staat zu diesem großen Unternehmen, von dem Ostern 1906 der zweite, gleichfalls über 1000 Seiten starke Foliant erscheinen wird, jährlich 5000 M. und außerdem 2500 M. zum Gehalt des ersten Sekretärs, Professor Dr. Hey, beiträgt und daß die philosophisch-philologische Klasse in den letzten Jahren etwa 500 M. für einen vom Thesaurus nur mit 1200 M. honorierten bayerischen Assistenten beigesteuert hat.

Generalredaktor Professor Vollmer ist infolge Übernahme eines Ordinariats an unserer Universität von der Leitung des Thesaurus zurückgetreten und als Mitglied der Kommission kooptiert worden. Als sein Nachfolger wurde Dr. Eugen Lommatzsch, Privatdozent in Freiburg i. Br., berufen. Der zweite Redaktor, Professor Ihm, tritt aus, um einem Rufe nach Halle Folge zu leisten; nach Ablehnung der Stelle durch Professor Hey wurde Privatdozent Dr. Berthold Maurenbrecher von Halle berufen.

Die Zinsen der Savigny-Stiftung standen dieses Jahr unserer Akademie zur Verfügung.

Auf Vorschlag der Kommission der Savigny-Stiftung beschloß unsere Akademie, sie in folgender Weise zu verwenden:

1. 600 M. an das Kuratorium der Savigny-Stiftung zur Unterstützung des Honorarfonds der Savigny-Zeitschrift für Rechtsgeschichte,

2. 4400 M. an den Reichsarchivassessor Dr. Hermann Knapp als Beitrag zu den Druckkosten seines zweibändigen Werkes über die Zentordnungen des Hochstifts Würzburg.

Aus den Zinsen der Münchener Bürger- und Cramer-Klett-Stiftung wurden bewilligt:

1. 500 M. für Professor Dr. Oskar Schultze in Würzburg zur Untersuchung der feineren Struktur des elektrischen Organs der Fische,

2. 1500 M. für den Studierenden Hans Prandtl in München zur Untersuchung der Sagittawürmer in der Bucht von Messina,

3. 2500 M. für den Kustos des Botanischen Museums in München, Dr. Hermann Roß, zur Erforschung bestimmter Wechselbeziehungen zwischen Tier- und Pflanzenwelt der Tropen des mittleren Amerika,

4. 500 M. für den Assistenten der anatomischen Anstalt zu München, Dr. Albert Hasselwander, zu einer Forschungsreise nach Dalmatien.

Endlich ist noch der Ehrung eines Mitglieds unserer Akademie Erwähnung zu tun.

Auf Wunsch unseres Kollegen Professor Königs ist die von ihm begründete Stiftung „zur Förderung chemischer Forschungen“ aus Anlaß des 70. Geburtstags Adolf von Baeyers umgewandelt worden in eine Adolf von Baeyer-Jubiläumsstiftung.

Zugleich ist das Kapital durch eine neue Spende des Stifters auf 50,000 M. erhöht worden.

Möge der gefeierte Name, den die Stiftung nunmehr trägt, für alle Forschungen, die in Zukunft aus diesem Fonds Unterstützung finden werden, ein glückliches Omen sein!

Der Sekretär der mathematisch-physikalischen Klasse, Herr C. v. Voit, teilt mit, daß die mathematisch-physikalische Klasse in dem vergangenen Jahre sieben Mitglieder durch den Tod verloren hat:

Das ordentliche Mitglied:

Dr. Carl v. Orff, Generalmajor a. D., gestorben den 27. September 1905.

Die auswärtigen Mitglieder:

Dr. Otto Wilhelm v. Struve, Direktor der russischen Sternwarte in Pulkowa, gestorben am 14. April 1905;

Dr. Albert v. Kölliker, Professor der Anatomie an der Universität zu Würzburg, gestorben am 2. November 1905.

Die korrespondierenden Mitglieder:

Dr. Georg Meißner, Professor der Physiologie an der Universität zu Göttingen, gestorben am 30. März 1905;

Dr. Walther Flemming, Professor der Anatomie an der Universität zu Kiel, gestorben am 4. August 1905;

Dr. Ferdinand Frhr. v. Richthofen, Professor der Geographie an der Universität zu Berlin, gestorben am 6. Oktober 1905;

Dr. Otto Stolz, Professor der Mathematik an der Universität zu Innsbruck, gestorben am 23. November 1905.

Carl v. Orff.[1])

Am 27. September 1905 ist das ordentliche Mitglied der mathematisch-physikalischen Klasse, der Generalmajor a. D. Dr. Carl v. Orff im Alter von 77 Jahren verschieden. Ein ungemein reiches Leben liegt hiermit abgeschlossen vor uns, denn der Verstorbene war nicht nur ein hervorragender Offizier, sondern auch ein bedeutender Gelehrter, der durch

[1]) Siehe den Nekrolog von Professor Dr. Karl Oertel, Allg. Zeitung, Beilage vom 1. Oktober 1905, Nr. 227, und Vierteljahrschrift der astron. Ges. 1906, 41. Jahrg., 1. Heft, S. 3.

seine wissenschaftliche Tätigkeit die theoretische und praktische Geodäsie wesentlich gefördert hat.

Er wurde in München als der Sohn eines Kriegsrates am 23. September 1828 geboren und erhielt seine erste Erziehung im K. Kadettenkorps, da die Tradition der Familie ihn für die militärische Laufbahn bestimmt hatte. Schon hier erregte er durch sein Talent und seinen Fleiß die Aufmerksamkeit seiner Lehrer, insbesondere durch seine Befähigung und seine Kenntnisse in der Mathematik. Darum wurde er als 23jähriger Leutnant zur mathematischen Sektion des topographischen Bureaus kommandiert, wodurch er in die Bahn gelenkt wurde, auf welcher er so Ausgezeichnetes leisten sollte. In dieser Stellung machte er unter der Leitung des verdienten Direktors des topographischen Bureaus Friedrich Weiß zunächst umfassende Terrainaufnahmen in der westlichen Pfalz und dann Zenithdistanzmessungen in weiteren Gebieten Bayerns. Ein längerer zur Ausbildung benützter Urlaub führte ihn nach Paris, woselbst er unter anderen den berühmten Mathematiker Cauchy, an welchen er empfohlen war, näher kennen lernte. Als Hauptmann im topographischen Bureau des Generalquartiermeisterstabes machte er den Feldzug des Jahres 1866 mit, in dem er Leiter der Feldtelegraphenabteilung war.

Orff hörte nicht auf, größtenteils durch Selbststudium, an der Vervollkommnung seiner Kenntnisse und Erfahrungen eifrigst zu arbeiten. In diesem Bestreben verbrachte er nach Beendigung des Feldzugs seine Urlaubszeit an der Sternwarte zu Bogenhausen zu, die damals unter der Leitung unseres verstorbenen Mitgliedes, des berühmten Astronomen Johann Lamont stand, der sich insbesondere durch seine erdmagnetischen Untersuchungen große Verdienste erworben hat. Die Bekanntschaft und spätere innige Freundschaft mit diesem hervorragenden Gelehrten war von großem Einfluß auf Orffs Entwicklung; die Anregung zu seinen wertvollen astronomisch-geodätischen Studien und Beobachtungen verdankt er seinem Lehrer Lamont.

Mittlerweile war Orff (1867) zum Dozenten für reine und angewandte höhere Mathematik an der damals gegründeten

Kriegsakademie ernannt worden, welches ihm sehr zusagende Amt er als äußerst beliebter Lehrer 33 Jahre lang ausübte. Im Jahre 1868 erfolgte seine Beförderung zum Major und zum Direktor des topographischen Bureaus an Stelle des verstorbenen Obersten Weiß. Als solcher hat er sich durch seinen unermüdlichen Pflichteifer und durch das volle Verständnis der wichtigen Aufgabe sehr verdient gemacht; es ist ihm durch seine wissenschaftlichen und praktischen Kenntnisse gelungen, das seiner Leitung unterstellte Institut während 22 Jahren ganz auf der Höhe der schnell fortschreitenden Zeit zu erhalten. Namentlich verdankt man ihm die Neubearbeitung und Herausgabe der 50 000-teiligen Blätter des topographischen Atlas von Bayern sowie der 250 000-teiligen Blätter der Karte von Südwestdeutschland (der Generalquartiermeisterstabskarte); als eine praktische Leistung, an welcher Orff den rühmlichsten Anteil hat, darf die bekannte prompte Ausrüstung der bayerischen und teilweise auch der preußischen Armee mit Kriegskarten während des Feldzuges 1870/71 bezeichnet werden. Es fiel ihm dann auch die umfangreiche Aufgabe zu, die Bearbeitung des auf Bayern treffenden Anteils der 100000-teiligen Karte des Deutschen Reiches in die Wege zu leiten und zu überwachen. Seine Verdienste in dieser Stellung wurden im Inlande und im Auslande voll anerkannt und gewürdigt. Nachdem er im topographischen Bureau bis zum Generalmajor vorgerückt war und 44 Jahre in der Armee gedient hatte, erbat er sich im Jahre 1890 wegen geschwächter Sehkraft die Pensionierung.

Die meisten hätten sich wohl an dieser Tätigkeit genügen lassen, aber dem regen Geiste und dem rastlosen Forschungsdrange Orffs genügte die Direktion des topographischen Bureaus für sich allein auf die Dauer nicht. Er sehnte sich nach rein wissenschaftlicher Arbeit, weshalb er auch noch zehn Jahre, wie vorher erwähnt, die Stelle als Dozent der Mathematik an der Kriegsakademie beibehielt.

Da trat am Ende der sechziger Jahre eine große Aufgabe an ihn heran, seine Beteiligung an der bayerischen Landes-

vermessung. Nach der in Frankreich während der französischen Revolution zur Ermittlung der Gestalt der Erde durchgeführten großen Gradmessung fanden nach dem wiederhergestellten Frieden in vielen Staaten ähnliche Gradmessungen und Landesvermessungen statt; so begann auch in Bayern, nachdem schon 1801 von französischen Offizieren Vorarbeiten für ein Hauptdreiecksnetz gemacht worden waren, eine Landesvermessung mit einer von dem Astronomen Soldner unter Mithilfe von Schiegg nach wissenschaftlichen Prinzipien und mit den zur Zeit besten von Reichenbach und Fraunhofer gebauten geodätischen und astronomischen Instrumenten ausgeführten Triangulation. Es hatte sich dabei seit Anfang des 19. Jahrhunderts ein außerordentlich umfangreiches Beobachtungsmaterial angehäuft, das noch der Verwertung harrte. Orff übernahm, nachdem Bauernfeind die Bearbeitung niedergelegt hatte, freiwillig die Aufgabe. Es waren enorme Schwierigkeiten zu überwältigen, denn es war über die von Soldner erdachte der Landesvermessung zu Grunde liegende genaue Projektionsmethode noch gar nichts veröffentlicht, so daß Orff sich das gesammte Material im Archiv des K. Katasterbureaus erst mühsam zusammensuchen mußte. Nur der beharrlichsten Ausdauer und aufopferungsvollen Hingebung sowie der sichersten Sachkenntnis konnte es gelingen die gewaltige Aufgabe zu bewältigen. Schon im Juni 1873 war die Bearbeitung des von dem K. B. Katasterbureau herausgegebenen großen Werkes: „Die bayerische Landesvermessung in ihrer wissenschaftlichen Grundlage“ in einem 100 Druckbogen umfassenden Quartband vollendet. Es ist die größte Leistung Orffs. Das durchaus selbständige, den Geodäten innerhalb und außerhalb Bayerns unentbehrlich gewordene und allgemein anerkannte Werk nimmt einen hohen wissenschaftlichen Rang ein sowohl durch die äußerst sorgfältige mustergiltige Verarbeitung des ungeheuern Zahlenmaterials als auch durch die vollendete Verwendung der theoretischen Vorschriften.

Nach Abschluß desselben folgten die astronomisch-geodätischen Ortsbestimmungen Orffs an der hiesigen Sternwarte.

Er machte zunächst eine Bestimmung der geographischen Breite der K. Sternwarte bei München nach Talcotts Methode und im ersten Vertikal, welche 1877 in den Annalen der K. Sternwarte veröffentlicht wurde. Dann folgten weitere Breitebestimmungen in Bayern im Auftrage der K. B. Kommission für die europäische Gradmessung, deren Vorsitzender damals Lamont war. Der preußische General v. Baeyer, der Vater unseres verehrten Kollegen, hatte nämlich eine einheitliche mitteleuropäische Gradmessung zwischen dem französischen und russischen Meridian angeregt, zu deren Durchführung sich alle von dem bezeichneten Meridian berührten Staaten, zu denen auch Bayern gehört, anschlossen und die „europäische Gradmessungs-Kommission“ bildeten. Nach dem Beitritt der Vereinigten Staaten von Nordamerika, von Japan und Großbritannien wurde sie zur Kommission der „internationalen Erdmessung“ erweitert: der bayerischen Kommission für die europäische und internationale Erdmessung, welche die auf Bayern treffenden Erdmessungsarbeiten nach den Beschlüssen der allgemeinen Konferenzen zu betätigen hatte, gehörten außer Lamont noch Bauernfeind, Seidel und Seeliger an und nach Bauernfeind's Tod (1894) Orff für die geodätischen Fragen. Auch an diesen Problemen beteiligte sich Orff mit gewohnter Hingebung durch ganz auf der Höhe der Wissenschaft stehende astronomisch-geodätische Arbeiten.

Die vorher erwähnten Beobachtungen zu den Breitebestimmungen in Bayern fanden in Nürnberg, Mittenwald, Holzkirchen, Ingolstadt und der Wülzburg statt und wurden (1880) als astronomisch-geodätische Ortsbestimmungen in Bayern von der K. B. Kommission für die europäische Gradmessung herausgegeben.

Daran schlossen sich die 1874 begonnenen, der europäischen Gradmessung dienenden ausgedehnten „telegraphischen Längenbestimmungen für die K. Sternwarte zu Bogenhausen“ an, welche in zwei Teilen (1888 und 1893) von der K. B. Kommission für die internationale Erdmessung herausgegeben wurden und in den Denkschriften unserer Akademie erschienen

sind. Diese Arbeiten sollten die exakte telegraphische Bestimmung des astronomischen Längenunterschiedes möglichst vieler Orte gegen die Münchener Sternwarte liefern, dann die astronomischen Koordinaten einer größeren Anzahl von Punkten innerhalb Bayerns und die in diesen Punkten herrschenden Lotabweichungen ermitteln, und vor allem die genaue Orientierung des bayerischen Hauptdreiecksnetzes auf dem Erdsphäroid ergeben. Dabei wurden zunächst die Längenunterschiede bestimmt zwischen Bogenhausen einerseits und Wien, dem Pfänder und Prag anderseits, wodurch der Anschluß an die von dem Astronomen v. Oppolzer in Wien geleitete österreichische Gradmessung hergestellt war; dann folgte eine gleichzeitige Längenbestimmung innerhalb des Viereckes Bogenhausen, Wien, Padua und Mailand; ferner eine Bestimmung zwischen den Sternwarten Bogenhausen, Wien und Straßburg, sowie eine solche zwischen Bogenhausen, Wien und Greenwich und endlich die mit Professor Plantamour gemachte zwischen Bogenhausen und Genf.

Von Bedeutung war auch seine ungemein sorgfältige „Bestimmung der Länge des einfachen Sekundenpendels auf der Sternwarte zu Bogenhausen“ mit dem ihm von Professor v. Oppolzer in Wien überlassenen Reversionspendel (1883).

Zuletzt trat noch eine wichtige Aufgabe an Orff heran, nämlich die Messung der Größe der Schwerkraft der Erde mit dem Pendelapparat des österreichischen Obersten v. Sterneck. Man hat dieselbe an verschiedenen Orten der Erde ermittelt aus der Schwingungsdauer eines Pendels oder aus der Länge des Sekundenpendels und erfahren, daß zwischen den geodätischen und astronomischen Längen- und Breitenmessungen Abweichungen sich finden. Man hat dieselben aus besonderen Lage- und Dichtigkeitverhältnissen der die Erdkruste bildenden Mineralmaßen zu erklären gesucht. Aus diesem Grunde haben insbesondere die Geologen großes Interesse an der Frage genommen. Orff hat daher umfassende Pendelbeobachtungen ausgeführt; es gelang ihm bald die Schwierigkeiten, welche sich dabei einer genauen Zeitbestimmung entgegenstellen, in

einfachster Weise zu überwinden und für Bayern fast abschließende Resultate zu erhalten, die er in einer in den Sitzungsberichten der Akademie (1897) erschienenen Abhandlung: „Bemerkungen über die Beziehungen zwischen Schweremessungen und geologischen Untersuchungen und Bericht über die in Bayern begonnenen Pendelmessungen" niederlegte. Bis kurz vor seinem Tode hat Orff die Erdmessungsarbeiten in Bayern geleitet.

In einer in der Festsitzung der Akademie vom 15. November 1893 gehaltenen Rede: „Über die Hilfsmittel, Methoden und Resultate der internationalen Erdmessung" resümierte er die Fortschritte dieser Wissenschaft, die seiner Arbeit so viel verdankt.

Die philosophische Fakultät unserer Universität ernannte ihn (1883) in Würdigung seiner Verdienste um die Wissenschaft zum Ehrendoktor der Philosophie.

Wir haben ihn nicht nur wegen seiner selbstlosen Hingebung für die Wissenschaft verehrt, sondern auch wegen seines reinen und edlen Charakters geliebt; von wahrer Bescheidenheit und Humanität war er stets voll Freundlichkeit und Liebenswürdigkeit gegen Alle.

So ist sein Lebenswerk ein gesegnetes für die Wissenschaft gewesen; der Name „Orff" wird in der Geschichte der Geodäsie immer in Ehren genannt werden.

Otto Struve.[1]

Am 14. April 1905 ist der berühmte Astronom Otto v. Struve, Direktor der Sternwarte in Pulkowa, im Alter von 86 Jahren gestorben. Er gehörte unserer Akademie seit dem Jahre 1866 als auswärtiges Mitglied und als Nachfolger seines Vaters Wilhelm Struve an. Die Struves sind eine Astronomenfamilie; der Vater Wilhelm Struve hatte sich als Leiter der berühmten Sternwarte in Pulkowa die größten Verdienste er-

[1]) Siehe den Nekrolog von M. Nyrén, in der Vierteljahrschrift der Astronom. Gesellschaft 40, S. 286.

worben; der Sohn Otto Struve setzte das Werk des Vaters in rühmlicher Weise fort, indem er auf verschiedenen Gebieten der Astronomie, insbesondere durch seine ausgedehnten Messungen der Doppelsterne, hervorragende Erfolge erzielt hat; auch zwei Söhne Ottos sind bekannte Astronomen.

Otto Struve wurde am 7. Mai 1819 in Dorpat geboren, wo sein Vater, dessen Eltern aus Altona eingewandert waren, Professor an der Universität und Direktor der Sternwarte war; in derselben befand sich der große von Fraunhofer hergestellte, in der öffentlichen Sitzung unserer Akademie vom 10. Juli 1824 beschriebene Refraktor von 9 Zoll Öffnung. Nach Absolvierung des Gymnasiums in Dorpat besuchte er die damals in hoher Blüte stehende Universität daselbst. In der Sternwarte aufgewachsen war er früh entschlossen sich der Astronomie zu widmen, so daß er bald seinem Vater behilflich sein konnte und schon im Alter von 18 Jahren vor Abschluß der Universitätsstudien als Assistent an der Sternwarte angestellt wurde.

Nachdem unter dem Kaiser Nikolaus I. das große astronomische Zentralinstitut in Pulkowa auf einem Bergrücken bei St. Petersburg in den Jahren 1833—1839 entstanden war, wurde W. Struve zum Direktor der glänzend ausgerüsteten, besonders für Stellar-Astronomie bestimmten Anstalt bestellt. Neben anderen vollendeten Instrumenten war daselbst der von den Nachfolgern Fraunhofers, Georg Merz und Mahler verfertigte 14zöllige Refraktor, das mächtigste optische Instrument der damaligen Zeit, aufgestellt. Später ergab sich das Bedürfnis nach einem noch größeren Fernrohr, das 1884 als ein 30 Zöller von Clark fertig gestellt wurde. Otto Struve wurde zugleich neben anderen jungen Gelehrten als Gehilfe des Direktors eingesetzt und nahm von da an hervorragenden Anteil an den Arbeiten des Observatoriums durch vielfache Beobachtungen und Untersuchungen. Das Jahr 1841 brachte ihm den Titel eines Magisters der Astronomie an der Universität zu St. Petersburg.

Als vom Jahre 1845 an bei der ausgebreiteten astronomischen und geodätischen Tätigkeit seines Vaters diesem nicht

mehr die Zeit blieb, sich der Verwaltung der Sternwarte zu widmen, fielen diese zeitraubenden Arbeiten dem Sohne zu, der sich deßhalb noch in jungen Jahren, ehe er das 30. Lebensjahr erreicht hatte, nicht so wie er gewünscht hätte, den eigenen Forschungen hingeben konnte. Er erhielt dann das Amt eines zweiten Astronomen, 1858 das eines Verwalters der Sternwarte und im Jahre 1862 nach dem Rücktritt seines Vaters das des Direktors. Im Jahre 1889 beging er das 50jährige Jubiläum der Sternwarte und trat dann im Alter von 70 Jahren von der Stelle, die er während 28 Jahren ruhmvoll bekleidet hatte, zurück und lebte seitdem größtenteils bei nahen Verwandten in Karlsruhe.

Aus Mangel an Arbeitskräften war es längere Zeit nicht möglich gewesen die vielen mit den Instrumenten gewonnenen Beobachtungen zu bearbeiten; erst vom Jahre 1857 an konnten die dazu nötigen Reduktionen in Angriff genommen werden. Es wurden zuerst mit größtem Fleiße die Konstanten zur Berechnung der Beobachtungen ermittelt: Die Refraktion, die Aberration, die Nutation, die Präzession. Die letztere Aufgabe fiel dem jungen Otto Struve zu, der seine diesbezüglichen Beobachtungen in einer wichtigen Abhandlung: „Bestimmung der Konstante der Präzession mit Berücksichtigung der eigenen Bewegung des Sonnensystems“, welche Bewegung man früher nicht mit in Rechnung gezogen hatte, (1841) veröffentlichte. Über ein halbes Jahrhundert sind diese in Pulkowa bestimmten Konstanten allgemein in Gebrauch gewesen und haben viel dazu beigetragen, die astronomischen Beobachtungen auf ein gemeinschaftliches System zurückzuführen.

Aus allen diesen großen Arbeiten entstanden die „Observations“ durch Otto Struve und seine Mitarbeiter, denen er das gemeinsame Ziel gab und zu denen spätere berühmte Namen der Astronomie zählten. Sie enthalten die Kataloge der Rektaszension, der Deklination der Hauptsterne, der Beobachtungen im ersten Vertikal am Vertikalkreis und am Meridiankreis mit dem Passageinstrument.

Die Haupttätigkeit Otto Struves war die mit dem großen

Refraktor, insbesondere das Aufsuchen neuer Doppelsterne und möglichst scharfer Mikrometermessungen derselben. Diese durch 40 Jahre fortgesetzten Messungen, welche im 9. und 10. Band der Observations enthalten sind, bieten ein ungemein reiches und wichtiges Quellenmaterial für alle Zeiten; sie sind die reifste Frucht der Lebensarbeit Struves. Außerdem stammen von ihm noch viele Monographien über einzelne Resultate seiner Beobachtungen über Doppelsterne, Kometen, Nebelflecke, Sternparallaxen, Planetentrabanten, die Saturnringe.

Bei den Bestimmungen der Doppelsterne bemerkte man auffällige Unterschiede in den Messungen der gleichen Erscheinung bei den verschiedenen Beobachtungen, die man bis dahin zumeist den angewandten Beobachtungsmethoden und nicht den Beobachtern zuschrieb. Struve erkannte die auch für die Physiologie wichtige Tatsache, daß diese Unterschiede vor allem von der Verschiedenheit der Beobachter, von deren persönlichen Messungsfehlern, herrühren. Er machte zur Ermittlung der Größe derselben Beobachtungen an künstlichen Doppelsternen mittelst einer höchst ingeniösen Methode. In einer 2,5 km entfernten schwarzen Tafel waren in verschiedenen Entfernungen und Richtungen vom Zentrum kreisrunde Löcher von verschiedenem Durchmesser angebracht; alle Löcher waren durch schwarze Stöpsel geschlossen bis auf zwei, welche gerade gemessen werden sollten. Da die Entfernung der Tafel von dem Refraktor bekannt war, sowie die Entternung und Richtung der einzelnen Löcher, so konnte man die gemessenen Zahlen auf ihre Richtigkeit prüfen. Es ergaben sich in der Tat nicht unbedeutende systematische Fehler in den Distanzen und den Positionswinkeln. Mit Hilfe der aus allen diesen Messungen abgeleiteten empirischen Formeln wurden dann die unmittelbaren Beobachtungsergebnisse korrigiert.

Außerdem war Otto Struve bei einer Reihe wichtiger wissenschaftlicher Unternehmungen beteiligt. Er war es, der die Durchführung der großen russischen Meridianbogenmessung und die Verbindung derselben mit den übrigen europäischen Gradmessungen ermöglichte. Der Vater W. Struve wünschte

nämlich seiner russisch-skandinavischen Breitegradmessung eine Längengradmessung auf dem 47. Parallel zwischen Brest und Astrachan hinzuzufügen. Da er dabei jedoch auf Schwierigkeiten bei den westeuropäischen Staaten stieß, schlug Otto Struve (1860) vor den Bogen auf dem 52. Parallel auf der weiten 69° umfassenden Strecke zwischen Arsk in Sibirien und Valencia auf Island zu messen, welch großartige Arbeit unter Beteiligung aller davon berührten Staaten zustande kam. Auch wirkte er (1843) bei der Bestimmung des Längenunterschiedes Pulkowa—Greenwich mit. Die geodätisch-topographische Aufnahme des russischen Reiches hat er eifrig gefördert.

Er beteiligte sich ferner an zwei Expeditionen zur Beobachtung totaler Sonnenfinsternisse, 1851 an der nach Polen und 1860 an der nach Spanien. Bei den Vorbereitungen zur Beobachtung des Venusdurchgangs 1874 war er entscheidend tätig. Er regte ferner die neue Reduktion der astronomischen Messungen Bradley's, deren Wert für die Wissenschaft durch Bessel's fundamenta astronomica festgestellt worden ist, durch Auwers an.

Seine Revision und Herausgabe des zweiten Katalogs von Weiße, enthaltend die Sterne der Bessel'schen Zonen zwischen + 15° und + 45° Deklination brachte der praktischen Astronomie großen Nutzen. Ebenso nützlich war die mit Schiaparelli gemachte Bearbeitung und Herausgabe der von Baron Dembowski hinterlassenen Doppelsternmessungen.

Von besonderem Interesse ist seine Schrift über das Verhältnis Keplers zu Wallenstein auf Grund der in der Pulkowaer Bibliothek befindlichen Manuskripte Keplers.

In der alten Schule wurde in Pulkowa nur die messende Astronomie betrieben; Struve verschloß sich aber dem Neuen nicht. Als sich die Bedeutung der Astrophysik erwies, erwarb er alsbald die zu solchen Untersuchungen notwendigen Instrumente und setzte die Schaffung der Stelle eines Astrophysikers bei der Sternwarte durch. Und als die Verwendbarkeit der Photographie für astronomische Zwecke dargetan wurde, nahm er lebhaftes Interesse an der photographischen

Aufnahme des Himmels und war Vorsitzender des internationalen Kongresses hiefür in Paris. In dieser Weise wußte er den alten Glanz der Pulkowaer Sternwarte zu erhalten.

Struve gehörte zu den Begründern der so fruchtbar wirkenden astronomischen Gesellschaft. Er war leider ohne Erfolg bestrebt die Kalenderreform und den Übergang vom Julianischen zum Gregorianischen Kalender in Rußland durchzusetzen.

Ein besonderes inniges Verhältnis bestand zwischen ihm und seinen zahlreichen Schülern und Mitarbeitern, die ihn wie einen Patriarchen liebten. Überall hat er sich durch seine edlen Charaktereigenschaften Freunde und Verehrer erworben. Er war, trotzdem er gut deutsch geblieben ist, ein treuer Anhänger Rußlands, insbesondere liebte er seine engere Heimat, die baltischen Provinzen, und es war für ihn ein schwerer Schlag, als Dorpat, in dem er die Verkörperung aller guten Eigenschaften einer deutschen Universität erblickte und in der so viele hervorragende Deutsche gewirkt hatten, den Namen Jurjew erhielt.

Albert Kölliker.[1])

Am 2. November 1905 starb in Würzburg der Anatom Albert Kölliker im 89. Lebensjahre, der Senior der Würzburger Universität, eine der größten Zierden der Alma Julia und der letzte jener Männer, die den Ruhm ihrer medizinischen Fakultät begründet haben. Er hat als einer der Tätigsten mitgearbeitet an der Vermehrung der Kenntnisse in der mikroskopischen Anatomie und in der Entwicklungsgeschichte des Menschen und der Tiere, aus denen die heutigen Lehren in diesen Wissenschaften hervorgingen. Mit seinem Tode ist ein

[1]) Siehe die Nachrufe von: W. Waldeyer, Anatomischer Anzeiger 1906, Bd. 28 Nr. 21, S. 539.

J. Sobotta, Münchener mediz. Wochenschr. 1905, Nr. 51.

O. Schultze, mediz. Klinik 1905, Nr. 50.

O. Taschenberg, Leopoldina 1906, Heft 42, Nr. 5, S. 75.

A. Kölliker, Erinnerungen aus meinen Leben 1899.

Gelehrtenleben vollendet, welches wohl eines der köstlichsten genannt werden darf; alles, die äußeren Bedingungen sowie die körperlichen und geistigen Veranlagungen, und die Gunst des Geschickes waren vereint, um ein harmonisches Dasein zu bilden: Gesundheit an Leib und Seele, unermüdliche Arbeitskraft und Schaffensfreude bis ins höchste Alter hatten es ermöglicht, daß er ein erschöpfendes Wissen und Können in allen anatomischen Wissenschaften sich aneignen konnte und durch äußerst fruchtbare Arbeit ein zuverläßiger allverehrter Führer der Anatomen seiner Zeit wurde; und dann kam nach diesem gesegneten Leben ein sanftes Ende ohne Empfindung der Schwächen des Alters. So steht er vor uns, der uns allen Lehrer und Vorbild in Fleiß und Ausdauer war.

Albert Kölliker wurde am 6. Juli 1817 als Sohn eines angesehenen Kaufmanns in Zürich geboren; die Mutter war eine Frau von hervorragender geistiger Begabung und feiner Bildung, die ihren zwei Söhnen eine vortreffliche Erziehung zuteil werden ließ; von ihr hatte der ältere Sohn Albert die Schönheit des Körpers, die große Sprachenkenntnis und die vornehme Erscheinung mit den Formen des Umganges des Weltmanns. Er hatte auch das große Glück, daß die äußeren Lebensverhältnisse ihm keine Beschränkung auferlegten und ihm in Anschaffung von Büchern und Instrumenten, sowie in Unternehmung von weiten Reisen freie Hand gegeben war.

Er entschloß sich bald zum Studium der Medizin, zu welchem ihn die früh aufgetretene Neigung zu den sogenannten beschreibenden Naturwissenschaften geführt. Die letztere war wohl wie bei so vielen seiner Landsleute genährt durch die Schönheiten der Natur seines Vaterlandes, dem er immer als treuer Sohn in Liebe anhing. Schon als Knabe sammelte er eifrig Schmetterlinge und im Gymnasium Pflanzen; an der Universität zu Zürich, an die er 1836 übergetreten war, betrieb er daher besonders die Naturwissenschaften; für die praktische Medizin hatte er von Anfang an ein geringeres Interesse und Verständnis. Er fand dort vortreffliche Lehrer, den Physiker Mousson, den Chemiker Löwig, den Mineralogen Julius

Fröbel, den Anatomen Friedrich Arnold, den Geologen Escher von der Lindt, den Botaniker Oswald Heer und den früher unserer Akademie angehörenden Zoologen und Naturphilosophen Lorenz Oken. Besondere Anregung erhielt er durch von der Lindt und Oken, vor allem aber durch den geistvollen Heer, der in ihm das lebhafteste Interesse für die heimische Flora erweckte. Mit ihm und mit seinem Freunde, dem späteren berühmten Botaniker Karl Nägeli durchforschte er die Flora seines Heimatkantons und legte ein umfangreiches Herbarium an; die Frucht dieser Beschäftigung war die erste Schrift des zwanzigjährigen Studenten, ein „Verzeichnis der phanerogamischen Gewächse des Kantons Zürich, 1839“, das nicht nur eine Aufzählung der Arten und Fundorte war, sondern auch auf klimatische und Bodenverhältnisse Rücksicht nahm. Es ist sehr zu beklagen, daß unsere Mediziner dieses vorzügliche Mittel an Naturobjekten beobachten zu lernen wegen Überbürdung mit als wichtiger angesehenen Fächern nur wenig mehr benützen.

Nach einem in Bonn zugebrachten Semester begab er sich mit seinem Freunde Nägeli für drei Semester nach Berlin (1839). Er bezeichnete diesen Aufenthalt als einen Wendepunkt in seinem Leben, der seinen Studien von nun an die Richtung gab. Durch Johannes Müller, Jacob Henle und Robert Remak empfing er vollständig neue Eindrücke. Der mit seinem umfassenden Geist noch immer fortwirkende Johannes Müller zeigte ihm den Zusammenhang der Formen der Tiere und führte ihn in die vergleichende Anatomie besonders der wirbellosen Tiere ein. Bei Jacob Henle lernte er die Lehren von C. Th. Schwann, der kurz vorher (1839) durch die Entdeckung der Zellen als Grundlage aller Gewebe des Tierkörpers eine neue Ära der anatomischen Disziplin eröffnet hatte, kennen und durfte er in dessen Demonstrationen zum erstenmale mit dem Mikroskop Blutkörperchen, Epithelien, Samenfäden etc. sehen. Von dem talentvollen Robert Remak erhielt er in Vorlesungen und in Demonstrationen über die Entwicklung des Hühnchens die ersten Anregungen auf dem

Gebiete der Entwicklungsgeschichte, die durch die Forschungen von Döllinger, Karl Ernst v. Baer und Theodor Bischoff mächtig gefördert worden war. Man kann sich denken, wie dies alles auf den jungen Kölliker wirkte; er sah ein großes Arbeitsfeld vor sich, das zu bebauen er fest entschlossen war.

In seinem 9. Semester schaffte er sich in Berlin zu diesem Zweck ein Mikroskop von Schiek an, mit dem er halbe Nächte lang arbeitete. So entstand (1841), seine erste mikroskopische Arbeit: „Untersuchungen über die Geschlechtsverhältnisse der wirbellosen Tiere und über die Bedeutung der Samenfäden", mit welcher er sich in Zürich den Grad eines Doktors der Philosophie erwarb; ein Jahr später wurde er in Heidelberg zum Doktor der Medizin promoviert unter Vorlage einer vergleichend-embryologischen Untersuchung an Fliegenlarven: „Beobachtungen über die erste Entwicklung der Insekten".

Von Berlin aus machte Kölliker mit Nägeli seine erste wissenschaftliche Reise nach Föhr und Helgoland zum Studium der Fauna und Flora des Meeres, von wo sie ein reiches Material zurückbrachten. Auf der Heimreise nach Zürich suchten die beiden den Botaniker Schleiden in Jena auf, um den Entdecker der Zellen in den Pflanzen kennen zu lernen.

Unterdessen war Henle (1841) als Professor der Anatomie nach Zürich berufen worden; derselbe nahm den ihm schon bekannten jungen Kölliker, dessen Wert er erkannt hatte, als Hilfsassistent auf; ein Jahr darauf wurde er Prosektor bei dem Manne, den er als den hervorragendsten Anatomen seiner Zeit pries und später seinen Freund nennen durfte, von dem er in der Gewebelehre die größte Förderung empfing.

Durch seine Studien war Kölliker bald auf die Bedeutung der Beobachtung der niederen Tiere des Meeres für die vergleichende Anatomie und Entwicklungsgeschichte geführt worden; er ging daher in richtiger Einsicht auf ein halbes Jahr mit Nägeli nach Neapel und Messina. Es waren zwar schon vor ihnen solche Reisen an die Meeresküste von Tiedemann, Stannius, Joh. Müller und Anderen gemacht worden, aber sie wurden doch erst von da an für einen wissenschaftlichen Biologen als

notwendiges Rüstzeug angesehen. Kölliker war begeistert von der Manigfaltigkeit der Formen und bereicherte mit größter Energie und reinstem Genusse seine Kenntnisse der Seetiere, deren Erlangung damals noch mit großen Schwierigkeiten verbunden war. Insbesondere interessierten ihn die Tintenfische; die Hauptfrucht seiner Arbeiten war außer zahlreichen kleineren Veröffentlichungen die Entwicklungsgeschichte der Cephalopoden: es war sein erstes größeres, wahrhaft grundlegendes Werk, die erste umfassende Darstellung einer ununterbrochenen Reihe von Entwicklungsstadien eines wirbellosen Tieres; ich stehe nicht an dieses Werk als eine seiner bedeutendsten Taten zu bezeichnen.

Nach der Rückkunft von seiner Reise habilitierte sich Kölliker (1843) in Zürich mit einem Probevortrag als Privatdozent, aber schon ein Jahr darauf wurde er, nachdem Henle nach Heidelberg gegangen war, zum außerordentlichen Professor der Physiologie und vergleichenden Anatomie ernannt. Da kam, als er eben 30 Jahre alt war (1847), durch Rineckers Einfluß der ehrenvolle Ruf nach Würzburg als ordentlicher Professor der Physiologie, vergleichenden und mikroskopischen Anatomie und Entwicklungsgeschichte; im Jahre 1849 erhielt er noch die Professur der deskriptiven Anatomie mit den Präparierübungen dazu, so daß er längere Zeit 14–16 Stunden in der Woche Vorlesungen hielt. Der Würzburger Universität hätte kein größeres Glück widerfahren können, aber auch Kölliker bekam die Gelegenheit eine Lehr- und Forschertätigkeit ohne Gleichen zu entwickeln. Er hat zum damaligen Aufblühen der medizinischen Fakultät neben Virchow das Meiste beigetragen. Es entfaltete sich dadurch in Würzburg ein außerordentliches wissenschaftliches Leben unter den Lehrern und Studierenden. In den Instituten sammelten sich strebsame Schüler, die ihre ersten wissenschaftlichen Arbeiten machten und mit Stolz auf die Entdeckungen ihrer Lehrer blickten. Die Universität Würzburg war ihm dadurch so lieb geworden, daß er verschiedene Berufungen, nach Breslau, Bonn und auch nach München, ablehnte. Er hatte auch das Glück,

talentvolle junge Forscher zu finden, die ihn in seinem Amte unterstützten; es war namentlich der unvergeßliche, frühverstorbene Heinrich Müller, der durch seine anatomischen und physiologischen Arbeiten über die Netzhaut berühmt geworden war; dann der noch lebende vortreffliche vergleichende Histologe Franz Leydig und der spätere große Anatom Carl Gegenbaur. Mit Leydig wurde der erste, in später Abendstunde abgehaltene mikroskopische Kursus in Deutschland eingerichtet, Spezialvorlesungen über vergleichende Gewebelehre und vergleichende Entwicklungsgeschichte gehalten, für welche sich immer ein Kreis wissensdurstiger Zuhörer fand; heutzutage, mit dem einzigen Streben bei den Meisten die Prüfung mit Not zu bestehen, ist dies leider ganz anders geworden. Ich erinnere mich mit den Gefühlen des tiefsten Dankes an die schöne Zeit, in der ich bei ihm als junger Mediziner 1851/52 die Vorlesungen über Anatomie, Gewebelehre, Physiologie, Entwicklungsgeschichte, vergleichende Anatomie und vergleichende Entwicklungsgeschichte hören durfte und in der Handhabung des Mikroskops unterrichtet wurde zu einer Zeit, wo uns an der Münchener Universität noch keine Gelegenheit gegeben war die feineren Formen mit dem Mikroskop zu beobachten oder Entwicklungsgeschichte zu lernen. Durch seine Vorlesung wurde, obwohl sie keine Experimente und Apparate brachte, zuerst die Lust zur Physiologie in mir erweckt.

Nach dem Tode von Heinrich Müller (1864) gab er die Physiologie ab und behielt die Leitung des anatomischen und des zootomischen Instituts mit den Vorlesungen bei. Erst 1897 an seinem 80. Geburtstag, den er noch in voller geistiger Kraft und Schaffensdrang feierte, und nach 50jähriger Wirksamkeit als Professor in Würzburg überließ er die Professur für Anatomie seinem langjährigen Schüler Philipp Stöhr, las aber noch über vergleichende Anatomie, Mikroskopie und Entwicklungsgeschichte; vom 85. Lebensjahre ab prüfte er noch im Doktorexamen und war regelmäßig mit mikroskopischen Arbeiten im anatomischen Institut bis wenige Tage vor seinem Tode beschäftigt, so daß er 64 Jahre lang im Dienste der Wissen-

schaft verbrachte. Seine letzte einige Tage nach seinem Tode erschienene Arbeit handelte über die Entwicklung der Elemente des Nervensystems. Er genoß die Freude, daß viele der von ihm aufgestellten Lehren sich Bahn brachen und von Einfluß auf die weitere Entwicklung der morphologischen Wissenschaften waren. Auch im hohen Alter verschloß er sich dem Neuen nicht, sondern machte sich dasselbe schnell zu eigen, so daß er immer einer der Modernsten blieb.

Die größten wissenschaftlichen Erfolge Köllikers liegen auf dem Gebiete der mikroskopischen Anatomie und der Entwicklungsgeschichte. Man muß bedenken, welche gewaltigen Fortschritte in beiden Disziplinen in den 60 Jahren seit dem Eingreifen Köllikers gemacht worden sind; zu keiner Zeit war die Umwandlung derselben größer als in dieser, hervorgerufen durch die Ausbildung der Schwannschen Zellenlehre. Er hat die Fortschritte alle mitgemacht und tätig dabei mitgewirkt; keine Zeit war aber auch günstiger für einen jungen Forscher, wo jedes Bemühen reiche Früchte trug.

Sein Hauptverdienst besteht in der ungemein umfassenden und äußerst sorgfältigen Detailarbeit, der Ermittlung einer Fülle neuer Beobachtungstatsachen, die nötig waren um zu allgemeinen Schlußfolgerungen und Fragen zu gelangen; er hat dadurch den größten Nutzen geschaffen, wenn er auch keine neuen Probleme aufstellte und seiner Wissenschaft keine ganz neuen Wege erschloß. Jede auftauchende Beobachtung griff er alsbald voll Eifer auf, prüfte dieselbe nach und verfolgte sie weiter; durch seine reichen Erfahrungen wirkte er bei wichtigen Fragen von allgemeiner Bedeutung klärend und scharf kritisierend und trug so zur Lösung derselben bei.

Die Bedeutung Köllikers kann nicht schöner und wahrer geschildert werden als dies in der ihm von der physikal. mediz. Gesellschaft in Würzburg zum 80. Geburtstag gewidmeten Adresse durch Boveri geschehen. Es heißt darin: „Mit einer unvergleichlichen Allseitigkeit und seltenem Scharfblick begabt, haben Sie überall sofort die Fruchtbarkeit und Tragweite eines neuen Gedankens, einer neuen Beobachtung, einer

neuen Methode erkannt; mit immer gleichbleibender Jugendlichkeit haben Sie stets in das Neue sich hineingelebt, um alsbald allen Arbeitsgenossen voran zu schreiten. An jeder großen wissenschaftlichen Bewegung haben Sie führend Teil genommen."

Es gibt kaum einen Körperteil oder ein Gewebe der höheren und niederen Tiere, woran sich nicht eine wichtige mikroskopisch-anatomische Entdeckung Köllikers knüpft. Es sei nur erinnert an den ersten Nachweis der Bildung der Samenfäden, an den Nachweis des zahlreichen Vorkommens der glatten Muskelfasern und ihre erste isolierte Darstellung, an die Untersuchung der Vorgänge bei der Bildung und der Resorption der Knochen, an die Studien über den Nervenfaserverlauf in dem zentralen Nervensystem, dann an die wichtige Arbeit: „Die Selbständigkeit und Abhängigkeit des sympathischen Nervensystems durch anatomische Untersuchungen bewiesen". Bei seinen vergleichend-anatomischen Untersuchungen finden sich genaue Angaben über die feineren Formen vieler Gruppen, namentlich der wirbellosen Tiere; er wurde dadurch zu einem der Begründer der wissenschaftlichen Zoologie.

Auch bei seinen entwicklungsgeschichtlichen Arbeiten waren es weniger morphogenetische Fragen, die ihn beschäftigten, sondern wiederum außerordentlich sorgfältige mikroskopisch-anatomische Befunde. Er war, wie vorher schon erwähnt wurde, der Erste, der die Entwicklungsgeschichte eines wirbellosen Tieres, der Cephalopoden, eingehend verfolgte, nachdem vor ihm fast nur an Wirbeltieren von Pander, Baer, Remak, Rathke und Bischoff Beobachtungen gemacht worden waren.

In der ersten Zeit hat er auch physiologischen Vorgängen seine Aufmerksamkeit geschenkt. In der Arbeit über die Bildung der Samenfäden wurde dargetan, daß die Bewegungen derselben vitaler Natur sind und daß zur Ruhe gekommene Fäden durch kaustische Alkalien wieder zu lebhaften Bewegungen angeregt werden. Mit dem Chemiker Loewig tat er

das Vorkommen der Cellulose im Mantel der Tunikaten dar. Er zeigte, daß durch Eintrocknung unerregbar gewordene Nervenfasern durch Wasser wieder erregbar werden, was allerdings durch Eckhardt in anderer Weise gedeutet worden ist. Den Mechanismus der Erektion erklärte er zuerst durch Erschlaffung der glatten Muskeln der corpora cavernosa des Penis. Er studierte die Wirkung verschiedener Gifte (des Curare. Strychnin, Morphium, Coniin) auf die Muskeln, das Nervensystem und die Herzbewegungen; er machte ferner Beobachtungen über die Resorption der Fette, über Gallensekretion und über das elektromotorische Verhalten des schlagenden Froschherzens.

Durch seine mikroskopischen Beobachtungen erlangte Kölliker einen guten Anteil an der Ausbildung der Zellenlehre und namentlich auch an der Beantwortung der Frage nach der Herkunft der Zellen. Schleiden und Schwann glaubten noch, daß die Zellen aus unorganisiertem Material entständen; Kölliker waren schon früh Zweifel an dieser „Cytoblastenlehre“ gekommen, und er ließ die Gewebszellen aus den Furchungskugeln des Eies entstehen; später sprach er sich, wie auch Remak und Leydig, bestimmt dahin aus, daß es keine freie Zellenbildung gäbe, sondern alle Elementargebilde aus der Eizelle durch Teilung hervorgehen und zwar bevor Virchow, auf pathologische Beobachtungen gestützt, seine geflügelten Worte „omnis cellula e cellula“ aussprach. Er gab dabei eine genaue Darstellung des wichtigen Furchungsprozesses am Ei und beteiligte sich auch an der näheren Untersuchung der Form und Bedeutung des Zellkerns, woraus sich später, namentlich durch W. Flemmings Beobachtungen, die neue Lehre von den merkwürdigen Wandlungen des Zellkerns entwickelte.

Das lebhafteste Interesse nahm Kölliker an der durch Camillo Golgi 1894 eingeführten eigentümlichen Färbungsmethode, durch welche sich die histologischen Elemente des Nervensystems in großer Klarheit darstellen lassen; er war wiederum einer der Ersten, der die Wichtigkeit des neuen Hilfsmittels erkannte und dasselbe anwendete. Daran an-

schließend, war es die aus den Untersuchungen mit der Golgischen Methode hervorgegangene Neuronenlehre von Ramón y Cajal, die er mit jugendlicher Begeisterung erfaßte und durch unermüdliche Untersuchung des zentralen Nervensystems zu stützen suchte. Es handelt sich dabei um die prinzipiell wichtige Frage, ob die Leitung der Erregung im Nerven durch Kontinuität oder durch Kontakt sich vollziehe; Kölliker entschied sich noch in seiner letzten Untersuchung, entsprechend der Neuronenlehre, für die Übertragung durch Kontakt, während Eduard Pflüger in neuester Zeit auf das Entschiedenste gegen die Neuronentheorie auftrat und sie für unbegründet und den Erfahrungen der Physiologie widersprechend hält.

Er nahm ferner mit Waldeyer Stellung gegen die His'sche Parablastenlehre und beteiligte sich dadurch an der Lösung der schwierigen Frage nach der Quelle des Blutes und des Bindegewebes; er sucht sie in dem mittleren Keimblatt, welches aus dem Zellenmaterial des Primitivstreifens abstammt, das im Wesentlichen aus dem Ektoblasten hervorgeht.

Der berühmte Botaniker Jul. Sachs hatte die Teile der Pflanzenzelle nach ihrer Dignität geschieden und das vom Kern beherrschte Protoplasma, also den mit Leben ausgestatteten Teil der Zelle, die tätige Energide derselben genannt. Kölliker griff diese für die pflanzlichen Zellen aufgestellte Energidenlehre auf und dehnte sie auf die tierischen Gewebe aus. Unser Kollege Kupffer hat diese Vorstellungen für die tierische Zelle in seiner Rektoratsrede noch schärfer durchgeführt.

Auf Grund der Beobachtungen von Oskar Hertwig trat Kölliker für die hohe Bedeutung der Kernsubstanzen für die Vererbung ein.

Er lieferte auch wertvolle Beiträge zu der viel diskutierten Deszendenzlehre; er war wie die meisten Naturforscher gegen die einseitige Darwin'sche Selektionstheorie, die Theorie der natürlichen Zuchtwahl, zur Erklärung der Entstehung und Umwandlung der Arten, er war geneigt die Umwandlung im Wesentlichen auf innere, in der Organisation begründete Ursachen zurückzuführen.

Kölliker erwarb sich außerdem ein großes Verdienst durch seine ausgezeichneten Lehrbücher der mikroskopischen Anatomie, in welchen die feinere Struktur aller Teile des tierischen Organismus geschildert wird. Es war seinen Werken die Allgemeine Anatomie von J. Henle 1841 und das Handbuch der allgemeinen und speziellen Gewebelehre von J. Gerlach 1848 vorausgegangen. Zuerst kam 1850 und 1852 die große mikroskopische Anatomie oder Gewebelehre des Menschen in zwei Bänden, aber nur die spezielle Gewebelehre, während der in Aussicht genommene allgemeine Teil ausblieb; das Buch enthält die gründliche und vollständige Darstellung alles damaligen Wissens der Histologie. Es folgte dann 1852 die erste Auflage des Handbuches der Gewebelehre des Menschen, von dem 1867 die fünfte Auflage erschien. Durch die großen Fortschritte in der Erkenntnis des mikroskopischen Baues des Körpers war die „Gewebelehre" allmählich veraltet; der Siebenzigjährige begann die sechste Auflage derselben, welche ein völlig neues großes Werk wurde, das in drei Bänden erschien; in dem zweiten sind seine umfassenden Untersuchungen des feineren Baues des Zentral-Nervensystems mittelst der Golgischen Imprägnationsmethode enthalten; den dritten Band übergab er V. v. Ebner in Wien zur Vollendung.

Nicht minder wichtig ist seine Entwicklungsgeschichte des Menschen und der höheren Tiere, welche 1861 in erster Auflage erschien; für die zweite Auflage von 1879 hatte er alles auf Durchschnitten nochmals nachuntersucht und geprüft. Das Buch ist eine Fundgrube für die späteren Forscher über die Entwicklung des Hühnchens und Kaninchens und für die Organentwicklung der Säugetiere. In abgekürzter Form hat er dasselbe für weniger Geübte als Grundriß 1880 und 1884 in zweiter Auflage bearbeitet.

Diese ausgezeichneten Lehr- und Handbücher, welche die Ergebnisse seiner eigenen Untersuchungen weithin bekannt machten, werden noch für lange Zeit unentbehrliche Ratgeber für den Forscher sein. Das in ihnen zuerst eingeführte System der Gewebelehre ist überall angenommen worden.

Als er schon die Achtzig überschritten hatte, schrieb er 1899 seine Selbstbiographie „Erinnerungen aus meinem Leben“ mit einer eingehenden Analyse seiner Arbeiten.

Durch die mit Siebold 1848 unternommene Gründung der Zeitschrift für wissenschaftliche Zoologie trug er viel dazu bei die Zoologie aus einer blos beschreibenden Wissenschaft zu einer erklärenden zu erheben.

Mit Kiwisch und Virchow gründete er 1849 die angesehene physikalisch-medizinische Gesellschaft in Würzburg, an deren Gedeihen und Wirksamkeit er wesentlich beteiligt war. Neunmal führte er den Vorsitz in derselben.

Er war auch eines der tätigsten Mitglieder der durch die Initiative von Julius Kollmann im Jahre 1886 begründeten so ungemein nützlichen anatomischen Gesellschaft.

Es ist selbstverständlich, daß dem verdienten Mann viele Ehrungen dargebracht wurden. An seinem 70. Geburtstag feierten ihn die medizinische Fakultät, die physikalisch-medizinische Gesellschaft und fünfundzwanzig Schüler durch Festschriften; bei seinem 50jährigen Doktorjubiläum erhielt er acht Festschriften von der Universität und dem eidgenössischen Polytechnikum in Zürich mit dreizehn Abhandlungen, von der Zeitschrift für wissenschaftliche Zoologie, dem anatomischen Institut in Würzburg und seinen Schülern Merkel, Bonnet, Gegenbaur, His und Waldeyer.

Es mag noch bemerkt werden, daß Kölliker großen Wert auf die Pflege und Ausbildung des Körpers durch Leibesübungen aller Art legte. Durch vielfache Reisen suchte er die angesehensten Fachgenossen kennen zu lernen und seine Kenntnisse zu bereichern. Er war von feiner universeller Bildung, eine vornehme ehrwürdige, sympathisch berührende Persönlichkeit, freundlich entgegenkommend, namentlich auch der Jugend gegenüber; die größten Ehrungen änderten nichts an seinem schlichten leutseligen Wesen.

Schon im Jahre 1849, zwei Jahre nach seiner Berufung nach Würzburg, wurde er in unsere Akademie auf Vorschlag von Philipp v. Walther aufgenommen, der den damals noch

jungen Gelehrten als genauen Beobachter und verdienstvollen Arbeiter in der vergleichenden Anatomie pries; es war die erste Auszeichnung, die er durch eine Akademie erhielt. In diese Zeit und wohl auch von derselben Seite fiel die Anfrage, ob er nicht nach München kommen wolle.

Der Name Kölliker wird in der Geschichte der anatomischen Wissenschaft stets mit hoher Ehre genannt werden.

Georg Meissner.[1])

Unsere Akademie beklagt das in Göttingen erfolgte Ableben des Professors der Physiologie Georg Meißner, der am 30. März 1905 im Alter von 76 Jahren gestorben ist. Er war einer der wenigen noch lebenden Biologen, welche das von Johannes Müller uns hinterlassene große Erbe angetreten und weiter entwickelt haben. Vom reichsten Wissen und Können hat er noch einen großen Teil des weiten Gebietes der biologischen Wissenschaft übersehen und dasselbe mit wertvollen Gaben bereichert: er war als fein beobachtender Morphologe in der Zoologie der niederen Tiere, der Histologie und der Embryologie tätig und ebenso als experimentierender Physiologe in der Lehre von den Sinnesempfindungen, von den physikalischen und chemischen Vorgängen im Muskel, von der Verdauung des Eiweißes im Darmkanal und den Veränderungen vieler Stoffe im Stoffwechsel. Er ist also kein einseitiger Physiologe wie so viele der heutigen Zeit gewesen, denn er verstand es noch, zur Erforschung der physiologischen Vorgänge alle Hilfsmittel, das Mikroskop, die physikalischen und chemischen Methoden sowie das Experiment am Tier anzuwenden. Als in die Wissenschaft eingreifender Forscher war er den Jüngeren kaum mehr bekannt; denn schon seit

[1]) Siehe: Prof. H. Boruttau, Archiv für die ges. Physiologie 1905, Bd. 110, S. 351 und die medizinische Woche 1905, Nr. 18. — Otto Weiss, Münchener mediz. Wochenschrift 1905, Nr. 25, S. 1206. — M. Verworn, Nachrichten von der K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, geschäftl. Mitteil. 1905, Heft 1, S. 45.

35 Jahren hat er keine Arbeiten mehr veröffentlicht, obwohl er bis zu seinem Ende wissenschaftlich sich beschäftigte; durch einige in unwürdiger und beklagenswerter Form geführte verletzende Angriffe gegen mehrere seiner wertvollen Arbeiten, die er mit Aufbieten seiner ganzen bedeutenden Kraft durchgeführt hatte, war der mit einem äußerst lebhaften Temperament Begabte gekränkt und verbittert, so daß er zu dem Entschluß kam sich solchen Urteilen nicht mehr auszusetzen. Man kann dies bedauern, da vieles Wichtige in seinen Aufzeichnungen verschlossen blieb, aber man kann es verstehen: es ließe sich vielleicht gegen seinen Standpunkt geltend machen, daß wir auf der Erde die Pflicht haben, nach unseren Fähigkeiten an dem Ausbau der Wissenschaft ohne Rücksicht auf unsere Person mitzuarbeiten.

Meißner wurde am 19. November 1829 als Sohn eines Obergerichtsrates zu Hannover geboren und studierte an der ehrwürdigen, der wissenschaftlichen Tätigkeit so günstigen Göttinger Universität von 1849—1853 Medizin und Naturwissenschaften. Er hatte dabei als Lehrer Männer wie Friedrich Wöhler, Wilhelm Weber und Rudolf Wagner; vor allem wirkte letzterer auf ihn ein. Dieser geistvolle, ungemein anregende Physiologe, der in der Zoologie, der vergleichenden Anatomie und Embryologie umfassende Kenntnisse besaß, gab ihm zuerst den weiten Ausblick auf die ganze Biologie, besonders in der vergleichend-anatomischen Richtung. Man hatte damals erkannt, welche große Bedeutung das Studium der einfachen niederen Seetiere für die Beurteilung der Lebenserscheinungen besitzt; auf einer zu diesem Zwecke 1851 unternommenen Reise an die Meeresküste von Triest durfte Meißner noch als Student seinen Lehrer begleiten, was seine frühe Reife dartut.

Unter Wagners Leitung arbeitete er sodann im physiologischen Institut, und es glückte ihm 1853, bis dahin unbekannte Sinnesorgane in der äußeren Haut, die Tastkörperchen, zu entdecken; dieser schwierige Nachweis bezeugt, wie scharf Meißner damals schon beobachtete. Die Widmung seiner als Doktordissertation erschienenen Schrift an Rudolf Wagner: „Durch

Sie erhielt Sinn und Bedeutung, was dem Schüler der Zufall entdeckte" beweist die Bescheidenheit und Selbsterkenntnis des jungen Forschers, die heutzutage wohl nur selten Nachahmung finden dürfte. Er ging dann (1853) nach Berlin zu Johannes Müller, der die ganze Biologie seiner Zeit umfaßte und von dem er, wie alle seine Schüler, den nachhaltigsten Eindruck erhielt; wie kaum bei einem anderen, wächst seine Bedeutung immer mehr.

Von da wanderte Meißner nach München, wohin ihn der Ruhm des vergleichenden Anatomen Karl Theodor v. Siebold, der eben mit seinen Arbeiten über die Parthenogenesis beschäftigt war, gelockt hatte; hier machte er vergleichend-anatomische und embryologische Untersuchungen an niederen Tieren, insbesondere an gewissen Fadenwürmern.

Durch diese Arbeiten wurde die Aufmerksamkeit auf den begabten und vielversprechenden jungen Gelehrten gelenkt, so daß der erst 26 Jahre alte (1855) einen Ruf als ordentlicher Professor der Anatomie und Physiologie nach Basel erhielt, wo er mit dem eigenartigen hervorragenden Chemiker Schönbein zusammentraf, dessen Forschungen über das Ozon Meißners spätere Untersuchungen in dieser Richtung veranlaßt haben. Aber schon nach zwei Jahren folgte er einem Rufe als Professor der Physiologie und Zoologie an die Universität Freiburg im Breisgau als Nachfolger von Alexander Ecker und als sein einstiger Lehrer Rudolf Wagner wegen Kränklichkeit das Lehrfach der Physiologie in Göttingen aufgab, wurde mit glücklichem Griff Meißner (1860) an seine Stelle gewählt; er wirkte daselbst über 40 Jahre als um die Wissenschaft höchst verdienter Forscher und als pflichterfüllter beliebter Lehrer, der in äußerst lebendigem anschaulichem Vortrag den Studierenden das richtige Verständnis über das Zustandekommen der Lebenserscheinungen beizubringen und sie zu naturwissenschaftlichem Denken anzuleiten wußte.

Zu Ende der neunziger Jahre mußte er wegen Kränklichkeit seine wissenschaftliche Tätigkeit mehr und mehr einschränken, er hielt aber noch seine Vorlesungen, bis er im Jahre 1901 die Enthebung von dieser Verpflichtung erhielt.

Überblicken wir nun die hauptsächlichsten Leistungen Meißners in annähernd chronologischer Folge.

Seine ersten Arbeiten bezogen sich, wie schon erwähnt, auf die feinere Anatomie der äußeren Haut, insbesondere auf die genaue Beschreibung der von ihm aufgefundenen und nach ihm benannten Tastkörperchen. Man kannte bis dahin die Endigungen der sensiblen Nerven in der äußeren Haut nicht, nur die dem Muskelgefühl dienenden Vater-Pacinischen Körperchen im Unterhautzellgewebe. Und nun zeigten sich in den Papillen der Lederhaut der Innenfläche der Hand und der Fußsohle, also der mit dem feinsten Tastgefühle versehenen Teile, besondere Endorgane, eine Klasse neuer Sinnesorgane. Er schrieb ihnen den Tastsinn, d. i. die Berührungsempfindung zu, und nicht die Temperatur- und die absolute Druckempfindlichkeit, welche an allen Stellen der Haut zustande kommen können; auch versuchte er später eine Theorie ihrer Erregung, die er durch Ungleichheiten des auf ihnen lastenden Druckes entstehen ließ, und prüfte dieselbe durch Experimente.

Von Bedeutung sind seine auf neue Versuche gestützten Erörterungen (1854 und 1859) über die komplizierten Bewegungen des Augapfels, die durch physiologische für die Orientierung im Raume wichtige Anordnungen beschränkt sind. Wie Donders und Listing gezeigt haben, ist mit jeder Lage der Gesichtslinie zum Kopfe eine ganz bestimmte Augenstellung verbunden und jedem Erhebungs- und Seitenwendungswinkel entspricht ein bestimmter Raddrehungswinkel. Indem Meißner die Neigung der Doppelbilder eines vertikalen Stabes bei den verschiedenen Augenstellungen untersuchte oder auch die Lagenveränderungen betrachteter Objekte bestimmte, wenn sie in jeder Augenstellung im blinden Fleck verschwinden, konnte er die von Donders und Listing aufgestellten Gesetze bestätigen. Bei der so viel erörterten Frage nach den Punkten des Raumes, welche mit beiden Augen einfach gesehen werden, waren bekanntlich durch Johannes Müller die Punkte einer durch den fixierten Punkt und die Knotenpunkte der beiden Augen gezogenen Kreislinie erkannt worden; alle Punkte dieses

sogenannten Horopterkreises entwerfen ihr Bild auf unter gleichen Länge- und Breitegraden liegenden Netzhautstellen oder auf die identischen Netzhautstellen; dies war aber nur der auf eine horizontale Ebene beschränkte Horopter und nicht die Horopterfläche. Meißner unternahm es durch feine Versuche, die Form der Horopterfläche zu bestimmen und zeigte, daß der Horopter verschieden ist, abhängig von der Richtung der Gesichtslinien und der dieser Richtung entsprechenden Orientierung beider Augen.

Von Wichtigkeit war ferner die Auffindung (1857) von Nerven und nervösen Zentralorganen in der Submukosa des Darmes, des nach ihm benannten Meißnerschen Plexus; er hat ihn uns hier im physiologischen Institut gleich nach seiner Entdeckung an frischen Holzessigpräparaten mit den damaligen einfachen Mitteln mit großer Gewandtheit gezeigt.

Seine vorher erwähnten, zum Teil bei Siebold ausgeführten vergleichend-anatomischen, embryologischen und physiologischen Untersuchungen an Fadenwürmern (an Ascaris mystax, an Mermis albicans und an Gordius) führten ihn zu der damals viel umstrittenen Frage nach dem Eindringen der Samenfäden in das Ei bei der Befruchtung. Er war einer der ersten (1856), der die von Keber am Ei der Flußmuschel gefundene Mikropyle, mit Samenfäden bedeckt, beim Seeigel wahrnahm und das von M. Barry bei den Kaninchen und von Newport bei den Fröschen behauptete Vorkommen von Samenfäden innerhalb der Eihülle bestätigte.

In die Jahre 1858—1862 fallen seine grundlegenden chemischen Untersuchungen über die Veränderungen des Eiweißes bei der Verdauung. C. G. Lehmann hatte das von ihm bei der Magenverdauung aus Eiweiß erhaltene, in Wasser lösliche Endprodukt Pepton genannt; Meißner zeigte, daß es mancherlei Übergangsstufen gibt, die er als Para-, Meta- und Dyspepton bezeichnete; das Parapepton ist das beim Neutralisieren der sauren Lösung ausfallende, nicht in Pepton übergehende Produkt; das Metapepton fällt bei der Syntonin- und Kaseinverdauung aus der neutralen Lösung durch 0,1 prozentige Säure heraus; das Dyspepton ist durch längere Einwirkung der Säure unlös-

lich gewordenes Parapepton. Das schließlich erhaltene Pepton ist nach ihm ein Gemisch von mehreren Peptonen, und er unterscheidet ein durch konzentrierte Salpetersäure sowie durch schwache Essigsäure und Ferrocyankalium ausfallendes a. Pepton, ein durch Salpetersäure nicht, aber durch starke Essigsäure und Ferrocyankalium ausfallendes b. Pepton und ein weder durch Salpetersäure noch durch Essigsäure und Ferrocyankalium ausfallendes c. Pepton. Man hat seitdem in der Erkenntnis dieser Produkte Fortschritte gemacht, und man würde jetzt das a. und b. Pepton als Albumosen, das c. Pepton als eigentliches Pepton und den unverdaulichen Rückstand des Dyspeptons als Nuklein bezeichnen. Meißner hat jedoch die Grundtatsachen festgestellt und es ist ein großes Unrecht, seine Verdienste in dieser Richtung zu unterschätzen, denn es ist schwieriger, eine neue Bahn zu brechen als auf einer solchen weiter zu wandeln. Auch an der Feststellung der Wirkung des Pankreassaftes auf Eiweiß war Meißner beteiligt; nachdem Corvisart erkannt hatte, daß der Bauchspeichel für sich allein aus Eiweiß die nämlichen löslichen Peptone wie der Magensaft macht, hielten viele diese Umwandlung für die Folge einer Fäulnis durch niedere Organismen; Meißner bestätigte als einer der ersten Corvisarts Angaben, aber er meinte noch, nur das schwach sauere Sekret habe ohne Fäulnis verdauende Wirkung. Durch langes Kochen von Eiweiß mit Wasser bekam er Stoffe wie bei der Magen- und Pankreasverdauung. Die Verdauung war ihm eine Umprägung der aus den verschiedenen Eiweißstoffen der Nahrung im Darm entstandenen Peptons zu dem spezifischen Bluteiweiß des betreffenden Tieres; er ist in diesem Gedanken seiner Zeit vorausgeeilt, nur ging er nicht so weit, wie es jetzt von manchem geschieht, welche das Eiweißmolekül im Darm zersplittern lassen, um es dann wieder aus den Trümmern aufzubauen.

Es ist Meißner in einer ungemein feinen Untersuchung gelungen in dem Muskelfleisch kleine Mengen eines echten reduzierenden und gärungsfähigen Zuckers, den Fleischzucker, aufzufinden. Nebenbei sei bemerkt, daß er mit seinem Schüler

Ritter, ebenso wie der Engländer Pavy gegen Claude Bernard, während des Lebens keinen Übergang des Glykogens der Leber in Traubenzucker annahm. da sie in der ganz frischen Leber keinen Zucker nachzuweisen vermochten; die letztere Tatsache ist vollständig richtig, aber nicht die Schlußfolgerung. denn während des Lebens wird der entstandene Zucker alsbald durch das Blut weggeschwemmt.

Ein ganz anderes Gebiet betreten die elektrophysiologischen Untersuchungen Meißners. Zu diesen hat er sich eines neuen Meßinstrumentes bedient; er führte nämlich mit dem geschickten Göttinger Mechaniker Meyerstein die nach dem Prinzip von Wilhelm Weber gebaute Spiegelbussole ein, bei der zur Eliminierung des Erdmagnetismus die Annäherung von zwei Magneten und zur Dämpfung der Magnetschwingungen das Induktionsverfahren von Gauss verwendet wurde; dieselbe übertraf an Empfindlichkeit die älteren Apparate. Zunächst prüfte er mittelst Elektroskop und Kondensator das elektrische Verhalten der Oberfläche des menschlichen Köpers; er suchte die Ursache dafür unter der Haut, vor allem in den Muskeln. Dann ging er an die Prüfung der elektrischen Erscheinungen des zusammengedrückten und gedehnten Muskels im Vergleich mit denen bei der Muskelkontraktion, die durch Du Bois Reymonds Untersuchungen über tierische Elektrizität auf die Wirkung während des Lebens präformierter elektromotorischer Moleküle zurückgeführt worden waren. Meißner fand nun, daß der Wadenmuskel des Frosches bei der Kompression in der Längsrichtung eine Verminderung des ruhenden Muskelstromes, bei der Dehnung eine Verstärkung desselben zeigt, und er war daher geneigt, die sogenannte negative Schwankung bei dem Tetanus des Muskels nicht von der Erregung des Muskels, sondern von der Formveränderung desselben abzuleiten. Du Bois Reymond, der dieses Gebiet als seine Domäne betrachtete und keinen Widerspruch ertrug, übte an Meißners Angaben eine ungemein gereizte und ungerechte Kritik; es muß dagegen betont werden, daß die interessanten Beobachtungen von Meißner nicht widerlegt worden sind.

Man hat vielfach trophische Nerven im Körper angenommen, welche der Ernährung der Teile vorstehen sollen, namentlich war es die nach der Durchschneidung des sensiblen Nervus trigeminus oder seines Augenastes am Auge des Kaninchens eintretende Augenentzündung, welche zu einer solchen Annahme führte. Man meinte andererseits, es handle sich dabei um die Folgen äußerer Schädlichkeiten an dem unempfindlich gewordenen Auge und in der Tat trat die Entzündung nicht ein, als Meißner mit Büttner das Auge durch eine Kapsel vor solchen Läsionen schützte. Der erste Beobachter der Erscheinung, der Niederländer Snellen, hielt die Empfindungslosigkeit für die Ursache der Entzündung. Schiff dagegen die Lähmung der Gefäßnerven und die Ausdehnung der Blutgefäße, während Meißner längere Zeit die Lähmung für die Ernährung der Gewebe nötiger Nerven annahm. Er hat mancherlei Beobachtungen als Beweise für seine Anschauung beigebracht, namentlich daß bei Erhaltung eines Teiles der Nervenfasern im Augenaste die Entzündung trotz völliger Empfindungslosigkeit ausblieb. Neuere Beobachtungen haben jedoch die Existenz besonderer trophischer Nerven widerlegt.

Es folgten nun die in der zweiten Hälfte der sechziger Jahre mit Hilfe chemischer Methoden gemachten umfassenden Arbeiten Meißners über das Entstehen einer Anzahl von Zersetzungsprodukten im Körper beim Stoffwechsel; ich halte dieselben für seine bedeutendsten und reifsten Leistungen. Er hat durch dieselben gezeigt, was eigentlich physiologische Chemie ist (worüber man heutzutage den merkwürdigsten Vorstellungen begegnet), nämlich die Anwendung der Chemie zur Untersuchung und Erklärung der Lebensvorgänge, nicht die chemische Untersuchung der Konstitution isolierter chemischer Verbindungen, wenn sie auch im Organismus vorkommen, und ihrer Zersetzungsprodukte im chemischen Laboratorium, welche der reinen Chemie zugehören, wie die klassischen chemischen Arbeiten von Emil Fischer über die Harnsäure, die Zuckerarten und das Eiweiß dartun, die für die Entwicklung der Physiologie allerdings von größter Bedeutung sind. Meißners

hierher gehörige Untersuchungen beginnen mit dem mit F. Jolly geführten Nachweis der Bernsteinsäure im Harn mit Fleisch und viel Fett gefütterten Hunden; dieselbe geht offenbar aus dem Fett hervor, da sie zunimmt mit der Menge des gereichten Fettes. Beim Kaninchen trat viel Bernsteinsäure im Harn auf nach reichlicher Fütterung mit Mohrrüben, welche äpfelsauren Kalk enthalten, oder beim Kaninchen, Hund und Menschen nach Darreichung von äpfelsaurem Kalk sowie auch nach Aufnahme von viel Spargeln. Es fand sich im Hundeharn bei Fütterung mit Fleisch stets etwas Harnsäure vor, bei vegetabilischer Nahrung nur Spuren; bei eigentlichen Pflanzenfressern war sie entgegen den gewöhnlichen Angaben stets vorhanden.

Im Jahre 1828 hatte der Chemiker F. Wöhler die denkwürdige Entdeckung gemacht, daß nach Darreichung von Benzoesäure im Harn Hippursäure erscheint, deren Zerlegung in Benzoesäure und Glykokoll 1845 Dessaignes gelang. Es war dieses Entstehen der im Harn der pflanzenfressenden Säugetiere vorkommenden, komplizierter gebauten Hippursäure aus zwei einfacheren Verbindungen das erste Beispiel einer Synthese im Tierkörper. Meißner suchte nun (1866) mit seinem Schüler Shepard nach dem Ort dieser Synthese und der Herkunft der Benzoesäure, des aromatischen Komplexes der Hippursäure des Harns der Pflanzenfresser. Nach Ausschaltung der Nieren fand sich im Blut keine Hippursäure vor, woraus sie schlossen, daß die Synthese der Hippursäure in der Niere stattfindet und nicht, wie Kühne und Hallwachs glaubten, in der Leber. Das Glykokoll der Hippursäure wird nach ihnen bei den Zersetzungen im Körper gebildet, die Benzoesäure stammt dagegen aus der Kutikularsubstanz der verzehrten oberirdischen Pflanzenteile; denn wenn die Kaninchen die Schalen von Äpfeln und fleischigen Blättern oder die Hülsen von Cerealien und Leguminosen erhielten, schieden sie reichlich Hippursäure aus, aber keine nach Verabreichung der inneren abgeschälten Teile.

Als die Bildungsstätte des Harnstoffes betrachtete man

lange Zeit die verschiedenen Organe und nicht die Nieren, da hervorragende Chemiker nach Entfernung der Nieren eine Anhäufung von Harnstoff im Blut gefunden hatten; später (1865) behauptete namentlich Zalesky, der bei Hoppe-Seyler arbeitete, daß nach Unterbindung der Harnleiter sich im Blute Harnstoff anhäufe, aber nicht nach Ausschneidung der Nieren, woraus er schloß, daß in der Niere der Harnstoff entstehe. Meißner trat alsbald dieser Anschauung entgegen, da er bei Kaninchen nach Exstirpation der Niere die gleiche Harnstoffansammlung im Blute beobachtete wie nach Unterbindung der Uretheren. Ich habe um dieselbe Zeit bei Kaninchen und Hunden nach Entfernung der Nieren beträchtliche Ansammlungen von Harnstoff im Blut und allen Organen gefunden und dadurch ebenfalls bewiesen, daß der Harnstoff nicht erst in der Niere etwa aus Kreatin gebildet wird. Die Untersuchungen Meißners über die Ausscheidung von Kreatin und Kreatinin ergaben im wesentlichen die auch von mir erhaltenen Resultate.

Meißner machte bei dieser Gelegenheit auch Versuche über die Ursache der urämischen Erscheinungen, indem er Tieren nach Unterbindung der Harnleiter verschiedene Zersetzungsprodukte wie Kreatin, Kreatinin, bernsteinsaures Natron und Harnstoff in die Venen einspritzte; nur größere Mengen des letzteren beschleunigten den Tod. Ich habe dargetan, daß der Harnstoff an und für sich nicht giftig ist, sondern nur seine Nichtausscheidung aus dem Körper schädlich wirkt.

Da er in der Leber beim Säugetier stets viel Harnstoff, beim Vogel viel Harnsäure fand, so vermutete er, daß der Harnstoff in der Leber der Säugetiere, die Harnsäure in der Leber der Vögel direkt aus der Zersetzung von Eiweiß und zwar aus dem in diesem Organ zerfallenen Eiweiß der Blutkörperchen hervorgeht; wir wissen jetzt, daß der Harnstoff und die Harnsäure allerdings in der Leber entstehen, aber nicht direkt aus Eiweiß, sondern aus von anderen Organen zugeführten stickstoffhaltigen Zersetzungsprodukten, den Vorstufen des Harnstoffes und der Harnsäure.

Nachdem ich nachgewiesen hatte, daß bei der Muskel-

arbeit direkt nicht mehr Eiweiß zerfällt, wohl aber mehr stickstofffreie Stoffe zu Grunde gehen, war die Frage entstanden, ob auch die stickstofffreien Stoffe als Quellen der Muskelarbeit dienen können; Meißner sprach schon im Jahre 1868 aus, daß außer dem stickstofffreien Material der Nahrung auch das Eiweiß oder wenigstens die aus ihm abgespaltenen stickstofffreien Stoffe die Energie für die Muskelarbeit liefern. Wir wissen jetzt mit Sicherheit, daß beide Klassen von Stoffen sich bei der Entstehung der Muskelkraft beteiligen.

Durch seinen Umgang mit Schönbein in Basel war Meißner auf das Ozon und sein merkwürdiges Verhalten zum Organismus, besonders zu dem Blute, aufmerksam geworden; dadurch kam er zu seinen umfangreichen, Schönbein gewidmeten Untersuchungen über den elektrisierten oder ozonisierten Sauerstoff. Es wurde dabei das vollständig trockene Ozon zunächst in einer konzentrierten Jodkaliumlösung absorbiert; sowie man es nun durch Wasser gehen ließ, so traten dichte Nebel auf von dem Antozon Schönbeins oder dem Atmizon nach Meißner; letzterer hielt das Ozon für negativ elektrisch geladenen, das Antozon für positiv elektrisch geladenen Sauerstoff, welche bei der Elektrisierung immer zusammen auftreten, während andere die Nebel für bei der Ozonzerstörung entstandenes Wasserstoffsuperoxyd ansahen. Bei weiteren Untersuchungen meinte er, daß das Ozon nicht eine, wie man glaubte, durch eine andere Atomzahl im Molekül bedingte allotropische Modifikation sei, sondern daß eine Veränderung des Molekularbewegungszustandes vorliege. Es war eine fein durchdachte, mit äußerster Sorgfalt ausgeführte experimentelle Untersuchung.

Eine große Anzahl von Arbeiten ging von seinen zahlreichen Schülern auf seine Anregung und unter seiner Leitung aus seinem Laboratorium hervor.

Eines wesentlichen Verdienstes Meißners muß noch Erwähnung getan werden, nämlich des mit dem Anatomen Jakob Henle für die Jahre 1856—1871 herausgegebenen Jahresberichtes über die Fortschritte der Anatomie, Entwicklungsgeschichte und Physiologie, der in rein sachlicher Weise und

doch streng kritisch die Resultate der Forschung brachte; ich war ihm für seine Berichte über die Stoffwechselversuche der hiesigen Schule dankbar, da er ihnen volles Verständnis zu einer Zeit entgegenbrachte, in der sie von anderen Seiten kaum Beachtung fanden.

Das größte Interesse zeigte er für die die Lebensvorgänge nahe berührenden hygienischen Arbeiten Pettenkofers; indem er die Bedeutung hygienischer Kenntnisse für den Mediziner und Arzt richtig schätzte, hielt er vom Jahre 1874 an eine Vorlesung über öffentliche Gesundheitspflege, die erste der Art an einer norddeutschen Universität. Er führte auch Untersuchungen des Brunnenwassers von Göttingen aus und wirkte mit, den Gesundheitszustand der Stadt zu verbessern.

Meißner war, wie gesagt, noch nach dem Jahre 1872, in dem er seine Publikationen abbrach, bis zuletzt mit wissenschaftlichen Arbeiten beschäftigt. Sein Assistent Boruttau berichtet über Arbeiten zur Widerlegung der Urzeugung und zum Beweis der Notwendigkeit von Mikroorganismen für Gärung und Fäulnis, wobei es ihm gelang, frische tierische Organe in Wasser ohne irgend einen desinfizierenden Zusatz nur durch Abhalten der Keime mittelst gebogener Glasröhren und Watteverschluß jahrelang unverändert aufzubewahren. Dann über Untersuchungen der anatomischen Beziehungen zwischen Ohrlabyrinth und Kleinhirn der Vögel. Ferner über die Analyse der Vokalklänge der menschlichen Stimme und der Klänge vieler Musikinstrumente vermittelst der phonautographischen Methode, wozu er als feiner Kenner der Musik, der jahrelang in der Karwoche hierher kam, um an klassischer Kirchenmusik sich zu erquicken, besonders geeignet war. Dann über rein mathematische Studien über das Newtonsche Fallgesetz.

So zeigt sich uns Meißner als einer der scharfsinnigsten und verdientesten Physiologen seiner Zeit, der unverlöschliche Spuren seiner Wirksamkeit hinterläßt. Erfüllt von dem Drang nach Erkenntnis war er von unbestechlicher Wahrheitsliebe und Gewissenhaftigkeit; streng gegen sich und andere war der etwas verschlossen erscheinende Mann doch von wahrer

Herzensgüte und tiefem Gemüt, wie mir ein rührender Brief zeigte, den ich nach dem Tode seiner Frau, einer Tochter unseres unvergeßlichen Kollegen Kobell, erhielt. Wenn ich in die Vergangenheit blicke, wo wir vor 50 Jahren in die Wissenschaft eingetreten sind, so erinnere ich mich an die reine Freude, die ich an den Fortschritten unserer Wissenschaft hatte, an denen mein edler Freund einen so großen Anteil besaß.

Walther Flemming.[1])

Das korrespondierende Mitglied der Akademie Walther Flemming, Professor der Anatomie an der Universität zu Kiel, ist am 4. August 1905 im Alter von 62 Jahren aus dem Leben geschieden. Er war ein hervorragender Histologe, der durch seine Beobachtungen mit dem Mikroskop die Kenntnis des feineren Baues der Zelle in vorher nicht geahnter Weise vertieft und durch die Aufhellung dieses Gebildes, aus dem alles Organisierte hervorgeht und an welches das Leben geknüpft ist, Zoologie wie Botanik, Entwicklungsgeschichte wie pathologische Anatomie in gleichem Grade gefördert hat.

Er wurde am 21. April 1843 in Schwerin geboren als Sohn des verdienten Psychiaters und Leiters der Irrenanstalt Sachsenberg Karl Friedrich Flemming. Der Sohn Walther Flemming zeigte frühzeitig eine besondere Neigung für die schöne Literatur sowie ein Talent für Dichtung und Sprache, so daß er anfangs sich der Philologie widmen wollte; er wandte sich aber dann der Medizin zu, die er an den Universitäten zu Göttingen, Tübingen, Berlin und Rostock studierte. Bald begann er sich mit mikroskopischen Untersuchungen zu beschäftigen, zuerst unter der Leitung von F. E. Schulze, damaligen Prosektors bei dem Anatomen Henke in Rostock, deren erste Frucht (1868) seine Doktordissertation über den Ziliarmuskel der Haussäugetiere war. Nachdem er bei dem Zoologen

[1]) Siehe die Nekrologe von Friedrich Meves in der Münchener Medizinischen Wochenschrift 1905, Nr. 46, S. 2232. — Und von Dr. F. Graf v. Spee im Anatomischen Anzeiger 1906, Bd. 28, S. 41.

Semper in Würzburg und bei dem Physiologen W. Kühne in Amsterdam kurze Zeit Assistent gewesen, wurde er Prosektor am Anatomischen Institut in Rostock und habilitierte sich (1871) daselbst als Privatdozent der Anatomie und Entwicklungsgeschichte mit einer Arbeit über Bindesubstanz und Gefäßwandung bei Mollusken. 1872 ging er mit Henke nach Prag, woselbst er im folgenden Jahre die Ernennung zum außerordentlichen Professor mit dem Lehrauftrag für Histologie und Entwicklungsgeschichte erhielt; dorten schon sammelte sich um ihn eine Anzahl von talentvollen Schülern, die zum Teil ihre ersten Arbeiten unter seiner Leitung machten. Im Jahre 1876 folgte er dem Rufe als Nachfolger unseres verstorbenen Kollegen C. Kupffer als ordentlicher Professor der Anatomie nach Kiel, wo er 26 Jahre lang als Zellforscher und Lehrer überaus tätig war.

Flemming ist seiner Arbeitsrichtung nach ausschließlich Histologe, aber als solcher bahnbrechend gewesen und zwar vorzüglich auf einem Gebiete, der bis an die Grenze des Sichtbaren gehenden feinsten Struktur der Zelle, das zu den schwierigsten Objekten der mikroskopischen Forschung gehört. Er war einer der größten Meister in der Kunst der mikroskopischen Beobachtung, ebenso scharf blickend als Beobachter, wie vorsichtig und gewissenhaft in seinen Generalisationen.

Ein Meister auch in der Technik, rastlos an stetiger Vervollkommnung seiner Methoden arbeitend, hat er am lebenden Objekt sowie an dem mit Reagentien und mit den Hilfsmitteln der Färbung behandelten die zartesten Strukturen enthüllt.

Dadurch hatte er sich in kurzer Zeit zu einem der berühmtesten Histologen aufgeschwungen.

Nach seiner Doktordissertation folgten zoologisch-histologische Arbeiten, Beobachtungen über Sinnesepithelien und Bindegewebe bei Mollusken und die auch für die Physiologie wichtigen Aufschlüsse über Bildung und Rückbildung der Fettzelle im Bindegewebe; nach Toldt soll das Fettgewebe ein besonderes Organ sein, welches nicht aus dem Bindegewebe

hervorgeht, Flemming suchte dagegen nachzuweisen, daß die Fettzellen sich aus den gewöhnlichen Bindegewebszellen bilden und das Fett als Produkt der Stoffwechselvorgänge in der Zelle entsteht.

Beobachtungen über die ersten Entwicklungserscheinungen am Ei der Teichmuschel und der Najaden führten ihn auf sein eigentliches Forschergebiet, zu dem Studium des Baues und der Lebenserscheinungen der Zelle, das ihn von nun an während seines ganzen Lebens beschäftigen sollte. Mit der größten Ausdauer untersuchte er den Leib der Zellen und insbesondere ihres Kerns in der Absicht aus der genauen Kenntnis der Form auch die Erscheinungen ihres Lebens, eine Zellularphysiologie. zu entwickeln. Seine zahlreichen grundlegenden Arbeiten hierüber hat er 1882 in seinem Hauptwerke: „Zellsubstanz, Kern und Zellteilung“ zusammengefaßt; dasselbe bildete die Grundlage für alle weitere Zellforschung, die wohl manche neue Tatsachen zufügte, aber keine Irrtümer nachwies.

Bis zu Flemmings Eingreifen glaubte man, die Zellsubstanz oder das Protoplasma wäre eine gleichmäßige feinkörnige Masse, von einer Struktur derselben war kaum und nur in einzelnen Fällen etwas bekannt. Es waren allerdings schon von einigen, z. B. von unserem Kollegen C. Kupffer, Fadenstrukturen in der Zellsubstanz beschrieben worden; aber erst Flemming hat die verschiedenen Zellen daraufhin eingehend geprüft und überall im Inhalt derselben ein eigentümliches Fadenwerk vorgefunden. eine Filarmasse und eine Interfilarmasse; er hielt es für wahrscheinlich, daß es sich dabei um ein feines Gerüst handelt.

Noch merkwürdigere Strukturen und Vorgänge erkannte er am Zellkern, den man lange für ein homogenes Gebilde oder für ein mit Flüssigkeit gefülltes Bläschen gehalten hatte. Es waren wohl schon hie und da in den Kernen strangförmige Bildungen gesehen worden: Flemming gelang es jedoch (1875) eine gerüstförmige Struktur an der frischen Eizelle von Muscheln mit Sicherheit zu erkennen und dann sich zu überzeugen, daß dieses Gerüstwerk im lebenden Kern ein allgemeines Vor-

kommen ist; seine Beobachtungen lieferten die Grundlage zu dem heutigen Wissen von dem Bau des Zellkerns.

Von größter Bedeutung sind die von ihm an lebenden Objekten beobachteten Veränderungen bei der Teilung der Zellen und Zellkerne, der Mitose. Bei der ausschließlich durch Teilung stattfindenden Vermehrung der Zellen zeigen sich die ersten Phänomenr bekanntlich am Kern; nach der alten Lehre von Remak soll sich dabei der Kern nach Verdoppelung des Nukleolus in zwei Hälften durchschnüren; Flemming war einer der ersten, der dabei an sich furchenden lebenden Eizellen wirbelloser Tiere viel kompliziertere Vorgänge fand. In seinen berühmten Beiträgen zur Kenntnis der Zelle und ihrer Lebenserscheinungen (1878) wurde von ihm der ganze merkwürdige Verlauf der Kernteilung Schritt für Schritt verfolgt und festgestellt, daß der Kern dabei nicht zu Grunde geht, wie es anfangs schien, sondern auf Umwegen durch sogenannte indirekte Mitose sich teilt. Diese Erkenntnisse legten den Grund zu einer neuen Epoche in der Zellenlehre, besonders in der Struktur und der biologischen Bedeutung des Kerns.

Die gleiche mitotische indirekte Zellteilung und Zellvermehrung wies er dann auch nach bei der Regeneration fertiger Gewebe, z. B. an den Lymphzellen in den Keimzentren der Lymphknötchen sowie bei den Epithelzellen und bei den Samenfäden, wobei das Chromatin der Hodenzelle zum Sperminkopf, die achromatische Substanz des Kerns zu dessen Hülle und der Zellleib zum Sperminschwanz wird.

Noch eine besonders wichtige, im Jahre 1891 gemachte Untersuchung muß erwähnt werden, nämlich die der zellulären Zentren in Gewebs- und Wänderzellen. Flemming hatte 1875 im Zentrum der Radiensysteme bei der Teilung des Eies von Anodonta besondere körperliche Gebilde gesehen, welche dann auch andere an sich furchenden Eiern beobachteten und Polkörperchen nannten, die in der Zellsubstanz erst nach Beginn der Teilung auftreten sollen. Nach van Beneden und Boveri finden sich die Polkörperchen oder Zentrosomen schon vorher und sind allgemeine und dauernde Teile der Zelle; im Innern

der Zentrosomen wurde noch ein winziges Zentralkorn, der Zentriol, erkannt. Flemming fand nun im Zentrum der Strahlung in verschiedenen Gewebszellen neben den völlig ruhenden Kernen kleinste Doppelkörnchen, die aber nicht, wie man meinen könnte, Zentrosamen sind, sondern den Zentriolen entsprechen; die Zentriolen sind demnach allgemeine und permanente Zellorgane und nicht die Zentrosomen.

Sehr verdienstvoll sind ferner seine in den Jahren 1892 bis 1898 in den Merkel-Bonnetschen Ergebnissen veröffentlichten Berichte über die neuen Arbeiten über die Morphologie der Zellen, die nur er mit solcher Sachkenntnis und Kritik schreiben konnte.

Es wären ja noch viele wichtige Arbeiten Flemmings aufzuzählen, z. B. die zur Kenntnis des Ovarialeies, die er Karl Kupffer zum 70. Geburtstag gewidmet hat. Er hatte anfangs wohl manche Gegner, aber später schlossen sich viele Mitarbeiter an ihn an, die auf der von ihm geschaffenen Grundlage weiter bauten. Zahlreiche junge Anatomen kamen nach Kiel, um bei dem bewährten Meister sich in der histologischen Forschung auszubilden.

Ein im Jahre 1892 auftretendes schweres Nervenleiden beeinträchtigte seine gewohnte Tätigkeit, ohne jedoch seinen Verstand und sein Gedächtnis zu alterieren, so daß er 1901 um Enthebung von seinem Amte nachsuchen mußte.

Alle, welche ihm näher traten, verehrten den edlen Mann von unabhängiger Gesinnung und wahrer Herzensgüte.

Ferdinand Frhr. v. Richthofen.[1]

Durch das am 6. Oktober 1905 erfolgte Ableben des ordentlichen Professors für Geographie an der Universität zu Berlin Ferdinand v. Richthofen hat die geographische Wissenschaft ihren bedeutendsten Vertreter verloren. Aus regster Tätigkeit

[1] Siehe den Nekrolog von Dr. E. Frhr. Stromer v. Reichenbach, Beilage zur Allgem. Ztg. 1905, Nr. 238, und „Gedächtnisfeier für Ferd. Frhr. v. Richthofen“, Beilage zur Allgem. Ztg. 1905, Nr. 252.

wurde er im Alter von 72 Jahren abberufen. Er ist von der Geologie, in der er zuvor Bedeutendes geleistet und seinen Sinn für Naturforschung ausgebildet hatte, zur Geographie geführt worden.

Am 5. Mai 1833 zu Karlsruhe, einem kleinen Orte Schlesiens geboren, studierte er an den Universitäten zu Breslau und Berlin Geologie, zu der er schon früh besondere Neigung gefaßt hatte; mit einer geschätzten Dissertation „de Melaphyro“ trat er 1856 zuerst vor die Öffentlichkeit. Nach einer geologischen Studienreise durch Dalmatien und die benachbarten Teile der Balkanhalbinsel begab er sich nach Wien, um an den praktischen Aufnahmsarbeiten der geologischen Reichsanstalt Teil zu nehmen. An diesem berühmten, damals unter der Leitung von Ferdinand v. Hochstetter stehenden Institut fand er wie so viele junge Geologen die beste Ausbildung. Gleichsam als Probeaufgabe übernahm der junge Praktikant im Sommer 1856 die geologische Durchforschung eines der wichtigsten, zugleich aber auch schwierigsten Gebiete in den südtiroler Alpen, nämlich die Umgebung der berühmten Fundstätte von Versteinerungen in St. Cassian und des höchst interessanten Fassatals mit dem glänzendsten Erfolge, so daß schon diese erste größere geologische Publikation als Grundlage für die geologische Auffassung der gesamten südlichen Kalkalpen gelten kann; sie zeichnet sich durch scharfe und kritische Beobachtung der so verwickelten Gebirgsverhältnisse, durch klare und übersichtliche Darstellung sowie durch geistreiche Versuche aus, die außergewöhnlichen Erscheinungen alpiner Gesteinsbildungen naturgemäß zu erklären; für die viel umstrittene Theorie der Dolomitbildung, welche in Südtirol durch die plötzlich zu enormer Mächtigkeit anschwellende Ausbildung noch besondere Wichtigkeit erlangt, fand er eine neue Erklärung in der Annahme ihrer Entstehung aus umgewandelten Korallenriffen. In den folgenden Jahren beteiligte sich Richthofen an den Arbeiten der geologischen Reichsanstalt in verschiedenen Gegenden Österreichs und gewann überall, wo er mit seinem eminenten Fleiß und scharfem Blick seine For-

schungen vornahm, neue Erfolge. Sorgsam in der Einzelbeobachtung ließ er gleichwohl nie unversucht, einen höheren wissenschaftlichen Standpunkt zu gewinnen, indem er im Überblick über das Ganze allgemeine Gesetze ableitete und auf diese Weise die geologische Wissenschaft wesentlich förderte. So wußte er namentlich mit vielem Glück aus den Ergebnissen seiner Forschungen in den vulkanischen Gebieten Ungarns eine tiefere Gliederung der bis dahin fast zusammenhangslos betrachteten trachytischen Gebilde zu gewinnen. In den tiroler Kalkalpen, wo er gleichzeitig mit der bayerischen geognostischen Aufnahme beschäftigt war, trugen seine Arbeiten nicht wenig dazu bei, diese Teile des Hochgebirges in beiden Ländergebieten in einheitlichem Sinne zur geologischen Darstellung zu bringen.

Eine Wendung in der wissenschaftlichen Tätigkeit Richthofens brachten hierauf seine großen Reisen hervor, die ihn der Geographie zuführten. Er wurde nämlich im Jahre 1860 aufgefordert, die preußische außerordentliche Gesandtschaft des Grafen zu Eulenburg, die mit den ostasiatischen Reichen Japan, China und Siam Handelsverträge abschließen sollte, als Geologe mit dem Range eines Legationssekretärs zu begleiten. Zahlreiche wichtige Reiseberichte, welche bereits während der Expedition erschienen, z. B. über den Gebirgsbau an der Nordküste von Formosa, Bemerkungen über Ceylon, die Nummuliten-Formation in Japan und auf den Philippinen legen Zeugnis ab von seiner unermüdlichen und erfolgreichen Tätigkeit. Als die Expedition von Siam heimwärts ging, blieb Richthofen zurück, um allein und selbständig weitere Aufgaben zu lösen; er wandte sich nach Hongkong, Schanghai, besuchte Formosa, die Philippinen, Celebes, Java und wollte von Bangkok zum Ganges vordringen, um über Kaschmir durch China zum Tian-Schan zu kommen, was ihm aber erst vier Jahre später gelang. Er begab sich daher nach Kalifornien und die Sierra Nevada, die er durchforschte. Die Ergebnisse dieser ausgedehnten Reisen wurden in zahlreichen wichtigen Publikationen niedergelegt, so die über das Alter der Gold führenden Gänge und

der von ihnen durchsetzten Gesteine, über die Metallproduktion Kaliforniens und insbesondere die Principles of the natural system of volcanit rocks, in welcher Abhandlung er eine generelle Klassifikation aller auf der Erde auftretenden vulkanischen Gesteine mit dem ihm eigentümlichen Scharfsinn und auf Grund seiner ausgedehnten Erfahrungen aufstellt, auch die Gesetze der gegenseitigen Beziehungen zwischen Massen-Eruptionen und vulkanischer Tätigkeit einer gründlichen Erörterung unterzieht und endlich die Beziehung der Verteilung vulkanischer Gesteine zur Gestaltung der Erdoberfläche klar legt.

Von da zog er nun 1868 nach Schanghai, um während vier Jahren sich der umfassenden Erforschung Japans und Chinas zu widmen, die er in den verschiedensten Richtungen durchzog; von den 18 Provinzen Chinas lernte er dabei 13 kennen. Seine Forschungen in China lieferten ihm nach der im Jahre 1872 erfolgten Rückkehr nach Europa das reichste Material zu der bis jetzt eingehendsten und gründlichsten Schilderung der damals noch wenig bekannten geographisch-geologischen Verhältnisse dieses ausgedehnten Landes. Mit diesem großartigen Reisewerk über China, der Frucht Jahre langer Arbeit, welches nach allen Beziehungen den bedeutendsten auf diesem Gebiete erschienenen Publikationen ebenbürtig zur Seite gestellt zu werden verdient, hat sich Richthofen einen Ehrenplatz unter den hervorragendsten Geologen und Forschern auf geographischem Gebiete gesichert; es enthält die Grundzüge des geologischen Aufbaus Ostasiens und ist bahnbrechend für die wissenschaftliche Erschließung des fernen Ostens gewesen. Außerdem waren von Wichtigkeit seine Briefe über China an die ihn unterstützende Handelskammer in Schanghai mit gründlichen Schilderungen der politischen, sozialen und wirtschaftlichen Verhältnisse Chinas; dann die Schrift: Aufgaben und Methoden der heutigen Geographie, die Anleitung zur praktischen geographischen Arbeit und der im Jahre 1886 erschienene „Führer für Forschungsreisende“, worin er die Prinzipien seiner Forschung darlegte.

Nach Abschluß seiner großen Reise erhielt er 1875 einen Ruf als ordentlicher Professor der Geologie an die Universität Bonn mit der Zusage, die Stelle erst nach Vollendung des ersten Teils seines Reisewerkes (1879) antreten zu dürfen; 1883 erfolgte die Berufung als Professor der Geographie nach Leipzig und 1886 die nach Berlin in gleicher Eigenschaft.

Wie er vom Geologen zum Geographen sich allmählich entwickelte, beschrieb er in seiner vor der Akademie der Wissenschaften in Berlin im Jahre 1899 gehaltenen Antrittsrede mit folgenden Worten: „Mein Studium war die Geologie. Ihre praktische Anwendung auf den Gebirgsbau heimischer und fremder Länder stellte ich mir früh als Ziel der Forschung. Das Streben, die Gesamtheit der Erscheinungen zu erfassen, welche dem Wesen und den natürlichen Veränderungen von mir untersuchten Erdräumen zugrunde liegen, führte mich zur physischen Geographie, inbesondere zu deren wichtigstem Zweig, der Geomorphologie.“ Er setzte dabei die geologischen, physischen, historischen, wirtschaftlichen und kulturellen Probleme stets zu einander in Beziehung und zog aus seinen wissenschaftlichen Untersuchungen die praktischen Folgerungen.

So ist er zum angesehendsten Geographen seiner Zeit und zum Richtung gebenden Führer in seiner Wissenschaft geworden. Es gingen außerdem von ihm noch andere wichtige Anregungen hervor. So war er der Gründer und erste Direktor des Instituts für Meereskunde in Berlin, in dem die deutsche Meeresforschung sich konzentrierte. Das geographische Institut der Universität erhob er auf die Höhe einer Musteranstalt. Mehr als 30 Jahre war er der eifrigste Förderer der Gesellschaft für Erdkunde und 17 Jahre lang ihr erster Präsident, der er den Geist ernster wissenschaftlicher Forschung einzupflanzen wußte. Auf dem Geographentage in München 1884 beantragte er die Schaffung eines Repertoriums, das dann als „Bibliotheca geographica“ von der Berliner Gesellschaft für Erdkunde verwirklicht wurde.

Er war auch ein ungemein eifriger und beliebter Lehrer, der eine große Anzahl von Schülern um sich versammelte, die

er für die Wissenschaft zu begeistern wußte. In seiner viel besuchten Vorlesung der vergleichenden Übersicht der Kontingente gab er aus dem reichen Schatze seines Wissens ein anschauliches Bild von dem Zusammenhang des geologischen Aufbaues der Gestalt der Erdoberfläche, den klimatischen Verhältnissen, der Flora und Fauna und der wirtschaftlichen Entwicklung der Bewohner. Von besonderer Bedeutung war das Colloquium für Vorgerücktere, einem Seminar für ältere Studierende und junge Gelehrte aller möglichen Wissensgebiete, in dem er sein Bestes gab und seine Schule erzog. Ein edler Mensch von schlichter sittlicher Größe und unabhängigem Charakter ist mit ihm dahingegangen.

Otto Stolz.

Am 23. November 1905 starb in Innsbruck der Professor der Mathematik an der Universität daselbst Dr. Otto Stolz im Alter vom 63 Jahren. Er wurde am 2. Juli 1842 zu Hall in Tirol als der Sohn des Direktors der Landesirrenanstalt geboren und studierte in Innsbruck und Wien Mathematik und Astronomie. Nachdem er 1864 promoviert hatte, habilitierte er sich 1867 an der Wiener Universität als Privatdozent für Mathematik und wurde zugleich als Assistent an der Wiener Sternwarte angestellt. Im Jahre 1869 verließ er diese Stellung, um mit Hilfe eines Reisestipendiums bei Kummer, Weierstraß und Kronecker in Berlin, sodann bei Clebsch in Göttingen seine Studien fortzusetzen. 1871 nahm er seine Lehrtätigkeit in Wien wieder auf, wurde aber schon im folgenden Jahre nach Innsbruck berufen, wo ein zweiter Lehrstuhl für Mathematik errichtet worden war; 1876 erhielt er die ordentliche Professur daselbst. Trotz mehrfacher verlockender Rufe nach Wien ist er doch seiner Landesuniversität treu geblieben. Er war wirkliches Mitglied der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften zu Wien und seit 1900 korrespondierendes Mitglied unserer Akademie.

Als Schüler von Clebsch wandte er sich zunächst der analytischen Geometrie zu. Seine erste größere Arbeit auf diesem Gebiete: „Über die geometrische Bedeutung der komplexen Elemente in der Geometrie“ (1871) löste in überaus glücklicher Weise das Problem, gewisse rein geometrische Ergebnisse der Staudtschen Forschungen dem Gebiete der analytischen Geometrie einzuverleiben. Es folgten eine Reihe weiterer analytisch-geometrischer Arbeiten, die, wie die ebengenannte während der siebenziger Jahre in den Mathematischen Annalen erschienen sind und sich auf singuläre Punkte, Assymptoten und Schnittpunkte algebraischer Kurven beziehen. Eine tiefere kritische Untersuchung gewisser Grundlagen der Geometrie, wie sie in seiner Abhandlung: „Über die Geometrie der Alten, insbesondere über ein Axiom des Archimedes“ (1883) zutage tritt, sodann wohl auch seine Lehrtätigkeit und die in der Berliner Studienzeit empfangenen Anregungen führten ihn allmählich ganz jener Richtung zu, welche man wohl allgemein als die Weierstraßsche zu bezeichnen pflegt und deren Endziel in der strengen arithmetischen Begründung und lückenlosen Ausgestaltung der Funktionenlehre besteht. Die Mathematischen Annalen der letzten zwanzig Jahre und die Sitzungsberichte der Wiener Akademie enthalten eine ansehnliche Zahl Stolzscher Arbeiten über Gegenstände des ebenbezeichneten Gebietes: Grenzwerte, Punktmengen, Doppelreihen, gleichmäßige Konvergenz, unendlich kleine Größen, Maxima und Minima, bestimmte Integrale u. a.

Ohne hier auf Einzelheiten einzugehen, sei nur hervorgehoben, daß der für die Theorie der ein- und mehrfachen Integrale fundamentale Begriff des Inhalts einer Punktmenge zuerst von Stolz formuliert worden ist (1884). Die Resultate seiner eigenen Forschungen und die Früchte einer ungewöhnlich ausgedehnten Literaturkenntnis faßte er in zwei größeren Werken zusammen: Den zweibändigen „Vorlesungen über allgemeine Arithmetik“ (1885—1886) und den „Grundzügen der Differential- und Integralrechnung“ (3 Bände, 1893—1899); ihnen folgte die „Theoretische Arithmetik“; dieselben haben

nicht wenig dazu beigetragen, die schärferen Methoden der neueren Analysis und deren schwierige Untersuchungsgebiete weiteren Kreisen zugänglich zu machen, und sind jedem Fachmann zu unentbehrlichen Handbüchern geworden. In unseren Sitzungsberichten vom 7. Januar 1905 erschien noch eine Abhandlung von ihm: „Beweis eines Satzes über das Vorhandensein des komplexen Integrals.“

Stolz hatte auch das Bestreben, die Lehren der Wissenschaft dem Volke zugänglich zu machen; dahin gehört sein vortreffliches Buch „Die Sonne“ sowie seine Rede über „Größen und Zahlen“, in welche er einige Wesensbegriffe der Mathematik mit philosophischen Betrachtungen in geistvoller Weise entwickelt.

Er war ein ausgezeichneter Lehrer, zu dessen Schülern viele Studierende der Theologie gehörten.

Seine Freunde, zu denen ich mich zu zählen das Glück hatte, haben ihn als echte Tiroler Natur, begeistert für die Schönheiten seines Vaterlandes, trotz seines großen Wissens als einfachen und biederen Mann von zuverlässigem Charakter und großer Liebenswürdigkeit gekannt.

Generalmajor Karl v. Popp.

In dem am 22. Oktober 1905 im 81. Lebensjahre in München verstorbenen Generalmajor a. D. Karl von Popp verlor die Akademie einen um die Erforschung der Urgeschichte Bayerns höchst verdienten Mitarbeiter. Popp war nicht nur ein hervorragender tapferer Offizier, er war auch ein Gelehrter, der sich mit großer Ausdauer und Sachkenntnis der Erforschung des Limes und seiner fortifikatorischen Anlagen und Straßen widmete. Als Militär, anfangs dem Topographischen Bureau des Generalquartiermeisterstabes zu gleicher Zeit mit unserem Mitgliede v. Orff zugeteilt, interessierte er sich schon früh lebhaft für diese Reste der altrömischen Befestigungen in Deutschland und er hatte durch deren genaue Untersuchung

die Kenntnisse über dieselben sehr gefördert. Da war es selbstverständlich, daß die Akademische Kommission für Erforschung der Urgeschichte Bayerns sich 1890 als technischen Beirat den Mann erwählte, welcher der erfahrenste für ihre römischen Untersuchungen war. In der Festrede am 141. Stiftungstage der Akademie im Jahre 1900 hat Herr Johannes Ranke die höchst ersprießlichen Leistungen Popps für die Kommission nach den Berichten des damaligen Vorsitzenden der Kommission Heinrich v. Brunn geschildert. Popp wird darin als eine für seine Aufgabe in seltener Weise qualifizierte Persönlichkeit bezeichnet: „Gewöhnt im Gelände überall persönlich zu untersuchen, Terrainstudien und Aufnahmen in technisch und künstlerisch vollendeter Weise selbst auszuführen, vollkommen vertraut mit jeder Einzelheit der vorliegenden Aufgaben, seit lange überall in Stadt und Land bekannt und verehrt als Förderer der urgeschichtlichen topographischen Untersuchungen.“ Er übernahm die Beaufsichtigung und Leitung sowie die selbstständige Untersuchung der römischen Altertumsreste; als solcher nahm er von neuem den Limes mit seinen fortifikatorischen Anlagen topographisch auf, wodurch mehrere ältere Annahmen berichtigt werden konnten. Außerdem wurden von ihm die römischen Fundplätze und Straßen im Lande besucht, genau untersucht und kartographisch festgelegt. Er hatte ferner die Angaben der Mitarbeiter über neu gemachte Römerfunde zu prüfen und ihre Untersuchungen zu überwachen. Auch die vorrömischen und mittelalterlichen Befestigungen nahm er unter seinen Schutz. Unausgesetzt war der liebenswürdige Mann bereit, seine Mitarbeiter durch Rat und Tat zu unterstützen, neue Mitglieder der Sache zu gewinnen und die historischen Vereine und Altertumsgesellschaften zur Tätigkeit anzuregen. In dieser Weise hat er die urgeschichtlich-archäologische Landesaufnahmen neu belebt. Er war auch der Vorsitzende der Kartenkommission, welche genaue topographische Aufnahmen der urgeschichtlichen Bodenaltertümer machte und sie in die Katasterblätter eintrug, um für spätere Zeiten ihren Ort festzustellen. Als die Erforschung des römischen Limes

auf das Deutsche Reich überging, wurde Popp stimmführendes Mitglied der Reichslimes-Kommission und ihres engeren Ausschusses.

Die Akademie verlieh Popp im Jahre 1899 an seinem 80. Geburtstage für seine vielseitige und ergebnisreiche Tätigkeit bei der Kommission die goldene Medaille „Bene Merenti“ als höchste Auszeichnung. Wir werden des verdienstvollen treuen Mitarbeiters stets in Dankbarkeit und Hochachtung gedenken.

Berichtigungen.

1. Zu der Abhandlung „Über die Grundlagen der Theorie der Fakultätenreihen" von Edmund Landau.

Auf S. 156, Z. 6 v. u. lies: $|c_n - c_{n+1}|$ statt $(c_n - c_{n+1})$.

Auf S. 159, Z. 10 v. o. lies: $\frac{1}{n^{1+\Re(x_1-x_0)}}$ statt $\frac{1}{n^{1+\Re(x_1-x_0)}}$.

Auf S. 161, Z. 12—14 v. o. lies:

$$\Re(x_0) + \gamma_1 \leq u < \Re(x_0) + \gamma_2, \quad \gamma_4 \leq v \leq \gamma_3,$$

wo $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ vier reelle Größen bezeichnen $(0 < \gamma_1 < \gamma_2, \gamma_4 < \gamma_3)$, die so gewählt sind, daß etc.

Auf S. 161, Z. 6—5 v. u. lies:

Wenn eine ganze Zahl γ oberhalb der fünf Zahlen $|x_0|$, $|\Re(x_0) + \gamma_1| + |\gamma_3|$, $|\Re(x_0) + \gamma_2| + |\gamma_3|$, $|\Re(x_0) + \gamma_1| + |\gamma_4|$ und $|\Re(x_0) + \gamma_2| + |\gamma_4|$ gewählt wird, so etc.

---

2. Zu der Abhandlung „Einige Folgerungen aus der Cauchyschen Integralformel bei Funktionen mehrerer Veränderlichen" von F. Hartogs.

S. 224 Z. 10 v. o. ist hinter „welche" einzuschalten: (abgesehen von dem einfachsten, die Unmöglichkeit isolierter singulärer Stellen betreffenden Falle)

Sitzungsberichte

der

Königl. Bayer. Akademie der Wissenschaften.

Mathematisch-physikalische Klasse.

Sitzung vom 3. November 1906.

1. Herr Sebastian Finsterwalder legt eine Abhandlung von Herrn Moritz v. Rohr, wissenschaftlichen Mitarbeiter der Firma Zeiß in Jena, vor über: „Die beim beidäugigen Sehen durch optische Instrumente möglichen Formen der Raumanschauung.“

Der Charakter der natürlichen Perspektive mit einem Auge besteht darin, daß das Projektionszentrum vom Objekt aus gesehen gegen den Beobachter zu liegt und nahe Dinge größer erscheinen als gleich große ferne. Beim einäugigen Sehen durch optische Instrumente können aber auch alle gleich großen Gegenstände in gleicher Größe erscheinen, ja sogar die fernen größer als die nahen. In solchen Fällen kann man um einen konvexen Körper herumsehen und z. B. von einem Würfel 5 Flächen von einem Punkt aus überblicken. Beim beidäugigen Sehen hängt die zustande kommende Raumanschauung außerdem von der Art und Weise ab, wie durch das optische Instrument die beiden Augen in den Objektraum hinausprojiziert werden, ob ihre gegenseitige Stellung dabei ungeändert bleibt, ob sie

zusammenfallen oder vertauscht sind. Es entstehen so neun Formen der Raumanschauung, von denen sechs bereits bekannt sind.

2. Herr Herm. Ebert überreicht eine Arbeit seines Schülers, des Herrn Dr. C. W. Lutz, Assistenten am erdmagnetischen Observatorium, welcher die luftelektrischen Beobachtungen an der hiesigen Sternwarte durchführt: „Über einen neuen Flammen-Kollektor und dessen Prüfung im elektrischen Felde.“

Zu den wichtigsten luftelektrischen Messungen gehört die Bestimmung des elektrischen Spannungsunterschiedes zwischen der freien Atmosphäre und der Erde. Man gebraucht hiezu besondere Apparate „Kollektoren“ genannt, welche den elektrischen Spannungszustand oder das „Potential“ der sie umgebenden Luft annehmen. Vor allem sind in Verwendung die Flammenkollektoren, denen aber seither zwei bedeutende Nachteile anhafteten: sie verlöschen schon bei mäßiger Luftbewegung und ihre Angaben werden vom Winde beeinflußt, wodurch unter Umständen erhebliche Fehler in die Potentialmessungen hineingebracht werden. Verfasser hat nun einen neuen besonders wirksamen Flammenkollektor konstruiert, der mit Sicherheit bei jedem Winde brennt, leicht transportabel und sparsam im Verbrauche ist.

Dieser Apparat wurde in einem künstlich hergestellten elektrischen Felde einer eingehenden Prüfung unterzogen und insbesondere der Einfluß der Luftbewegung auf seine Angaben untersucht. Auf Grund seiner Messungen kommt der Verfasser zu dem Schlusse, daß sich durch Anwendung zweier, völlig gleichgebauter Kollektoren der beschriebenen Art, die in verschiedener Höhe isoliert im freien Terrain aufgestellt werden, eine einwandsfreie Messung des dort bestehenden luftelektrischen Potentialgefälles ermöglichen läßt.

3. Herr Herm. Ebert berichtet über Versuche, welche er in Gemeinschaft mit Herrn Dr. Max Edelmann im Laufe des verflossenen Jahres über „Pulsationen von kurzer Dauer in der erdmagnetischen Feldkraft“ angestellt hat.

Schon früher waren regelmäßige Schwingungen bei Gelegenheit erdmagnetischer Störungen beobachtet worden, welche in den Feinregistrierungen oft sehr entfernter Stationen in auffallender Übereinstimmung hervortraten und Eschenhagen glaubte (1896) in solcben Pulsationen von ca. 30 Sekunden Periodendauer die „erdmagnetischen Elementarwellen“ gefunden zu haben. Indessen wurden bald Anzeichen dafür erhalten, daß in den erdmagnetischen Elementen regelmäßige Schwankungen von noch viel kürzerer Dauer vorkommen. Um diese zu verfolgen wurde auf störungsfreiem Terrain im Walde (zwischen Icking und Wolfratshausen) ein vieladriges Kabel zu einer größeren Schleife ausgelegt und mit einem empfindlichen Edelmannschen Saitengalvanometer verbunden, dessen überaus dünner Metallfaden jeder Schwankung der elektrischen Kraft genau folgt, welche durch das Ein- oder Austreten von erdmagnetischen Kraftlinien in oder außer der Leiterschleife geweckt wird; die interessanten Schwingungsbilder, die sich hierbei auch an störungsfreien Tagen ergaben, konnten auf rotierenden Filmstreifen auch photographisch fixiert werden; einige derselben wurden in der Sitzung vorgelegt.

4. Herr H. v. Seeliger legt eine Arbeit des Herrn Dr. J. B. Messerschmitt, Observators des erdmagnetischen Observatoriums bei der Sternwarte: „Magnetische Ortsbestimmungen in Bayern“ (2. Mitteilung) vor.

Ein über das ganze Land ziemlich gleichmäßig verteiltes Netz von Stationen wurde für die magnetische Landesaufnahme durchbeobachtet. Die Ergebnisse lassen im Zusammenhang mit den vor 50 Jahren von Lamont angestellten Messungen die seither stattgefundenen Änderungen der magnetischen Elemente genau ermitteln. Weiterhin konnten die wichtigsten magneti-

schen Störungsgebiete festgestellt und ein Zusammenhang mit den Anomalien der Schwerkraft und mit den geologischen Verhältnissen festgestellt werden.

5. Herr Alfred Pringsheim legt eine Note des Herrn Dr. Georg Faber in Karlsruhe vor: „Über Potenzreihen mit unendlich vielen verschwindenden Koeffizienten.“

Der Verfasser gibt ein sehr einfaches Beispiel für die von Herrn E. Fabry bemerkte Tatsache, daß gewisse Potenzreihen mit unendlich vielen, unbegrenzt sich erweiternden Lücken nur eine einzige singuläre Stelle auf dem Konvergenzkreise besitzen.

Die beim beidäugigen Sehen durch optische Instrumente möglichen Formen der Raumanschauung.

Von **Moritz v. Rohr.**

(*Eingelaufen 3. November.*)

(Mit Tafel IV.)

Wenn man die Formen der Raumanschauung, die durch die verschiedenen binokularen Instrumente vermittelt werden, systematisch ordnen will, so stößt man bei der Pseudoskopie auf eine gewisse Schwierigkeit. Diese Erscheinung ist nicht nur auf eine gewissermaßen zufällige Art entdeckt worden, sondern sie wird auch heute noch in einer recht indirekten, an den Einzelheiten der pseudomorphen Instrumente haftenden Weise der Orthoskopie gegenübergestellt.

Die Betrachtung der Strahlenbegrenzung schien hier ein einfaches Einteilungsprinzip an die Hand zu geben, und die eingehende Behandlung der verschiedenen Fälle lieferte auch eine Erweiterung der Erkenntnis für die beim einäugigen Sehen auftretenden Möglichkeiten.

Wenn man mit freien Augen ein Objekt betrachtet, so sind stets zwei Bedingungen ohne weiteres erfüllt, und zwar ist ihre Erfüllung so selbstverständlich, daß ihr Bestehen bei der Behandlung des Sehvorganges meistens übersehen wird. Einmal liegt im Sinne der Lichtbewegung das Objekt in Bezug auf jedes Einzelauge vorn, und dann ist die Lage der beiden Augen zueinander stets so, daß ihre Medial- oder Nasenseiten einander zu-, ihre Lateral- oder Schläfenseiten voneinander abgewandt sind. Beide Bedingungen sollen in der neben-

stehenden Figur 1 als erfüllt kenntlich gemacht sein. Die erste von ihnen ist die Bedingung des einäugigen, die zweite die des beidäugigen natürlichen Sehens. Es ist auch ganz unmöglich, sich beim Gebrauch der unbewaffneten Augen den Objekten gegenüber von der Einhaltung dieser Bedingungen frei zu machen.



Fig. 1. Die Betrachtung des Objekts O mit unbewaffneten Augen.

Der Charakter der natürlichen Perspektive.

Die soeben erwähnte Lage des Einzelauges zum Objekt hat zur Folge, daß sich das Projektionszentrum jenes flächenhaften Bildes, das allein dem Auge zugänglich ist, im Beobachter oder zwischen Objekt und Beobachter befindet; dabei ist es für den Charakter der Perspektive gleichgültig, ob sie durch die Mitte der Augenpupille oder — im freien, direkten Sehen — durch den Augendrehungspunkt bestimmt wird. Ja, es ändert sich der perspektivische Charakter — die geringere Größe weiter entfernter Gegenstände — nicht, wenn die Strahlenbegrenzung durch ein enges Loch zwischen dem Objekt und dem Auge vorgenommen wird, während die Beobachtung bei ruhig gehaltenem Auge durch die weit geöffnete Pupille, oder bei bewegtem Kopfe und entsprechend bewegtem Auge als eine reine Schlüssellochbeobachtung zustande kommt.

Das Gemeinsame für alle diese Fälle soll dadurch hervorgehoben werden, daß man überall da, wo es sich um die gewöhnliche Perspektive handelt, dieselbe Bezeichnung für den Strahlengang anwendet. Da in diesen Fällen stets das Zentrum der Projektion vom Objekt aus gerechnet in der Richtung auf den Beobachter zu liegt, so sei der Strahlengang als ein entozentrischer (von ἐντός = diesseits) eingeführt.

Dieser Charakter der natürlichen Perspektive, daß vom Objekt aus gesehen das Zentrum nach dem Beobachter zu in endlicher Entfernung liegt, und daß daher ein näheres Objekt

dem Beobachter unter einem größeren Gesichtswinkel erscheint als ein gleichgroßes ferneres, ist unumgänglich nötig, wenn die Erscheinungsformen der Umgebung auf Grund der Erfahrung schnell und zutreffend gedeutet werden sollen. Man geht kaum zu weit, wenn man der natürlichen Perspektive für die Raumvorstellung eine noch größere Bedeutung beilegt als sogar dem Sehen mit beiden Augen.

Die Aufhebung der natürlichen Perspektive.

Die optischen Instrumente bieten die Möglichkeit, sich von den verschiedenen soeben aufgezählten Beschränkungen frei zu machen, sei es, daß das sie verlassende Licht nur gebrochen oder nur gespiegelt oder gebrochen und gespiegelt wurde. Bei der Unvollständigkeit, mit der die Wirkung solcher optischen Vorkehrungen betrachtet zu werden pflegt, erscheint es zweckmäßig, hier einen kurzen Exkurs einzuschalten, wobei auf die ausführlicheren Darstellungen verwiesen sei, die sich an anderen Stellen[1]) finden.

Die Wirkung eines optischen Instruments auf einer Schirmfläche (meistens einer Schirmebene) beschränkt sich stets auf die Abbildung eines flächenhaften Objektgebildes oder meistens der Einstellungsebene. Alle nicht in dieser Einstellungsebene liegenden Objektpunkte werden von der Eintrittspupille des Instruments durch Büschel endlicher Öffnung in sie hineinprojiziert, so daß sie in ihr unscharf, d. h. als Zerstreuungskreise, erscheinen. Für die Perspektive kommt es allein auf

---

[1]) Die Bilderzeugung in optischen Instrumenten vom Standpunkte der geometrischen Optik. Bearbeitet von den wissenschaftlichen Mitarbeitern an der optischen Werkstätte von Karl Zeiß P. Culmann, S. Czapski, A. König, F. Löwe, M. von Rohr, H. Siedentopf, E. Wandersleb. Herausgegeben von M. von Rohr. 8⁰. XX, 587 Seiten mit 133 Textfig. Berlin, J. Springer, 1904, S. 466—507.

Grundzüge der Theorie der optischen Instrumente nach Abbe. Von S. Czapski. 2. Aufl. Unter Mitwirkung des Verfassers und mit Beiträgen von M. von Rohr. Herausgegeben von O. Eppenstein. (Sonderabdruck aus A. Winkelmanns Handbuch der Physik, Bd. 6.) Leipzig, J. A. Barth, 1904. gr. 8⁰. XVI, 479 Seiten mit 176 Textfig., S. 248—261.

die Mittelpunkte dieser Zerstreuungskreise an, und zwar werden diese durch alle die Strahlen bestimmt, die von der Mitte der Eintrittspupille ausgehen. Die so auf der Einstellungsebene entstehende Darstellung, das objektseitige Abbild, wird dem Auge dargeboten — unter Umständen unter verändertem Gesichtswinkel und in abweichendem Maßstabe —, doch kann stets die Wirkung des optischen Instruments für das unbegrenzt akkommodierende Auge in theoretischer Strenge durch das objektseitige Abbild ersetzt werden, wenn man die Gesichtswinkel w' kennt, die durch das Instrument auf der Bildseite hervorgebracht werden.

Je nach der Größe der Augenpupille im Verhältnis zu der Austrittspupille des Instruments sind auch bei den optischen Instrumenten die beiden schon für das unbewaffnete Auge wichtigen Fälle möglich, nämlich der des unbehinderten Sehens, wo der Augendrehungspunkt die Perspektive bestimmt, und der der Schlüssellochbeobachtung, wo die Pupille des Instruments für die Perspektive bestimmend ist.

Eine Abweichung von der bisher allein betrachteten entozentrischen Perspektive ergab sich, als Systeme konstruiert wurden, bei denen die Eintrittspupille im Unendlichen lag, oder mit anderen Worten, die nach der Objektseite telezentrisch gemacht worden waren. Es scheint, daß eine solche Regulierung des Strahlenganges (wobei die Abblendung in der hinteren Brennebene des den Objekten zugekehrten Systemteils vorgenommen wird) bewußt zuerst von E. Abbe eingeführt worden ist. Jedenfalls hat er zuerst ganz allgemein die Folgen angegeben, die ein solcher Strahlengang für die Maßverhältnisse hat, unter denen körperliche Objekte einem durch ein solches System schauenden Auge erscheinen. Da das Projektionszentrum der Objekte im Unendlichen liegt, so muß sich auf der Einstellungsebene eine Parallelprojektion einstellen, eine Erscheinungsform, die E. Abbe[1]) im Falle des zusammen-

[1]) Ueber mikrometrische Messung mittelst optischer Bilder. Sitzber. Jen. Ges. Med. Naturw. 1878, 11—17, S. 14. Siehe auch in: Gesammelte Abhandlungen von Ernst Abbe. Bd. I. G. Fischer, Jena 1904, S. 168.

gesetzten Mikroskops sehr deutlich beschrieben hat. Und in der Tat finden sich bei diesem Instrument die Bedingungen für den telezentrischen Strahlengang sehr häufig verwirklicht. Herr S. Finsterwalder hat den Verfasser darauf hingewiesen, daß man sich des telezentrischen Strahlenganges mit Vorteil bedienen könne, um mit Hilfe der Photographie exakte Grund- und Aufrisse von kleinen Gegenständen herzustellen. Die Korrektionsbedingungen, die in diesem Falle an die optischen Systeme zu stellen sind, lassen sich ohne Schwierigkeit erfüllen.

Man kann nun noch einen Schritt weiter gehen und sich bemühen, die Eintrittspupille vor die Objekte zu legen, so daß gerade die vom Beobachter weiter entfernten Objekte unter größeren Gesichtswinkeln erscheinen. Ein solcher Versuch erscheint zunächst aussichtslos, weil er im Widerspruch zu der Erkenntnis zu stehen scheint, daß alle durch optische Mittel realisierbaren Abbildungen rechtläufig[1]) sind. Da nun das normale Auge hinter den Bildern liegen muß, wenn es sie wahrnehmen soll, so müßte auch die Eintrittspupille des Systems hinter den Objekten liegen. Dieser Schluß ist ganz bündig, wenn Bilder und Auge nicht durch die Unstetigkeitsebene des Bildraums getrennt sind. Ist das aber der Fall, so kann infolge der gegenseitigen Durchdringung des Objekt- und des Bildraums die gewünschte Lage des Projektionszentrums herbeigeführt werden. Das Ergebnis zeigt sich in der Figur 2. Es handelt sich dabei um ein kleines Hausmodell von 40 mm Länge, 7 mm Breite, 10 mm Seitenwand- und 15 mm Firsthöhe. (In der Figur 3 ist es in gewohnter Weise aufgenommen dargestellt.) Es war hinter einer Linse von 8 cm Brennweite und dem zweckmäßigerweise besonders großen Öffnungsverhältnis von 1 : 1 aufgestellt und durch sie hindurch mit einem photographischen Objektiv aufgenommen worden, dessen Eintrittspupille um mehr als 8 cm von der Vorderfläche der

---

[1]) Unter „Rechtläufigkeit“ ist dabei diejenige Eigentümlichkeit der Abbildung zu verstehen, nach welcher die Bildpunkte im Sinne der Lichtrichtung dieselbe (nicht die entgegengesetzte) Reihenfolge einnehmen wie die zugehörigen Objektpunkte.

Linse entfernt war. Da die hinteren Teile des Modells größer erscheinen als die vorderen, so gestattet dieser Strahlengang,

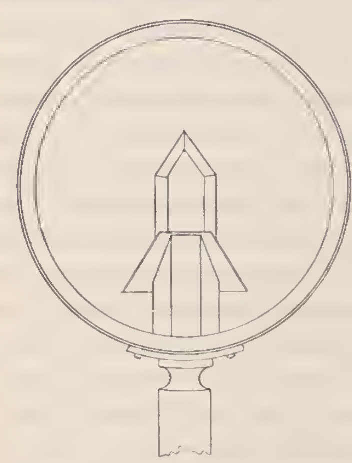


Fig. 2. Das Hausmodell in unnatürlicher Perspektive.

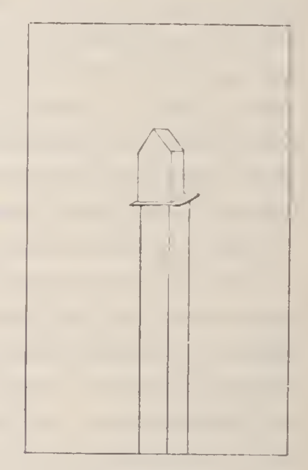


Fig. 3. Das Hausmodell in natürlicher Perspektive.

mit einem Auge „um das Objekt herumzusehen", wie Herr S. Finsterwalder das Auffallende dieser Darstellungsart kurz bezeichnet.

Geht man nun auf den Abbildungsvorgang etwas näher ein, so mag dazu die rein schematische, einen Meridianschnitt darstellende Figur 4 dienen. Die Linse L mit den Brenn-

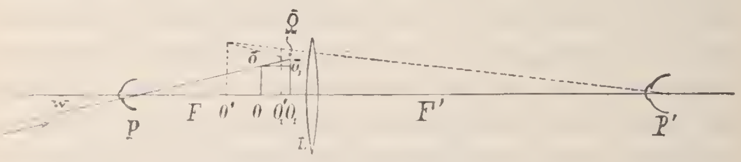


Fig. 4. Eine schematische Darstellung des hyperzentrischen Strahlenganges durch die Wiedergabe des Meridianschnitts.
P Objektauge, P' Auge im Bildraum. Die auf den Objektraum bezüglichen Graden sind ausgezogen, die den Bildraum betreffenden gestrichelt.

punkten F und F' sei vor dem als Objekt dienenden Würfelskelett $O\,O_1\,\bar{O}_1\,\bar{O}$ aufgestellt. Das beobachtende Auge befinde

sich in dem Achsenpunkte P' und werde durch die Linse reell und umgekehrt in dem Objektauge P, also anscheinend vor dem Objekt abgebildet. Es sei ferner angenommen, daß auf die dem Beobachter zugekehrte, durch O_1 gehende Würfelfläche akkommodiert werde. Alsdann ist die Konstruktion des objektseitigen Abbildes einfach: von P aus werden alle Punkte des Würfelskeletts in die durch O_1 gehende Einstellungsebene projiziert, und man sieht ohne weiteres, daß die durch O gehende Würfelfläche $O\bar{O}$ in der Einstellungsebene größer wird $\{O_1 \Omega\}$ als die durch O_1 gehende, näherliegende $O_1\bar{O}_1$. Es ist außerdem des leichteren Verständnisses wegen das Bildrelief des Würfelskeletts gezeichnet worden, so daß man auch einsieht, wie dieser Effekt im Bildraume zustande kommt. Der scheinbare Widerspruch mit dem Gesetz der rechtläufigen Abbildung löst sich durch die Betrachtung der Lichtrichtung: Die auf P treffenden Strahlen von Punkten des Würfelskeletts gelangen, da eine Lichtrichtung von links nach rechts vorausgesetzt ist, erst dann nach P, wenn sie das Unendliche passiert haben und zwar in einer, mit der anfänglichen übereinstimmenden Richtung. P liegt also wirklich für diese Betrachtung hinter $O\,O_1$. Da das Objektauge P zwar umgekehrt ist, aber auch abwärts gerichtete Gesichtswinkel w erhält, so wird im Bildraume das Bildrelief aufrecht wahrgenommen. Die unnatürliche Perspektive aber bleibt bestehen, und man kann sich nicht überreden, daß sie einem Würfelskelett angehören könne. Man faßt das Gebilde stets in einer ganz bestimmten Weise verzerrt auf, weil eine solche Erscheinungsform des Würfelskeletts jeder Erfahrung widerspricht. Sie mag, den vorigen Namen entsprechend, hyperzentrisch heißen.

Schon oben war darauf hingedeutet worden, daß diese Erscheinungen am deutlichsten auftreten, wenn das Öffnungsverhältnis des abbildenden Systems besonders groß ist, und man sieht auch leicht ein, daß dafür große Winkel w vorzüglich günstig sind. Systeme mit solchen Eigenschaften finden sich namentlich in Hohlspiegeln, die sich ja auch hinsichtlich der Aufhebung der sphärischen und chromatischen Abweichungen

vor gleich einfachen, rein dioptrischen Konstruktionen auszeichnen.

Es muß sich daher diese Erscheinung häufig, namentlich beim Experimentieren mit Hohlspiegeln geradezu aufgedrängt haben; sie scheint aber nicht weiter beachtet worden zu sein, oder man hat sie einfach auf die Abweichungen der Systeme abgeschoben. Jedenfalls wurde kein Anhaltspunkt dafür gefunden, daß man bisher versucht habe, sie aus der veränderten Strahlenbegrenzung zu erklären, ähnlich wie das E. Abbe für die entsprechenden Verhältnisse beim telezentrischen Strahlengange getan hat.

Die Tiefenwahrnehmung beim beidäugigen Sehen.

Durch die gleichzeitige Verwendung beider Augen beim Sehen ist die Möglichkeit einer Tiefenwahrnehmung gegeben. Man sieht das aus der nachfolgenden schematischen Figur 5

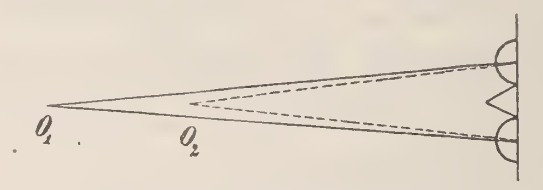


Fig. 5. Der Strahlenverlauf von den Fußpunkten in der Medianebene befindlicher Objekte.

am einfachsten, bei der die Annahme gemacht worden ist, daß die beiden verschieden entfernten Punkte O_1, O_2 in dem Schnitt der Horizontal- und der Medianebene liegen. Hierbei erkennt man leicht, daß die nach dem ferneren Punkte gerichteten Strahlen in dem vor den Augen liegenden Gebiet mehr schläfen-, die nach dem näheren mehr nasenwärts verlaufen. Die Betrachtung dieses ganz einfachen Falles mag hier genügen: die allgemeineren Fälle würden sich ohne Schwierigkeit durch die Einführung der Helmholtzischen stereoskopischen oder der ihnen entsprechenden angularen Differenzen erledigen lassen. Die Tiefenwahrnehmung ist auf diese Weise nicht nur körper-

lichen Objekten gegenüber möglich, sie findet auch dem von einem beliebigen optischen System gelieferten Bildrelief gegenüber statt und führt zu einem richtigen (d. h. mit dem durch die Betrachtung der Objekte selbst gewonnenen Resultat übereinstimmenden) Ergebnis, weil alle optischen Systeme, wie schon bemerkt, rechtläufig sind, also die Richtung der Tiefenausdehnung der Objekte nicht verändern. E. Abbe[1]) scheint zuerst auf diese allgemeine Eigenschaft des Bildreliefs optischer Instrumente hingewiesen zu haben, um daraus einen Schluß auf die beidäugige Tiefenwahrnehmung am Bildrelief zu ziehen.

Versucht man aber auch in diesem Falle die Betrachtung auf die Vorgänge im Objektraume zu stützen, so muß man die beiden Augen durch das optische System nach der Objektseite zu abbilden. Macht man hierfür die vereinfachende (und bei einfachen optischen Systemen — z. B. einer Graphoskoplinse oder einem Hohlspiegel — in der Regel zutreffende) Annahme eines reellen Bildreliefs, so liegen die Objektaugen sicher hinter den Objekten. Da ein einheitlich wirkendes optisches System keine Veränderung der natürlichen Lage der beiden Augen hervorbringen kann, so bleibt unter diesen Umständen, d. h. bei der Abbildung durch ein einheitlich wirkendes optisches System, die Bedingung des beidäugigen natürlichen Sehens oder, wie hier gesagt werden soll, die orthopische[2]) Augenstellung erhalten. Strahlen von näher gelegenen Objektpunkten verlaufen auch im Objektraume mehr nasenwärts, von ferneren mehr schläfenwärts. Zu den Einzelheiten der Abbildung kann man noch folgendes bemerken: Wird die Gesichtsfläche ⌒̣|⌒̣ als Ganzes bei jener Abbildung durch das optische System einfach umgekehrt ‿̇|‿̇ oder umgekehrt und spiegelverkehrt, so zeigt sich das bei der Betrachtung darin, daß das Objekt zwar in seiner Tiefenanordnung ungeändert bleibt, aber sonst einfach

---

[1]) On the conditions of orthoscopic and pseudoscopic effects in the binocular microscope. Journ. Roy. Micr. Soc. 1881 (2), Bd. 1, 203—211, S. 207. Siehe auch die Übersetzung in den auf S. 490 zitierten gesammelten Abhandlungen auf S. 319.

[2]) Nach Analogie von κύκλωψ und kyklopisch gebildet.

umgekehrt oder umgekehrt und spiegelverkehrt wird. Es ist das eine notwendige Folge der Änderung, die der Sinn der objektseitigen Gesichtswinkel *w* durch das optische System für jedes Einzelauge erleidet.

Man kann also auch nach der hier durchgeführten Betrachtungsweise, bei der die Vorgänge im Objektraume berücksichtigt werden, keine Änderung der Tiefenanordnung erwarten, wenn es sich um die Abbildung durch ein einheitlich wirkendes optisches System handelt.

Die Aufhebung der natürlichen Augenstellung.

Schon sehr früh — gegen das Ende des siebzehnten Jahrhunderts — hatte ein unter dem Klosternamen Chérubin D'Orléans bekannt gewordener Kapuzinermönch ein binokulares Instrument hergestellt, wodurch für die Objektaugen die natürliche Stellung aufgehoben wurde. Er richtete nämlich zwei gewöhnliche bildumkehrende Mikroskope auf einen und denselben Objektpunkt und wählte die Neigung der Rohre so, daß das rechte Okular von dem rechten und das linke Okular von dem linken Auge benutzt werden konnte. Man sieht leicht ein, daß bei der Abbildung der beiden Augen des Beobachters in den Objektraum ein jedes für sich umgekehrt wurde, so daß sich nach dem hier gebrauchten Schema der in der Figur 6 dargestellte Fall ergab. Die Vermutung liegt nahe, daß mit einer solchen Änderung der natürlichen Augenstellung eine Änderung der Tiefenanordnung im Bildraume verbunden sein müsse, und so ist es auch tatsächlich. Konstruiert man jenes einfache Schema in der Figur 7 wieder, so sieht man, daß für jedes der beiden Objektaugen die Strahlen von dem ferneren Punkte mehr nasen-, die von dem näheren mehr schläfenwärts verlaufen. Zeichnet man nunmehr die Figur 8 für den Bildraum, wo die Augen natürlich die orthopische Stellung haben müssen und sucht



Fig. 6. Die Stellung der ganz schematisch gezeichneten Objektaugen im Chérubinschen Doppelmikroskop.

dort die entsprechenden Strahlen auf, so müssen die vorher mehr schläfenwärts liegenden Strahlen auch hier wieder mehr schläfenwärts liegen, da jedes einzelne optische System seine Meridianebene — abgesehen von der hier nicht in Betracht

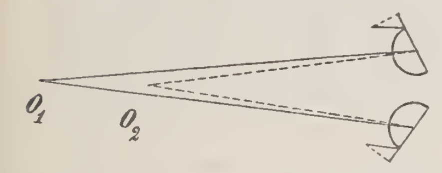


Fig. 7. Der Strahlenverlauf von den Fußpunkten in der Medianebene befindlicher Objekte bei chiastopischer Stellung der schematisch gezeichneten Objektaugen.

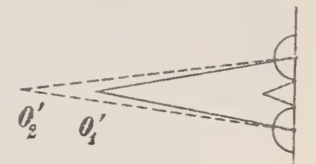


Fig. 8. Der der Figur 7 entsprechende Strahlengang im Bildraume.

kommenden Nachbarschaft der objektseitigen Brennebene — zusammenhängend abbildet. Die ausgezogenen und die gestrichelten Strahlen definieren also im Bildraume, wie man auf der Figur 8 sieht, zwei Punkte O_2', O_1' in umgekehrter Tiefenfolge.

Man erhält auf diese Weise die Verwirklichung einer rückläufigen Abbildung, die bei einheitlich wirkenden optischen Systemen ausgeschlossen war. Sie kommt in binokularen Instrumenten zustande, wenn durch die Wirkung der getrennten Systeme die Gesichtsfläche ⌒|⌒ nicht zusammenhängend, sondern unstetig |‿ ‿| abgebildet wird.

Bei dieser großen Wichtigkeit der Augenstellung für die durch das beidäugige Sehen vermittelte Anschauung der Tiefengliederung sei die unnatürliche (gekreuzte) Stellung als chiastopische bezeichnet. Wird sie im Objektraum hervorgerufen, ohne daß sie von einer Änderung der Perspektive begleitet wird, so erhält man eine Umkehrung der Abstände, die aber nur bei beidäugiger Beobachtung zwingend ist; bei einäugiger Betrachtung kann die Täuschung verschwinden oder überhaupt nicht zustande kommen.

Während diese Änderung des Raumbildes, die bei dem Doppelmikroskop von Chérubin d'Orléans zweifellos vorhan-

den war, zu jener Zeit unbemerkt blieb, erregte sie die Aufmerksamkeit Ch. Wheatstones, der sie 1852 zuerst unter dem Namen der Pseudoskopie beschrieb. Er gab damals mehrere Möglichkeiten der Verwirklichung an, und zwar bestand der ihm besonders geeignet erscheinende Apparat aus zwei Amicischen Reflexionsprismen, die, wie man aus der Figur 9 sieht, die chiastopische Augenstellung im Objektraume

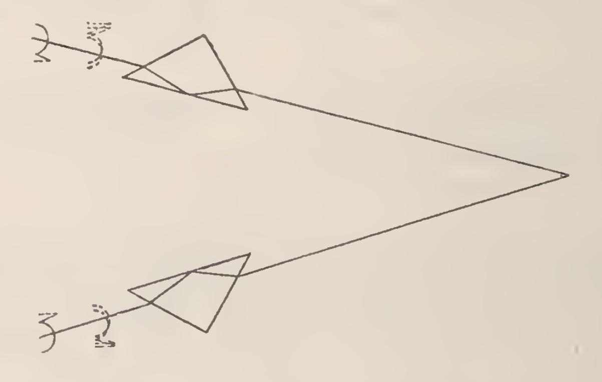


Fig. 9. Ein schematischer Horizontalschnitt durch das Wheatstonesche Pseudoskop.
Die Objektaugen sind punktiert, um ihre mangelhafte Abbildung anzudeuten.

herbeiführten. Durch die Punktierung der ganz schematisch gezeichneten Objektaugen soll angedeutet werden, daß sie infolge der Abbildung durch starke Brechungen in Prismen von beträchtlicher Dicke mit ziemlichem Astigmatismus behaftet sind. Bei den Versuchen schadet dieser Bildfehler übrigens nicht wesentlich, aber das Gesichtsfeld des Instruments ist nur gering, und nicht jedem Beobachter gelingen die damit anzustellenden Versuche. Am besten eignen sich dafür Skelette einfacher stereometrischer Körper, weil hier keine Schatten das Zustandekommen des pseudoskopischen Eindrucks hindern, und weil sich die Inversion eines stereometrischen Skeletts eben so leicht vorstellen läßt wie das Skelett selbst.

Die von Ch. Wheatstone gegebene Erklärung des pseudoskopischen Raumbildes war vollständig zutreffend, beruhte aber

auf der Betrachtung des Bildraums, und so kam es, daß damals der allgemeinere Grund der Pseudoskopie nicht bemerkt wurde.

In den 50er und 60er Jahren des vorigen Jahrhunderts beschäftigten sich tüchtige Mikroskopiker namentlich englischer Zunge mit der Konstruktion eines stereoskopischen Mikroskops, und sie sahen, da nun einmal das Interesse auf die pseudoskopische Wahrnehmung gerichtet war, wie leicht man zu einem solchen, hier meistens unerwünschten Eindruck kommen könne. Wenn es ihren scharfsinnigen Bemühungen auch gelang, durch eine zweckmäßige Verfügung über die Konstruktionselemente den gewünschten stereoskopischen Eindruck zu sichern, so haben sie doch an der Klärung des allgemeinen Sachverhalts nicht gearbeitet.

Dies geschah erst durch E. Abbe, der, ohne eingehende Kenntnis dieser Entwicklung des Binokularmikroskops in England, 1880 ein stereoskopisches Okular baute, um das Gebiet der stereoskopischen Mikroskopie auch auf dem Kontinent auszudehnen. Er entwickelte als erster eine zusammenfassende Theorie, wenn auch nicht aller stereoskopischen Mikroskope, so doch aller derer, die mit einem einfachen Objektiv ausgerüstet waren, und die auch zu jener Zeit allein in Betracht kamen. Zu gleicher Zeit gab er auch ein überraschend einfaches Merkmal an,[1]) wonach man bei einem jeden dieser Instrumente die orthoskopische oder die pseudoskopische Wirkung sofort voraussagen konnte. Diese Abbesche Regel lautet in ihrer einfachsten Form: „Die einzige notwendige Bedingung für die orthoskopische Wirkung in irgend einem binokularen Apparat ist, daß die betreffenden Halbkreise entsprechend dem Schema O dargestellt werden können, und für die pseudoskopische Wirkung, daß sie dem Schema P entsprechend liegen.“ Dabei beziehen sich die in den Figuren 10 und 11 wiedergegebenen Abbeschen Zeichnungen auf die Austrittspupillen,

---

[1]) Beschreibung eines neuen stereoskopischen Oculars nebst allgemeinen Bemerkungen über die Bedingungen mikro-stereoskopischer Beobachtung. Carls Rep. 1881, 17. 197—224, S. 208. (In den ges. Abh. S. 255 und On the conditions etc. S. 203/204 und in der Übers. 314.)

die bei allen Binokularmikroskopen halbkreisförmig sind, wo die Eintrittspupille des Objektivs geometrisch in eine rechte und eine linke Hälfte geteilt und je einem der beiden Augen zugeordnet wird. Man sieht leicht ein, daß die Abbesche Regel in allen von ihm behandelten Fällen mit der hier gegebenen Formulierung übereinstimmt; denn schreibt man darunter die hier benutzten Symbole, wie das in den Figuren 12 und 13 geschehen ist, und beachtet man, daß die beiden Aus-

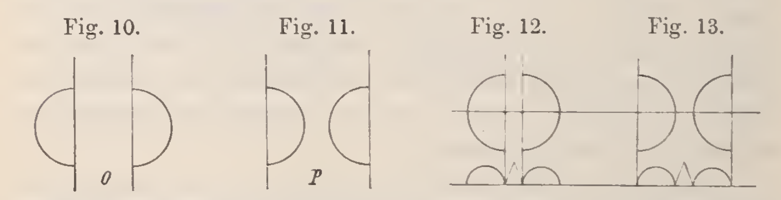


Fig. 10 und 11. E. Abbes bildseitiges Kriterium für die orthoskopische und die pseudoskopische Wirkung der binokularen Mikroskope mit gemeinsamem Objektiv.

Fig. 12 und 13. Die Zurückführung des Abbeschen Kriteriums auf die orthopische und die chiastopische Stellung der Objektaugen.

trittspupillen zusammen im Objektraume die vollständige kreisförmige Eintrittspupille des Instruments ergeben müssen, so wird man nur in dem einen Falle (der Figur 12) auf die orthopische Augenstellung im Objektraume geführt, im anderen (der Figur 13) muß sich die chiastopische ergeben. Es ist zu bedauern, daß E. Abbe für den allgemeinen Fall die Lösung entgangen ist. Er hat sich offenbar durch die unbestreitbare Eleganz seines Satzes in den besonderen von ihm behandelten Fällen verleiten lassen, von seinem so folgenreichen Prinzip abzugehen, die Betrachtung auf die Vorgänge im Objektraume aufzubauen, und so ist er darum gekommen, eine Theorie der gesamten binokularen Instrumente zu geben.

Wenn sich vorher allgemein hatte nachweisen lassen, daß eine pseudoskopische Wahrnehmung durch einheitlich wirkende optische Instrumente nicht verwirklicht werden kann, so hat sich nunmehr gezeigt, daß nicht immer das Vorhandensein zweier völlig getrennter Instrumente für die beiden Augen

nötig ist; es genügt auch, hinter einem gemeinsamen Objektivteil eine Diskontinuitätsstelle einzuführen, so daß die eine Hälfte der Eintrittspupille nur dem rechten, die andere nur dem linken Auge zugeordnet ist.

Eine Mittelstellung zwischen den beiden im vorhergehenden behandelten Möglichkeiten nimmt der Fall ein, daß beide Augen im Objektraume zusammenfallen, oder wie man es auch nennen kann, der Fall der synopischen Augenstellung. Er wurde anscheinend zuerst beobachtet, als man in den 50er Jahren des vorigen Jahrhunderts identische Bilder im Stereoskop betrachtete. Hatte man hier unbewußt stets an der entozentrischen Perspektive festgehalten, so machten englische Mikroskopiker in der Mitte der 60er Jahre einen wichtigen Fortschritt darüber hinaus. Bei der besten der damals vorgeschlagenen Einrichtungen — sie stammte von F. H. Wenham her — wurde mit Hilfe einer sowohl durchlässigen als auch spiegelnden Schicht jeder einzelne Strahl in zwei Teile gespalten, um je einem der beiden Augen zugeführt zu werden. Es erhielt dann jedes Auge ein (abgesehen von den Helligkeitsunterschieden) identisches Bild, und zwar bei starken Mikroskopobjektiven ein Bild in telezentrischer Perspektive. Eine solche Beobachtung im zweiäugigen (indifferenten) Sehen bietet doch noch einen Vorteil für den Beobachter, insofern als die Beobachtung mit beiden Augen bequemer und angenehmer ist als die mit einem Einzelauge. Für makroskopische Objekte mit entozentrischer Perspektive hat man den Vorzug der synopischen Augenstellung schon in den 50er Jahren gekannt; hier kommt noch hinzu, daß es sich bei Landschaftsaufnahmen um angenähert bekannte Gegenstände in weiter Entfernung handelt, bei denen die Verschiedenheit eigentlich stereoskopischer Halbbilder keine große Rolle spielt. In solchen Fällen läßt die gewohnte und bequeme Beobachtung mit beiden Augen um so leichter die auf der Erfahrung beruhende Tiefendeutung als Ersatz für die Tiefenwahrnehmung eintreten.

Eine Verbindung der verschiedenen Bedingungen des einäugigen und des beidäugigen Sehens miteinander ist aber ganz

allgemein möglich, da sie voneinander ganz unabhängig sind. Es sei hier ein Schema mitgeteilt, das eine vollständige Übersicht über die überhaupt möglichen Bedingungen des Sehens mit beiden Augen liefert, da es mit einem Eingange für die drei monokularen und einem solchen für die drei binokularen Bedingungen versehen ist. Es ist dabei für die verschiedenen Formen der Erscheinung auch die Zeit angegeben worden, zu der sie zuerst bemerkt worden sind. (Siehe S. 503.)

Handelt es sich jetzt darum, alle diese neun möglichen Formen des beidäugigen Sehens wirklich zu veranschaulichen, so empfiehlt sich vornehmlich die auf Taf. IV gewählte Darstellung mit Hilfe von Stereogrammen. Ein Stereoskop ist dabei nicht notwendig. Alle Beobachter, die ihren Augenachsen eine nahezu parallele Richtung geben können, werden ohne weiteres den beabsichtigten Eindruck erhalten. Alle, die diese Fähigkeit nicht haben, werden zweckmäßig nach dem besonders für Kurzsichtige geeigneten Plane verfahren, wie er in Figur 14 nach der mündlichen Angabe von Herrn A. Köhler dargestellt worden ist. Eine Scheibe gewöhnlichen Fenster-

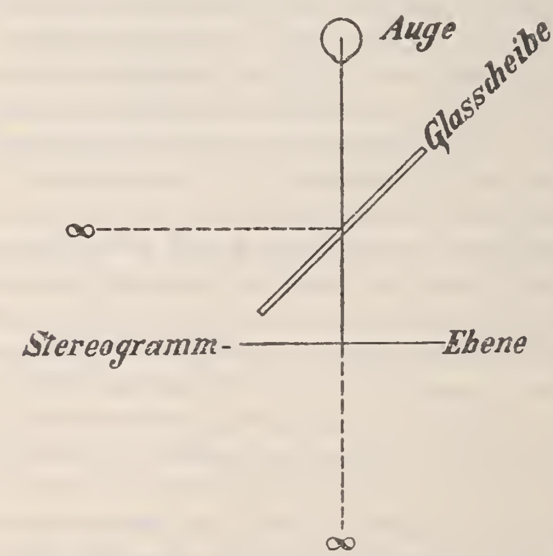


Fig. 14. Die Köhlersche Methode zur Erleichterung der Betrachtung von Stereogrammen mit parallel gerichteten Augenachsen.

Die Bedingungen des

beidäugigen Sehens	einäugigen Sehens	Der Strahlengang ist entozentrisch I		telezentrisch II		hyperzentrisch III	
Die Augenstellung ist orthopisch	1	I 1 Das natürliche Sehen endlich entfernter Objekte. Erste Erkenntnis der Bedingungen durch Ch. Wheatstone 1838.		II 1 Das Raumbild in orthoskopischen Binokularmikroskopen. J. L. Riddell 1852/3.	Erklärung der wichtigsten Punkte der Wirkung mit Hilfe der Strahlenbegrenzung durch E. Abbe 1880.	III 1	Die Erscheinungen mit hyperzentrischer Perspektive scheinen bisher nicht untersucht worden zu sein.
synopisch	2	I 2 Die Betrachtung zweier identischer Bilder im Stereoskop. Mitte der 50er Jahre.	Erste unbewußte Beobachtungen bereits in der ersten Publikation Ch. Wheatstones von 1838.	II 2 Das Raumbild in Binokularmikroskopen zum indifferenten Sehen. Powell & Lealand vor 1866.		III 2	
chiastopisch	3	I 3 Die Wheatstoneschen Pseudoskopien. 1852.		II 3 Das Raumbild in pseudoskopischen Binokularmikroskopen. Chérubin d'Orléans 1677. F. H. Wenham 1853.		III 3	

Die Anordnung stimmt mit der für die Tafel IV gewählten überein.

glases wird unter etwa 45 Graden Neigung so über das Stereogramm gehalten, daß ein entfernter Gegenstand an den unbelegten Flächen gespiegelt wird und unter der Ebene des Stereogramms erscheint. Fixiert man dieses meistens sehr lichtschwache Spiegelbild, richtet indessen seine Aufmerksamkeit auf die beiden Halbbilder, auf die auch akkommodiert werden muß, so verschmelzen diese ziemlich leicht zu einem Raumbilde.

Vor die Besprechung der neun Stereogramme wird zweckmäßig eine kurze Erläuterung der Verhältnisse eingeschoben, wie sie bei den gebräuchlichen Doppelkameras mit parallelen

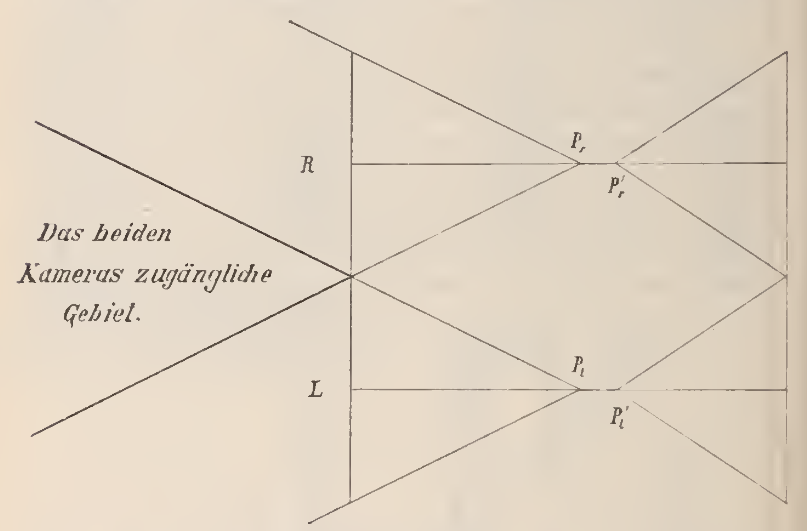


Fig. 15. Ein schematischer Horizontalschnitt durch eine Doppelkamera mit parallelen Achsen.
Die Objektive sind im allgemeinen Falle als unsymmetrische Konstruktionen vorausgesetzt.

Achsen herrschen. Stellt die Figur 15 eine solche Einrichtung im Horizontalschnitt dar, so ist es bei verzeichnungsfreien Objektiven klar, daß jedes Halbbild L, R für die Mitte der dazugehörigen Eintrittspupille P_l, P_r zu den aufgenommenen Objekten perspektivisch ist. (Um die photographischen Kopien des Doppelnegativs in diese Lage zu bringen, müssen sie zerschnitten werden, wenn sie mit dem gewöhnlichen Kontakt-

druckverfahren hergestellt worden sind.) Aus der Entstehung der Halbbilder ist klar, daß — mit E. Abbe zu reden — *L* eine durchaus links-, *R* eine durchaus rechtsäugige Perspektive ist. Diese ein- für allemal festgelegte Beziehung kann man in einer einfachen Weise dadurch andeuten, daß man wie in der Figur 16 um die Eintrittspupille das entsprechende Augenzeichen beschreibt. Man sieht dann ohne weiteres ein, daß sich in der Figur 17 bei einer Vertauschung der beiden Halbbilder ein pseudoskopisches Raumbild ergeben muß. Denn auf Grund derselben Überlegungen, die bei der Einführung der chiastopischen Augenstellung gemacht worden waren (es handelte sich darum, daß die Strahlenpaare mehr nasen- oder mehr schläfenwärts verliefen), läßt sich auch der hier angenommene Fall erledigen. Es entspricht dem unendlich fernen und einem reellen, vor dem Beobachter liegenden Punkte des orthomorphen Raumbildes der unendlich ferne und ein virtueller, hinter dem Beobachter gelegener Punkt des pseudomorphen Raumbildes, und — was von besonderer Wichtigkeit

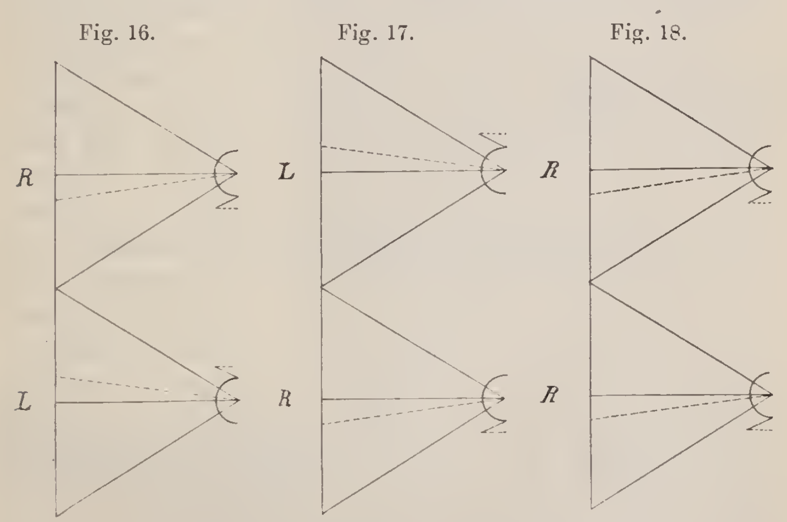


Fig. 16. Die Beziehung der Augen zu richtig montierten Halbbildern. Das Äquivalent zur orthopischen Stellung der Objektaugen.

Fig. 17. Die Beziehung der Augen zu gekreuzt montierten Halbbildern. Das Äquivalent zur chiastopischen Stellung der Objektaugen.

Fig. 18. Die Beziehung der Augen zu identischen Halbbildern. Das Äquivalent zur synopischen Stellung der Objektaugen.

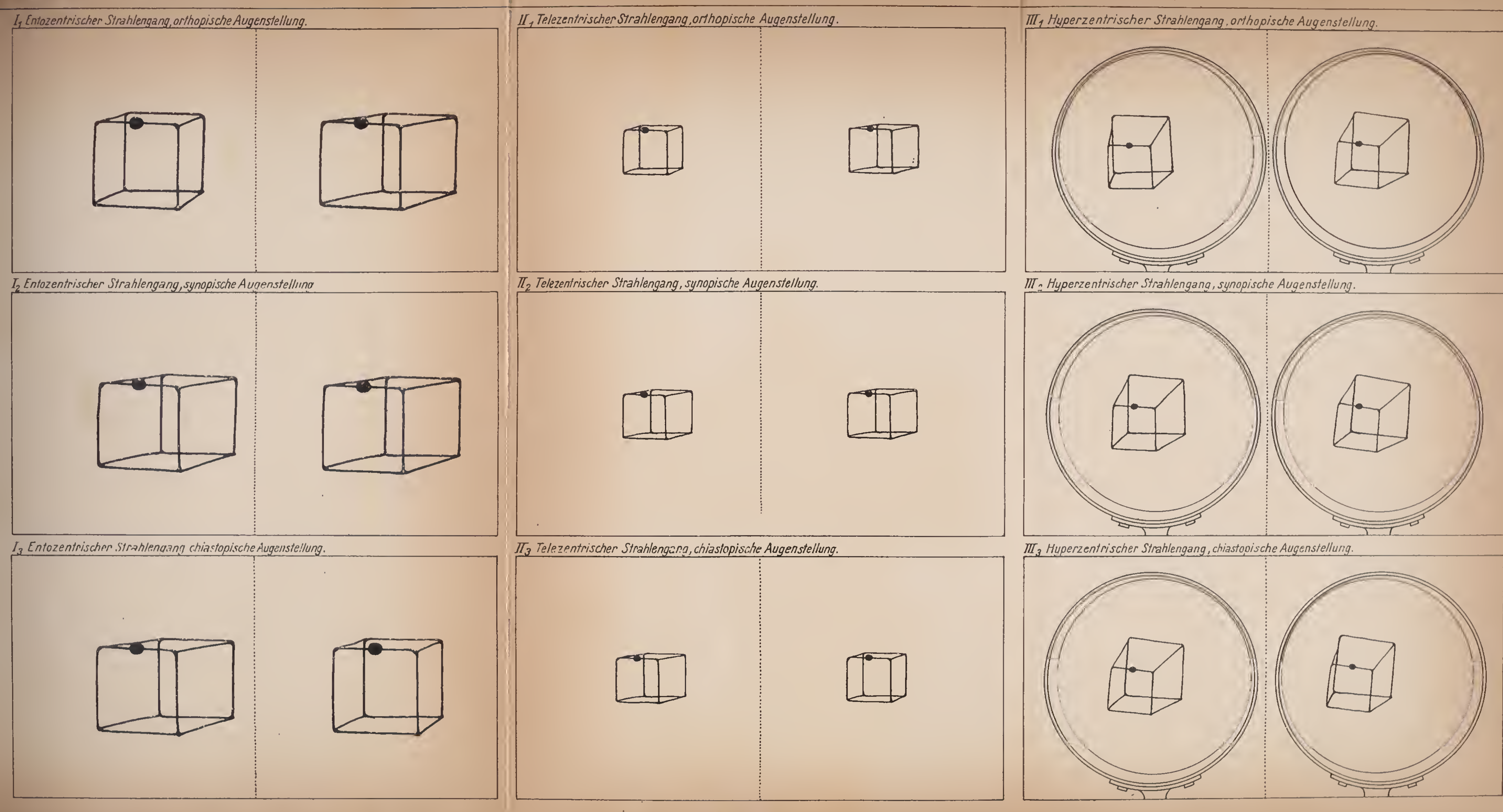
ist — die Reihenfolge der Punkte ist im ersten Falle der Lichtrichtung gleich, im zweiten ihr entgegengesetzt.

Setzt man schließlich in der Figur 18 beiden Augen das gleiche Halbbild vor, so erhält man die synopische Augenstellung, und zwar wurde in den hier dargestellten Fällen die von dem rechten Objektiv gelieferte Abbildskopie verdoppelt.

Dementsprechend sind also nur drei stereoskopische Aufnahmen gemacht worden, nämlich I_1, II_1 und III_1. Alle mit 2 bezeichneten Bildpaare sind durch Verdoppelung des rechten Halbbildes, alle mit 3 bezeichneten durch Vertauschung der beiden Halbbilder gegeneinander hergestellt worden.

Das Objekt war in allen Fällen das gleiche Skelett einer geraden Säule von quadratischer Grundfläche, deren Länge 39 mm betrug bei 20 mm Höhe und Breite; ihre Vorderfläche wurde durch eine der oberen Kante aufgesetzte Perle kenntlich gemacht. Es war schon oben darauf hingewiesen worden, daß namentlich pseudomorphe Raumbilder am sichersten mit solchen auf die Umrisse beschränkten Objekten gelingen. Bei den ersten sechs Darstellungen findet sich nur das Säulenskelett vor, bei den letzten drei ist auch die ziemlich tiefe Fassung der Linsenkombination sichtbar, die den hyperzentrischen Strahlengang hervorbrachte. Bei dem Stereogramm III_3 ist die Rückläufigkeit der Abbilduug sehr deutlich zu erkennen. Man sieht sehr gut in der Richtung auf den Beobachter zu zuhinterst den äußersten Rand der Linsenfassung, dann ihren inneren Rand und schließlich das in sich invertierte Säulenskelett. Aus diesem Raumbilde wird auch klar, daß man zweckmäßig den hyperzentrischen Strahlengang wählen wird, wenn es sich darum handelt, durch optische Mittel aus einer vorliegenden Hohlform ein Urteil über den danach anzufertigenden Abguß zu erhalten. Denn nur in diesem Falle wird die Perspektive mit der einigermaßen übereinstimmen, die man bei der Betrachtung des Abgusses erhalten würde. Der Verfasser verdankt einem seiner Kollegen den Hinweis auf diesen Umstand.

Für die Anfertigung der photographischen Aufnahmen ist er Herrn R. Schüttauf verpflichtet.


I_1 Entozentrischer Strahlengang, orthopische Augenstellung.
I_2 Entozentrischer Strahlengang, synopische Augenstellung
I_3 Entozentrischer Strahlengang chiastopische Augenstellung.
II_1 Telezentrischer Strahlengang, orthopische Augenstellung.
II_2 Telezentrischer Strahlengang, synopische Augenstellung.
II_3 Telezentrischer Strahlengang, chiastopische Augenstellung.
III_1 Hyperzentrischer Strahlengang, orthopische Augenstellung.
III_2 Hyperzentrischer Strahlengang, synopische Augenstellung.
III_3 Hyperzentrischer Strahlengang, chiastopische Augenstellung.



Über einen neuen Flammenkollektor und dessen Prüfung im elektrischen Felde.

Von Dr. **C. W. Lutz.**

(*Eingelaufen 3. November.*)

(Mit Tafel V und VI.)

Durch die Munifizenz der K. B. Akademie der Wissenschaften zu München wurde dem hiesigen Erdmagnetischen Observatorium die Anschaffung eines Benndorfschen selbstregistrierenden Elektrometers zur Aufzeichnung des luftelektrischen Potentialgefälles[1]) ermöglicht.

Bekanntlich liefert dieser Apparat nur relative Werte des elektrischen Spannungsgefälles, welche durch eine gleichzeitige Messung im freien flachen Terrain auf die Ebene zu reduzieren sind. Diese Bestimmung des „Reduktionsfaktors" geschieht gewöhnlich mit Hilfe eines Wasser- oder Flammenkollektors, der auf einem Hartgummistabe wohl isoliert aufgestellt und durch einen mehrere Meter langen dünnen Leitungsdraht mit einem Aluminiumblattelektroskop verbunden wird. Da der Meßbereich eines solchen transportablen Elektroskopes ein eng begrenzter ist (von ca. 50 bis 250 Volt), so wird der Abstand des Kollektors vom Erdboden, also die Länge der Hartgummistütze entsprechend dem eben herrschenden Potentialgefälle gewählt, so daß ein gut ablesbarer Ausschlag der Elektroskopblättchen entsteht. Eine solche Messungsanordnung ist nur dann einwandsfrei, wenn der Verlauf des Potentialgradienten in der Nähe der Erdoberfläche ein linearer ist, und das scheint

[1]) H. Benndorf, Wiener Akademieberichte **111**, IIa, 487, 1902.

auch nach den Messungen von F. Exner[1]) bis hinauf zu ca. 50 m der Fall zu sein. Dieser einfache Zusammenhang zwischen Potential und Abstand von der Erdoberfläche zeigt sich nach Exner[2]) besonders deutlich an klaren Tagen des Januars bei Temperaturen unter 0° und fest gefrorener Schneedecke. Bei anderen Wetterlagen scheint aber doch eine Änderung des Potentialgefälles mit der Höhe vorhanden zu sein. So fand z. B. A. Gockel[3]) wiederholt eine starke Abnahme des Potentialgradienten mit der Höhe. Auch ich fand in der wärmeren Jahreszeit gelegentlich der Bestimmung des oben erwähnten Reduktionsfaktors verschiedene Zahlen je nach dem Abstand des Kollektors über dem Erdboden; und zwar ergaben sich stets bei größeren Abständen kleinere Werte des Potentialgefälles (in Volt/m), also eine nicht zu verkennende Abnahme des Gradienten mit zunehmender Höhe. Hier sei gleich bemerkt, daß bei diesen Messungen der noch näher zu erörternde Umstand berücksichtigt wurde, daß der Ausgleichsort der Spannungen bei Flammenkollektoren immer höher liegt als der obere Rand des Schutzzylinders.

Stellt man sich auf den Boden der Ebertschen Theorie,[4]) so ist dieses verschiedene Verhalten des Potentialgefälles im Winter und Sommer wohl verständlich. Nach Ebert kommt das elektrische Erdfeld durch das Herausdringen der im Erdboden enthaltenen, stark ionisierten Luft zustande. Auf dem Wege durch die Erdkapillaren gibt die ionenreiche Bodenluft vorwiegend — Ladungen ab, tritt also mit einem Überschusse von + Ionen aus dem Erdboden heraus. Die freie + Ladung der unteren Luftschichten bedingt das positive, nach oben hin abnehmende Potentialgefälle. Eine Unterbrechung des Transpirationsprozesses durch Zufrieren der Erdkapillaren im Winter muß das von Exner beobachtete Verhalten des Potentialgradienten zur Folge haben.

---

[1]) F. Exner, Wiener Akademieberichte 93, IIa, 258, 1886.
[2]) Ebenda, S. 260.
[3]) A. Gockel, Meteorologische Zeitschrift 23, 54, 1906.
[4]) H. Ebert, Physikalische Zeitschrift 5, 135, 1904.

Daß das Potentialgefälle $\frac{dV}{dh}$ nicht konstant ist, bringt allerdings in die erwähnte Reduktionsmessung eine Schwierigkeit hinein; aber an sich ist dieses Verhalten des Gradienten von großem Interesse, da es eine Hindeutung auf die in der Luft enthaltene freie Elektrizitätsmenge enthält. Dies genauer zu studieren, sind Messungen im Gange, über welche später berichtet wird; hier soll zuerst die Kollektorfrage behandelt werden. Da bei allen luftelektrischen Stationen eine solche „Reduktion auf die Ebene" wiederholt durchgeführt werden muß, so ist die Wahl eines geeigneten Kollektors für die Feldbeobachtungen auch bei den fortlaufend registrierenden Instrumenten von großer Bedeutung. Unter allen Kollektortypen am brauchbarsten für diesen Zweck dürfte der Flammenkollektor sein. Infolge seiner leichten Transportfähigkeit, des geringen Gewichtes, der raschen Einstellung und Brauchbarkeit bei jeder Temperatur und Tageszeit eignet sich gerade dieser Kollektor am besten für Reise- und Feldbeobachtungen (Radiokollektoren sind zu vermeiden, wenn noch anderweitige luftelektrische Bestimmungen, wie Leitfähigkeit und Ionendichte gemacht werden sollen). Leider stehen diesen Vorzügen zwei ganz erhebliche Nachteile gegenüber. Die Angaben eines Flammenkollektors werden nämlich vom Winde beeinflußt, und der Hauptnachteil der üblichen Konstruktionen ist der, daß sie schon bei geringen Windgeschwindigkeiten verlöschen. Der letztere Übelstand machte Beobachtungen auf dem weiten, allseits dem Winde ausgesetzten ebenen Terrain im Osten des Observatoriums, das sich für luftelektrische Messungen sonst vorzüglich eignet, schon bei einer Windstärke 2 (der 10 teiligen Skala) unmöglich.

Gelänge es, den Flammenkollektor von den erwähnten Mängeln frei zu machen, so wäre er sicher für die so wichtigen Feldbeobachtungen der brauchbarste Apparat.

Diese Erwägungen veranlaßten mich, den Flammenkollektor so umzuändern, daß er sicher im Winde brennt, leicht transportabel, reinlich und sparsam im Betrieb, also mehrere Stunden

ununterbrochen zu gebrauchen ist. Durch eine Prüfung[1]) im künstlichen elektrischen Felde wurde dann die Lage des Ausgleichspunktes, der Einfluß der Luftbewegung auf denselben, sowie die Ladezeit des neuen Kollektors untersucht, um ihm auch in dieser Hinsicht die beste Form zu geben.

Nach mehreren Fehlversuchen gelang es mir, eine Konstruktion zu finden, die allen erwähnten Anforderungen genügt. Der Apparat ist in Figur 1 im Längsschnitt dargestellt. Im Innern eines Messingrohres R steckt eine kurze dicke Kerze K, die durch eine Feder F beständig nach oben gedrückt wird, am Hinausgeschobenwerden aber durch den schmalen Rand r verhindert wird. In dem Maße nun, in dem die Kerze oben abbrennt, wird sie durch die Feder nachgedrückt, so daß die Flamme stets an der gleichen Stelle brennt. Unten ist das Rohr R durch die Platte P verschlossen (Bajonettverschluß), welche zum Einführen einer neuen Kerze abgenommen werden kann. Das Auswechseln der Kerze nimmt nur wenig Zeit in Anspruch. Mittels des Halses H kann der ganze Apparat auf einen isolierenden Stab aufgesteckt werden. Die Mutter m dient zum Einklemmen des nach dem Elektroskope führenden Verbindungsdrahtes.

Soweit würde der Apparat bereits einen vollständigen Flammenkollektor darstellen, dessen freibrennende Kerzenflamme aber bei geringstem Winde ausgelöscht werden würde. Um das zu verhindern, ist folgende Einrichtung getroffen:

---

[1]) Untersuchungen über verschiedene Kollektoren wurden bisher ausgeführt von:

H. Pellat, Comptes Rendus **100**, 735, 1886.

K. v. Wesendonk. Naturwissenschaftliche Rundschau **15**, 233, 1900.

F. Henning, Annalen der Physik, 4. Folge **7**, 893, 1902.

V. Conrad, Wiener Akademieberichte **111**, IIa, 333, 1902.

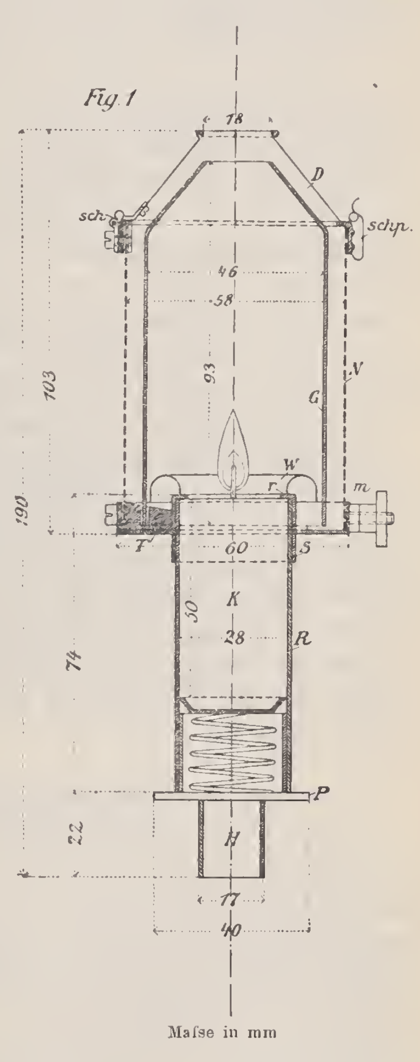
F. Linke, Physikalische Zeitschrift **4**, 661, 1903.

H. Benndorf und V. Conrad, Boltzmann-Festschrift, Leipzig 1904, 691.

H. Benndorf, Wiener Akademieberichte **115**, IIa, 425, 1906.

Auf die Ergebnisse dieser Untersuchungen, soweit sie auf die vorliegende Arbeit Bezug haben, komme ich noch an geeigneter Stelle zurück.

Längs des Rohres *R* ist mit leichter Reibung das kurze Rohrstück *S* und der damit festverbundene Teller mit Rand *T* verschiebbar. Auf diesem steht in drei eingedrehten Füßchen $f_1 f_2 f_3$ aus Vulkanit (Wärmeschutzmittel) der oben konische Glaszylinder *G*, der seinerseits von einem zylindrischen Metallnetz *N* umgeben ist. Oben trägt dieses Netz einen um das Scharnier *sch* aufklappbaren konischen Deckel *D* aus dünnem Metallblech. Ein kleiner Schnäpper *schp* hält den Deckel *D* zu. Der Glaszylinder *G* sitzt nicht dicht auf dem Teller *T* auf, sondern wird durch die drei Füßchen *f* etwas darüber gehalten, so daß zwischen beiden ein schmaler ringförmiger Spalt offen bleibt, durch den die Frischluft zuströmen kann. Der wulstförmige, unten offene Ring *W* schützt die Flamme vor zu heftigen, durch den Spalt eindringenden Windstößen. Beim Transporte wird der Teller *T* und mit ihm der darauf befestigte ganze obere Teil des Kollektors (Glaszylinder und Netzgehäuse) bis zum Aufsitzen auf die Platte *P* herabgeschoben. In derselben Stellung wird die Kerze nach Aufklappen des Deckels *D* angezündet.



Durch die beschriebene Einrichtung des Kollektors ist erreicht, daß ein horizontal ankommender Windstoß mehrmals seine Richtung ändern muß, um senkrecht auf die Flamme zu treffen. Dem dürfte es wohl in erster Linie zuzuschreiben sein, daß die Kerze selbst durch stürmische Winde nicht verlöscht wird, wovon ich mich wiederholt überzeugte. Die obere Einziehung des Glaszylinders und die entsprechende Form des Deckels begünstigt den raschen Abzug der ionisierten Verbrennungsgase, was die Wirksamkeit des Kollektors erhöht[1]) (vergleiche Tab. 5). Der Glaszylinder, das Metallnetz, sowie die Vulkanitfüßchen verhindern eine stärkere Erwärmung des Metallrohres, in welchem die Kerze steckt. Dadurch wird erreicht, daß die Kerze, selbst im geheizten Zimmer, ununterbrochen bis zu Ende brennt. Bei den von mir verwendeten Kerzen, die ich eigens zu diesem Zwecke anfertigen ließ, beträgt die Brenndauer (im Kollektor) ca. 6 Stunden.

Bei Verwendung von einfachen Metallzylindern, wie dies bei meinen ersten Versuchen geschah, erhitzte sich das Rohr R, trotz eines zwischengeschalteten Vulkanitringes nach einiger Zeit so stark, daß die Kerze herausschmolz. Auch eine völlige Ausfütterung der Metallzylinder mit Asbest half nicht.

Den oben beschriebenen Kollektor nnterzog ich nun einer eingehenden Prüfung im künstlichen elektrischen Felde, in welchem ich zur Vergleichung auch einige andere Kollektortypen untersuchte.

Prüfung des Flammenkollektors im künstlichen elektrischen Felde.

Zunächst mußte festgestellt werden, in welcher Weise der Kollektor selbst die Niveauflächen eines homogenen elektrischen Feldes deformiert und wo jene besondere Niveaufläche (Ausgleichsniveaufläche, Bezugsniveaufläche) liegt, deren Potential der Kollektor schließlich annimmt. Gewöhnlich wird nämlich bei Messungen des atmosphärischen Potentialgefälles die Stö-

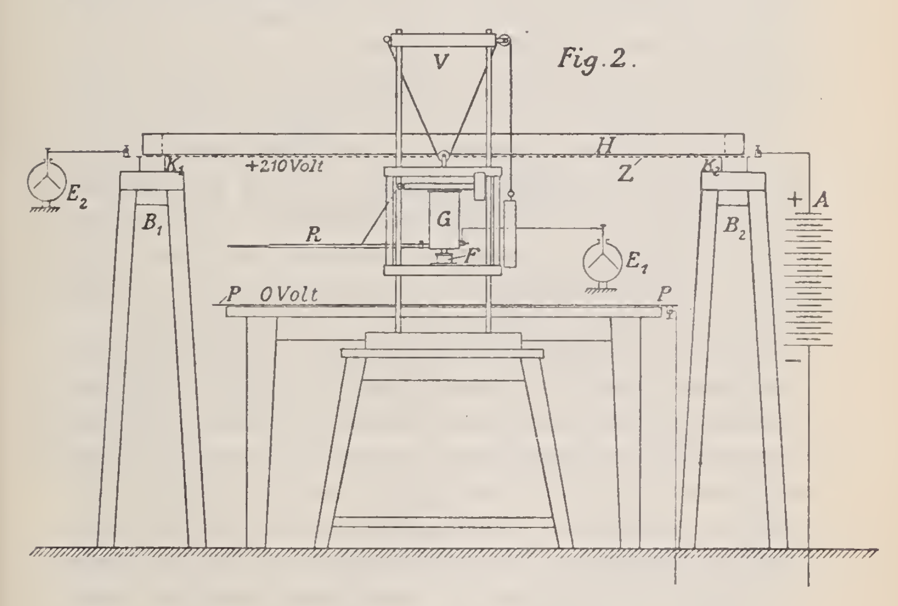
---

[1]) F. Linke, l. c., S. 663 und S. 664.

rung des Erdfeldes durch den Kollektor selbst völlig vernachlässigt, d. h. man nimmt an, daß ein Flammenkollektor das Potential der Niveaufläche annimmt, die durch seinen oberen Zylinderrand hindurchgeht und daß die Lage dieser Niveaufläche auch im ungestörten Felde, also bei Abwesenheit des Kollektors, dieselbe bleibt.

Ferner wurde die Zeit (Ladezeit) bestimmt, die der neue Flammenkollektor zu seiner völligen Aufladung benötigt und endlich wurde der Einfluß der Luftbewegung auf seine Wirkungsweise untersucht.

Das künstliche elektrische Feld[1]) wurde in folgender Weise hergestellt (Fig. 2):



Ein Zinkdrahtnetz (200 cm lang und 100 cm breit) Z von 1 cm Maschenweite wurde über einen festen Holzrahmen H eben ausgespannt, der mit den beiden Schmalseiten auf zwei Holz-

[1]) Eine Einrichtung ganz ähnlicher Art hat F. Henning (l. c., S. 893) getroffen.

böcken B_1 B_2 horizontal auflag, von diesen durch je ein Paar Paraffinklötze $K_1 .. K_4$ isoliert. Das ganze Netz wurde mit Hilfe einer Hochspannungsbatterie A, deren negativer Pol geerdet war, auf die stets gleiche Spannung von + 210 Volt aufgeladen. Diese Spannung wurde durch ein Elektroskop E_2 unter fortwährender Kontrolle gehalten. 50 cm unter dem Netze Z lag auf einem Tische eine ebene Zinkblechplatte P, die dauernd geerdet wurde. Zwischen dem + geladenen Netz und der hiezu parallelen geerdeten Blechplatte bestand demnach ein elektrisches Feld, dessen Niveauflächen, wie Messungen mit einem Wasser- und einem Flammenkollektor in übereinstimmender Weise zeigten, bis nahe an die Ränder heran horizontal verliefen. Nur in der Nähe der beiden Holzblöcke B_1 B_2, an den Schmalseiten des Feldes, ergaben sich zu kleine Potentialwerte, was von vornherein zu erwarten war, denn hier werden ja die Niveauflächen auf- und um die Böcke herumgebogen.

Der Verlauf des Potentiales in vertikaler Richtung wurde mit Hilfe eines Wassertropfkollektors G, R (Fig. 2) untersucht. Das Gefäß des Kollektors war, um Störungen des elektrischen Feldes möglichst zu vermeiden, außerhalb des Feldes angeordnet. Vom Wassergefäß G aus führte eine 175 cm lange horizontal gehaltene Metallröhre R in das Feld hinein. (In der Figur ist der Kollektor halb zur Seite gedreht gezeichnet.) Das vordere Ende des Rohres war ausziehbar eingerichtet, außerdem ließ sich der ganze Kollektor um seinen isolierenden Hartgummifuß F drehen und mit der aus der Figur 2 leicht erkennbaren Aufzugvorrichtung V in vertikaler Richtung verschieben. Damit war erreicht, daß sich die Auflösungsstelle des Wasserstrahles an jede beliebige Stelle des Feldes verlegen ließ, wodurch ein Abtasten der Niveauflächen ermöglicht wurde.

Zunächst wurde festgestellt, daß der Verlauf des Potentiales in vertikaler Richtung beim ungestörten künstlichen Felde ein linearer ist. Die Messung wurde in der Weise ausgeführt, daß nacheinander die Auflösungsstelle des Wasserstrahles an verschiedene in ungefähr gleichen Abständen aufeinanderfolgende Punkte ein und derselben Vertikalen (Mittel-

linie des Feldes) gebracht und für jeden dieser Punkte das Potential und der Abstand vom Grundbleche gemessen wurde. Ersteres geschah mit Hilfe eines mit dem Kollektor leitend verbundenen Elektroskopes E_1 (Fig. 2), letztere Messung durch einen vertikal auf einer Fußplatte stehenden Maßstab, der nur zum Zwecke dieser Abmessung für kurze Zeit ins Feld gebracht wurde. Die so erhaltenen Werte (Tabelle 1) wurden zur Zeichnung der Figur 3 verwendet. Zur Messung der niederen

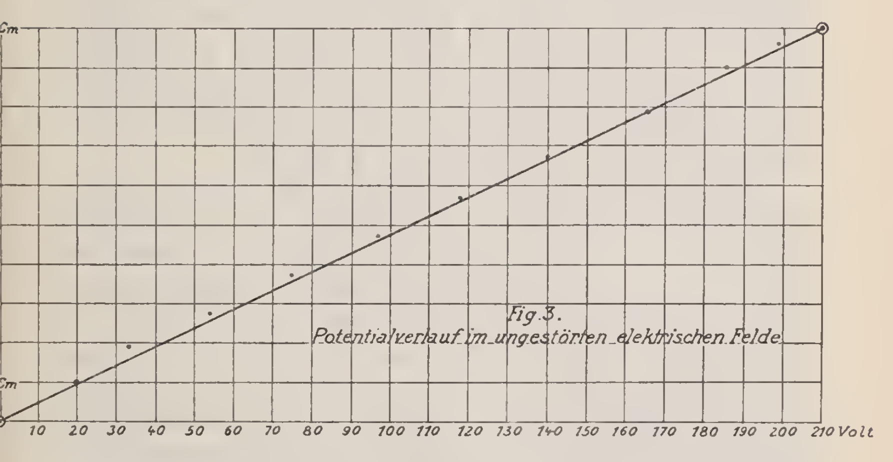


Fig. 3. Potentialverlauf im ungestörten elektrischen Felde.

Potentialwerte 20, 33 und 54 Volt verwendete ich ein empfindliches kleines Aluminiumblattelektroskop, das zwar bei diesen Spannungen deutliche Ausschläge zeigte, doch dürften trotzdem diese Werte etwas unsicherer als die übrigen sein.

Tabelle I.
(Zu Figur 3.)

Abstand vom geerdeten Bleche in cm (Ordinaten)	5,0	9,6	13,9	18,8	23,6	28,5	33,8	39,7	45,0	48,0	50,0
Spannung in Volt (Abszissen)	20	33	54	75	97	118	140	166	186	199	210

Auf Grund dieser Messungen darf das künstliche elektrische Feld bis auf die Randpartien als homogen angesehen werden.

In dieses homogene Feld wurde der oben beschriebene Flammenkollektor gestellt und der nunmehrige Verlauf der zehn Niveauflächen vom Potentiale 20, 33, 54 etc. Volt bestimmt. Der brennende Kollektor stand bei diesen Messungen in der Mitte des Feldes auf einer kurzen Hartgummisäule, die in eine kleine Holzplatte eingelassen war (Tafel V). Zuerst wurde das Potential bestimmt, das der Kollektor bei dieser Aufstellung im Felde annahm. Das hiezu verwendete Aluminiumblattelektroskop war 1,5 m außerhalb des Feldes aufgestellt und durch einen dünnen horizontal geführten Leitungsdraht mit dem Kollektor verbunden. Dem Verlaufe der Niveaufläche vom Potential des Kollektors wurde in der folgenden Untersuchung besondere Aufmerksamkeit geschenkt.

Die Lage der deformierten Niveauflächen wurde in folgender Weise ermittelt. Zunächst wurden für eine in der Längsmittelebene des Feldes gelegene Vertikale im Abstande von 40 cm von der Feldmitte der Reihe nach die Lagen der Punkte vom Potential 20, 33, 54 etc. Volt bestimmt. Es geschah dies mit Hilfe des S. 514 beschriebenen Wasserkollektors, dessen Ausflußöffnung entsprechend orientiert und der nun allmählich so lange aufwärts bewegt wurde, bis das mit dem Tropfgefäß verbundene Elektroskop (E_1 Fig. 2) den verlangten Potentialwert anzeigte. Die einzelnen Potentialwerte konnten auf diese Weise mit genügender Genauigkeit festgelegt werden, da schon eine Vertikalverschiebung des Wasserkollektors von nur 2 mm eine wahrnehmbare Änderung des Elektroskopausschlages hervorrief. Zu jedem Potentialwerte wurde mit dem oben erwähnten Maßstab der zugehörige Abstand vom Grundblech auf Millimeter genau abgemessen.

In der gleichen Weise wurden für weitere vier Vertikalen derselben Mittelebene die zu den Potentialen von 20, 33 etc. Volt gehörigen Abstände bestimmt. Die so ermittelten Punkte gehören alle den Schnittlinien der deformierten Niveauflächen mit der vertikalen Längssymmetrieebene des Feldes an, und es kann nun leicht ein Längsschnitt durch das deformierte Feld gezeichnet werden (Tafel V).

Da ich mich durch Messungen an verschiedenen Seiten des Kollektors überzeugte, daß der Verlauf der Niveauflächen zum Flammenkollektor, wie vorauszusehen, völlig symmetrisch ist, so beschränkte ich mich in der Folge auf die Bestimmung von Punkten in der linken Hälfte der senkrechten Mittelebene des Feldes.

Der obenerwähnte horizontale Zuleitungsdraht vom Flammenkollektor zum Hilfselektroskop, der stets senkrecht zu den Längsseiten aus dem Felde herausgeführt wurde, wird zwar das Feld in seiner Umgebung etwas deformieren, doch reicht diese Deformation nicht bis zu unserer Schnittebene, wovon ich mich durch direkte Messungen mit und ohne Verbindungsdraht vergewisserte. Späterhin habe ich das Potential des Flammenkollektors nur zu Beginn und am Ende einer jeden Messung bestimmt und den Zuleitungsdraht während des Versuches ganz fortgelassen, da das Kollektorpotential sich nie merklich änderte, so lange die Flamme nicht rußte.

Tafel VI stellt den Verlauf der Niveauflächen dar einmal, wenn der Kollektor brennt (blaue Kurven) und einmal, wenn er nicht brennt (rote Kurven). Bei beiden Messungen stand der Flammenkollektor auf einem in ein Metallrohr eingebauten Hartgummistab, der mit Natrium getrocknet werden konnte. Letztere Vorrichtung war notwendig, weil bei nichtbrennendem Kollektor nur dann ein richtiger Verlauf der Niveauflächen erhalten wird, wenn die Stütze vorzüglich isoliert. Natürlich wird durch diese, quer zu den Niveauflächen langgestreckte metallische Hülle eine sehr starke Felddeformation herbeigeführt, welche man bei den Messungen im Terrain und bei brennendem Kollektor unbedingt vermeiden würde. Auch muß bei diesem Versuche der Kollektor vor jeder Messungsreihe sorgfältig geerdet werden, unter gleichzeitiger Ableitung des Zinkdrahtnetzes Z Fig. 2. Von einer Umladung des stets auf + 210 Volt geladenen Netzes wurde abgesehen, da frühere Untersuchungen [1]) zeigten, daß auch bei umgekehrtem Rich-

[1]) K. v. Wesendonk, l. c., S. 234. F. Henning, l. c., S. 901.

tungssinn der Kraftlinien des elektrischen Feldes der Ausgleichsort stets über dem Kollektorrand liegt. Die zu den Tafeln V und VI gehörigen, durch direkte Messung gewonnenen Werte sind in nachstehenden Tabellen 2 bis 4 zusammengestellt.

Tabelle 2.
(Zu Tafel 1.)

Volt	Ordinaten (cm)				
20	—	4,3	4,1	4,7	5,0
33	—	6,5	6,6	8,5	9,6
54	—	8,5	9,4	12,4	13,9
75	—	10,6	13,1	17,2	18,8
97	—	12,5	16,9	22,1	23,6
118	—	14,6	21,6	26,9	28,5
140	—	20,2	28,8	32,2	33,8
168	31,9	36,0	37,8	39,3	40,0
186	43,3	43,5	43,8	44,5	45,0
199	47,2	47,3	47,4	47,9	48,0
Abszisse (cm)	0	5	10	25	40

Tabelle 3.
(Zu Tafel 2, blaue Kurven.)

Volt	Ordinaten (cm)				
20	—	2,6	3,2	4,6	4,6
33	—	3,6	5,4	8,8	9,2
54	—	4,6	7,2	12,0	13,8
75	—	5,9	10,3	16,7	18,6
97	—	7,1	14,3	21,4	23,4
118	—	9,4	19,1	26,4	28,4
140	—	14,2	25,7	32,2	33,8
165	—	24,2	34,7	38,6	39,0
186	37,6	41,3	42,9	44,5	44,7
199	46,0	46,6	47,0	47,7	47,9
Abszisse (cm)	0	5	10	25	40

Tabelle 4.
(Zu Tafel 2, rote Kurven.)

Volt	Ordinaten (cm)				
20	—	3,9	4,6	5,6	5,7
33	—	5,9	8,3	9,6	10,1
54	—	9,6	13,3	13,9	14,2
75	—	20,4	19,9	19,3	19,2
97	37,3	32,6	26,2	24,5	24,4
118	38,4	35,9	32,0	29,4	29,2
140	40,2	38,6	36,5	34,5	34,3
165	43,0	42,3	41,4	39,8	39,6
186	46,6	46,3	45,6	45,3	45,2
199	48,7	48,5	48.4	48,4	48,1
Abszisse (cm)	0	5	10	25	40

Die Tafeln V und VI geben ein anschauliches Bild davon, in welcher Weise die Niveauflächen des homogenen Feldes (punktiert eingezeichnet) durch den Kollektor deformiert werden.

Bei nicht brennendem Kollektor (Tafel VI rote Kurven) findet eine Verteilung der Elektrizität durch Influenz statt. Dementsprechend ergeben sich zwei Partien von Niveauflächen, die beide durch eine horizontale, nicht deformierte Niveaufläche, der auch die Oberfläche des Kollektors angehört, voneinander geschieden sind. Die Lage dieser nicht deformierten Niveaufläche (neutralen Fläche) wurde durch graphische Interpolation bestimmt.

Ganz anders dagegen wird das Bild bei brennendem Flammenkollektor (Tafel V und VI blaue Kurven).

Nach eingetretenem Spannungsausgleich hat der Kollektor das Potential einer Niveaufläche angenommen, die im ungestörten Felde ca. 9 cm über seinem oberen Rande liegt. Diese „Ausgleichsniveaufläche“ wird am Orte des Kollektors herabgebogen und umschließt ihn in einer sackförmigen Ausbiegung, wobei der untere Teil von der leitenden Oberfläche des Kollektors selbst gebildet wird. Die darunter liegenden Niveauflächen werden herabgedrängt und gehen unter dem Kollektor durch die isolierende Stütze hindurch, doch erstreckt sich diese Deformation nicht sehr weit. Schon in einer Tiefe unter dem Kollektor, die ungefähr der halben Längserstreckung gleichkommt, werden die Niveauflächen wieder eben. Das gleiche gilt für die Niveauflächen oberhalb des Kollektors. Seitwärts vom Kollektor sind die Niveauflächen bis zu einer Entfernung hin deformiert, die ungefähr der doppelten Länge desselben entspricht (Tafel V). Je länger der Kollektor, desto weiter reicht die Störung, wie eine Vergleichung der beiden Tafeln V und VI lehrt. Hieraus dürfte sich die Forderung ergeben, den Kollektor möglichst klein zu bauen und die isolierende Hartgummistütze blank, also ohne Schutzhülse, zu verwenden.

Zum Vergleiche wurden noch einige andere Arten von Flammenkollektoren unter den gleichen Bedingungen im selben

elektrischen Felde geprüft. Die Kollektoren waren dabei in der Mitte des Feldes auf dem in Tafel V gezeichneten einfachen Hartgummistab aufgestellt. Da durch die vorhergehenden Messungen ein übersichtliches Bild der Feldstörung durch einen Flammenkollektor gewonnen wurde, so konnten die folgenden Untersuchungen wesentlich vereinfacht werden. Ich bestimmte lediglich das konstante Potential, auf welches sich der jeweilige Flammenkollektor auflud nach der S. 516 angegebenen Weise. Mit Hilfe dieses Wertes kann leicht angegeben werden (aus Fig. 3), wie hoch über dem Kollektorrand (und der Flammenspitze) die „Ausgleichsniveaufläche" im ungestörten Felde liegt. Diese Werte sind für verschiedene Kollektortypen in Tabelle 5 zusammengestellt.

Anschließend an diese Messung wurde für jeden Kollektor die Ladezeit bestimmt. Theoretisch[1]) braucht ein Kollektor unendlich lange Zeit, um sich völlig aufzuladen, praktisch ist dies aber geschehen, wenn das zu diesen Messungen fast ausnahmslos verwendete Aluminiumblattelektroskop eine konstante Einstellung erreicht hat. Ich bestimmte die Ladezeit in folgender Weise. Der Kollektor wurde innerhalb des künstlichen Feldes in Betrieb gesetzt und nun gewartet, bis sich das Elektroskop auf einen konstanten Wert eingestellt hatte, hierauf geerdet und mit Hilfe einer Stoppuhr die kürzeste Zeit gemessen, die zur Wiederaufladung des Elektroskopes auf den gleichen Wert nötig war. Auch die Ladezeiten in sec. sind in nachstehender Tabelle 5 für verschiedene Flammenkollektoren angegeben.

Zu diesen Zahlen möchte ich noch bemerken, daß das Potential der freibrennenden Flammen beständig schwankt. Selbst wenn die Flamme auch ganz ruhig zu brennen scheint, ändern sich doch fortwährend die Angaben des Elektroskopes. Besonders bei der leicht flackernden Gasflamme ist eine sichere Einstellung des Elektroskopes gar nicht zu erzielen.[2])

---

[1]) F. Linke, Physikalische Zeitschrift 4, 662, 1903.

[2]) Dieser Übelstand veranlaßte z. B. K. v. Wesendonk (l. c.) seine Messungen nicht fortzusetzen.

Tabelle 5.

Bezeichnung des Kollektors	Abstand der Ausgleichsniveaufläche vom Kollektorrand cm	Abstand der Ausgleichsniveaufläche von der Flammenspitze cm	Ladezeit sec.
Flammenkollektor mit Netzgehäuse (Mittel aller Messungen)	8,6	15,6	27
Elster-Geitel-Flammenkollektor:[1]			
a) bei kleiner Flamme	7,2	12,6	38
b) bei rußender „	7,3	—	28
Kerzenflammenkollektor nach Exner:			
a) Metallzylinder 10 cm hoch	8,2	15,2	36
b) „ 15,5 „ „	6,7	19,2	55
Freibrennende Flammen:			
a) Kerzenflamme 3 cm hoch	—	15,8	38
b) Petroleumflamme 2,5 „ „	—	16,2	35
c) Gasflamme 7,5 „ „	—	12,4	5
d) „ 3,1 „ „	—	3,0	7

In Übereinstimmung mit allen früheren Messungen[2]) ergibt sich aus der Tabelle 5, daß die Flammenkollektoren ausnahmslos zu hohe Potentialwerte angeben, d. h. sie nehmen keineswegs das Potential einer durch die Flammenspitze oder den Kollektorrand gehenden Niveaufläche an, sondern das einer

[1]) Von der Firma Günther und Tegetmeyer in Braunschweig.

[2]) K. v. Wesendonk, l. c., S. 235. F. Henning, l. c., S. 898, 899 und S. 903. F. Linke, l. c., S. 663 und 664.

Besonders möchte ich auf die Arbeit des Herrn H. Benndorf hinweisen, der auf rechnerischem Wege zu genau denselben Resultaten kommt (l. c., S. 453). Diese Arbeit kam mir erst nach Abschluß der vorstehenden Untersuchungen zur Hand.

mehrere Zentimeter höher gelegenen Fläche. Nimmt man bei Potentialmessungen im Freien als Ort des beobachteten Potentialwertes den oberen Kollektorrand, so fällt die zugehörige Höhe zu klein aus, die Werte des Potentialgefälles (in Volt/m) werden infolgedessen zu groß. Bei einem Abstand des Kollektorrandes von 1 m bzw. 0,5 m vom Erdboden erhält man dadurch Fehler von ca. 10% bzw. 20%.

Die Ladezeit ist für Kollektoren mit rasch aufsteigenden Verbrennungsgasen (Kollektor mit Netzgehäuse und rußender Elster-Geitelscher Kollektor) am kürzesten (Tabelle 5). Jede Behinderung des freien Abzuges der Verbrennungsgase, sei es durch lange Zylinder, sei es durch aufgesetzte Kamine, oder gar durch kleine über der Kollektoröffnung angebrachte Dächer, vergrößert die Ladezeit ganz erheblich, wovon ich mich durch mehrfache Versuche überzeugte. Ferner ergibt sich aus der Tabelle 5, daß bei freibrennender Flamme die Ausgleichsniveaufläche etwas höher über der Flammenspitze liegt, als bei Anwendung von Zylindern. Nur durch Zylinder, die die Flammenspitze beträchtlich überragen, wird dieselbe gehoben. Der gleiche Fall tritt ein, wenn auf den Kollektor (mit Netzgehäuse) noch ein mehrere Zentimeter hoher Kamin aufgesetzt wird. Umgekehrt läßt sich durch Aufsetzen eines Daches über der Kollektoröffnung die Ausgleichsniveaufläche bis zum Kollektorrande herabdrücken, was aber, wie die folgenden Untersuchungen zeigen, ohne praktische Bedeutung ist.

Durch diese Untersuchungen sollte nämlich festgestellt werden, inwieweit die Luftbewegung die Angaben eines Flammenkollektors beeinflußt. Zu diesem Zwecke wurde außerhalb des Feldes ein elektrischer Ventilator aufgestellt, durch den ein kräftiger Luftstrom quer durch das Feld getrieben werden konnte. Die Geschwindigkeit des Ventilatorflügels konnte in Stufen verändert werden und so Windgeschwindigkeiten von im Mittel 1, 2 und 4 m/sec. erzeugt werden (gemessen durch ein Anemometer, das in verschiedener Höhe in der Mittellinie des Feldes aufgestellt wurde). Eine Deformation des Feldes durch den etwa 50 cm von einer Längsseite aufge-

stellten Ventilator trat nicht ein, wovon ich mich mit Hilfe des Wasserkollektors überzeugte. Der Einfluß des Windes (4 m/sec.) auf die Angaben dieses Kollektors war unmerklich, trotzdem der Wasserstrahl durch den kräftigen Luftstrom stark aus seiner ursprünglichen Richtung herausgedrängt wurde.

Die Ergebnisse der Messung sind in folgender Tabelle 6 zusammen mit den Werten ohne Ventilation (aus der Tabelle 5) dargestellt und zwar führe ich hier der Kürze halber nur die Mittelwerte aus vielen Einzelmessungen an.

Tabelle 6.

Einfluß des Windes auf Flammenkollektoren.

Name des Kollektors	Windgeschwindigkeit in m/sec.	Abstand des Kollektorrandes vom Bodenbleche in cm	Höhe der Ausgleichsniveaufläche über dem Kollektorrand in cm	Ausgleichsniveaufläche gesunken um cm	Ladezeit in sec.
Flammenkollektor mit Netzgehäuse	0	30,6	8,6	—	27
	1	30,1	5,5	3,1	39
	4	30,1	— 0,8	9,4	86
Flammenkollektor Elster-Geitel	0	27,9	7,2	—	38
	1	27,5	5,5	1,7	56
	2	24,9	4,1	3,1	60
Flammenkollektor mit 10 cm hohem Zylinder	0	30,9	8,2	—	36
	4	30,9	4,4	3,8	67
Flammenkollektor mit 15,5cm hohem Zylinder	0	36,3	6,7	—	55
	4	36,3	1,5	5,2	217

Bei allen Flammenkollektoren zeigt sich zunächst, daß schon ganz schwacher Wind (1 m/sec.) die Ausgleichsniveaufläche um einige Zentimeter herabdrückt. Der Kollektor nimmt

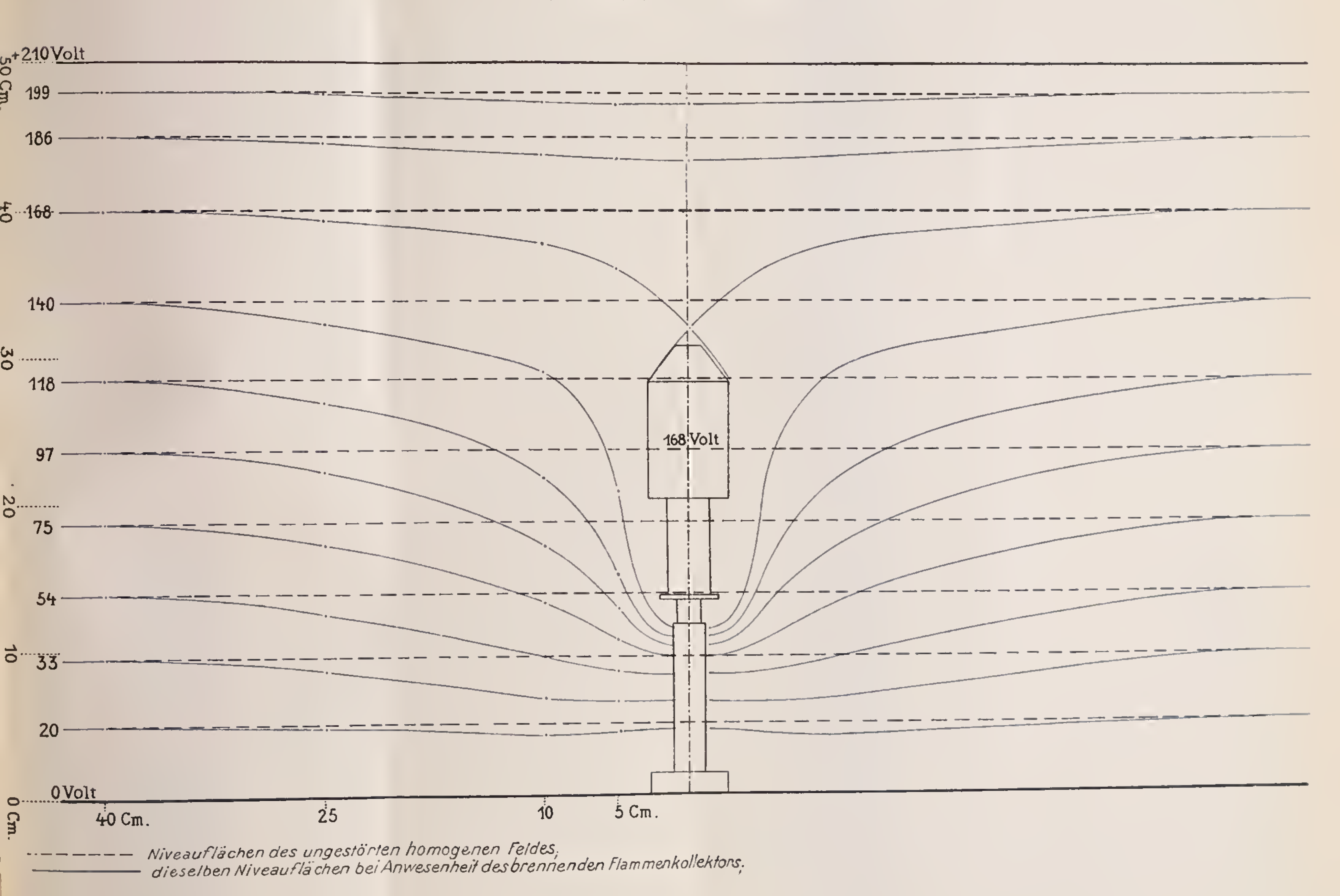
dementsprechend ein kleineres Potential an. Bei größer werdender Windgeschwindigkeit rückt auch die Ausgleichsniveaufläche tiefer und erreicht schließlich bei ca. 4 m/sec. den Kollektorrand. Eine weitere Steigerung der Windgeschwindigkeit ist praktisch bedeutungslos, da schon bei 4 m/sec. die Blättchen des Elektroskopes zu flattern beginnen.

Der Elster-Geitelsche Kollektor fängt schon bei einer Windgeschwindigkeit von 1 m/sec. stark zu rußen und zu flackern an; eine Steigerung derselben auf 2 m/sec. führt nach kurzer Zeit das Erlöschen des Flämmchens herbei, so daß bei dieser Geschwindigkeit nur mit Mühe Ablesungen erhalten werden können. Bei noch größerer Windstärke erlischt die Flamme sofort.

Ferner zeigt sich (Tabelle 6), daß sich bei Wind jeder Flammenkollektor langsamer aufladet und zwar um so langsamer, je größer die Windgeschwindigkeit ist. Bei dem Kerzenkollektor mit 15,5 cm langem Metallzylinder wächst die Ladezeit auf mehrere Minuten an. Auch aus diesem Grunde wäre ein solcher Flammenkollektor nicht zu empfehlen.

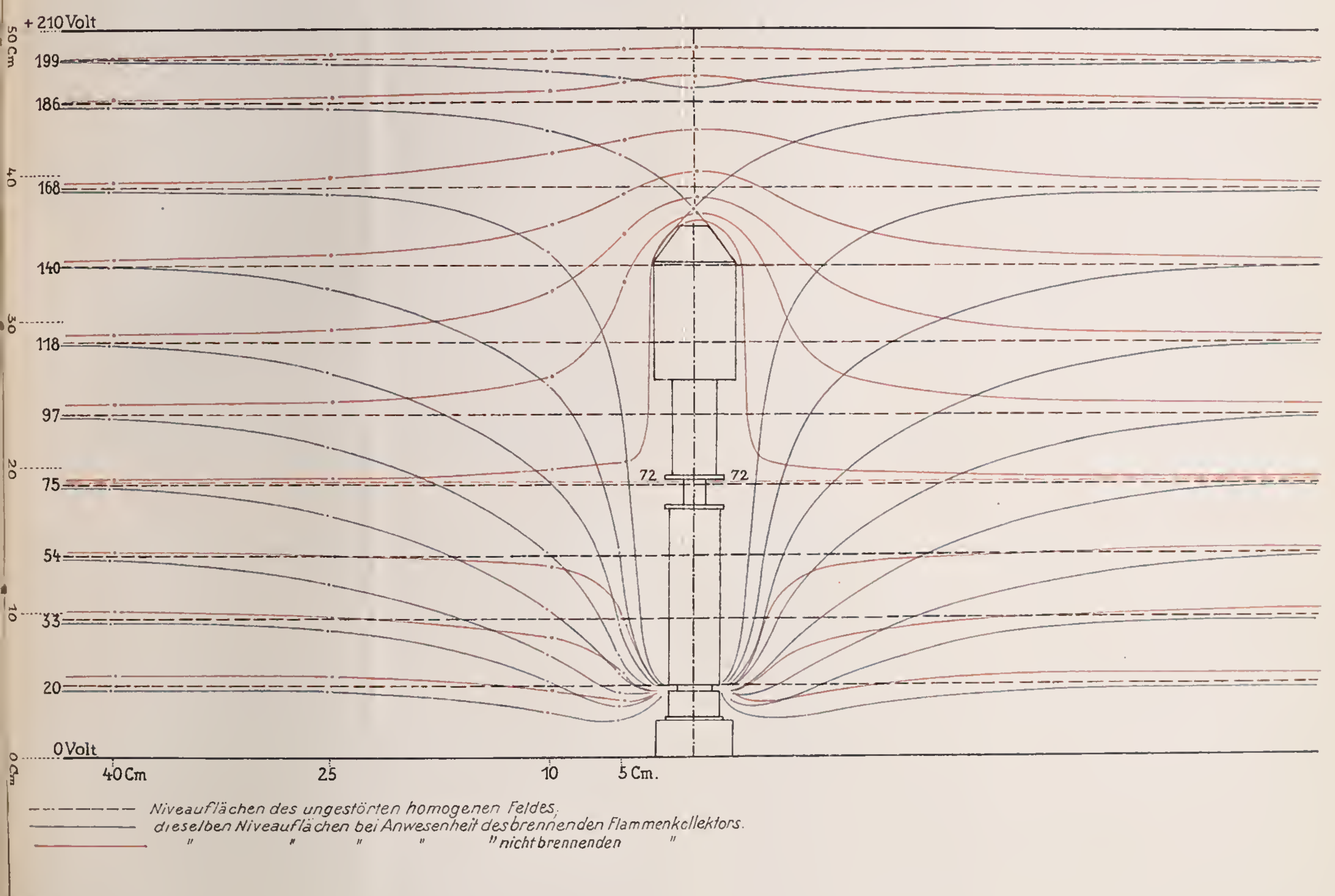
Durch besondere, am Kollektor angebrachte Armierungen, wie Kamine, kleine Dächer, Platten über der Offnung, Windschirme etc. suchte ich den erwähnten Einfluß des Windes zu beseitigen. Abgesehen davon, daß jede Behinderung des freien Abzuges der Verbrennungsgase die Ladezeit eines Flammenkollektors bedeutend vergrößert, drückt der Wind, trotz der besonderen Vorrichtungen, die Ausgleichsniveaufläche herab, oft noch weit in den Zylinder des Kollektors hinein.

Die ungleichmäßige innere Struktur des im Freien wehenden Windes muß, unseren Untersuchungen zufolge, die Ausgleichsniveaufläche eines Flammenkollektors bei Messungen in der freien Atmosphäre in beständigem Schwanken erhalten. Demzufolge werden bald größere bald kleinere nicht reelle Schwankungen des Potentialgefälles zu beobachten sein, wovon man sich bei Potentialmessungen im Freien leicht überzeugen kann.


Deformation des elektrischen Feldes durch den Flammenkollektor.
+210 Volt
199
186
168
140
118
97
75
54
33
20
0 Volt
168 Volt
50 Cm.
40
30
20
10
0 Cm.
40 Cm.
25
10
5 Cm.
Niveauflächen des ungestörten homogenen Feldes,
dieselben Niveauflächen bei Anwesenheit des brennenden Flammenkollektors.
Lith. Hub. Köhler, Mchn



Deformation des elektrischen Feldes durch den Flammenkollektor.



Lith. Hub. Köhler, Mchn



Eine Vermeidung dieser Fehlerquelle dürfte allein durch die gleichzeitige Verwendung zweier, völlig übereinstimmend gebauter Flammenkollektoren möglich sein. Ein Kollektor wird dann in geringer Entfernung über dem Erdboden aufgestellt und mit dem nunmehr zu isolierenden Gehäuse des Elektroskopes verbunden, der andere 1 m darüber, mit dem Blättchenträger in leitender Verbindung. Eine Anordnung dieser Art ist auch deshalb zu empfehlen, weil wohl nur in wenigen Fällen der Beobachtungsplatz vollkommen eben, und so der Abstand des Ausgleichsortes von der Erdoberfläche genau angebbar ist.

Die vorstehenden Untersuchungen wurden zum größten Teile im Physikalischen Institut der Technischen Hochschule ausgeführt. Herr Professor Dr. H. Ebert hat mir in freundlichster Weise die hiezu nötigen Apparate zur Verfügung gestellt und meine Arbeit durch manchen wertvollen Rat gefördert. Hiefür, sowie für die wirksame Unterstützung, die Herr Professor Ebert überhaupt den luftelektrischen Beobachtungen am Erdmagnetischen Observatorium seit ihrer Einführung zuteil werden läßt, möchte ich auch an dieser Stelle meinen verbindlichsten Dank aussprechen.



Über Pulsationen von geringer Periodendauer in der erdmagnetischen Feldkraft.

Von **H. Ebert.**

(*Eingelaufen 3. November.*)

1. Schon seit längerer Zeit erregen jene auffallend regelmäßigen Schwingungen von kurzer Periodendauer in der Intensität der erdmagnetischen Kraft allgemeinere Aufmerksamkeit, welche namentlich zu Zeiten von magnetischen Störungen in den die Feldkraft in ihrem zeitlichen Verlaufe darstellenden Kurven in Form kurzer Wellen zur Erscheinung kommen („erdmagnetische Wellen"). Bekannt ist das von Friedrich Kohlrausch vom 20. November 1882 mitgeteilte Beispiel,[1]) bei dem durch zweisekundliche Ablesungen an dem von ihm konstruierten Ablenkungs-Intensitätsvariometer für die Horizontalkomponente (Schwingungsdauer der Nadel 1,7 sec., Dämpfungsverhältnis 2,0) solche Schwingungen von rund 12 sec. Periodendauer und 4 γ (1 $\gamma = 0{,}00001$ C.G.S. Einheiten) Amplitude erhalten wurden. Bei den gewöhnlichen Registrierverfahren mit langsamem Streifengang müssen derartige kurzdauernde Schwankungen der erdmagnetischen Feldkraft verloren gehen; sie können sich höchstens in einer Verbreiterung und unscharfen Zeichnung der Kurven kundgeben.

Es war daher ein wesentliches Verdienst von M. Eschenhagen, daß er zum Studium gerade derartiger kleiner Variationen des Erdmagnetismus die sog. „Feinregistrierung" ein-

[1]) Fr. Kohlrausch, Wied. Ann. 60, 336, 1897.

führte,[1]) bei welcher durch rascheren Streifengang (1 mm gleich 15 sec., statt wie sonst üblich, 180 sec.) eine bei weitem mehr ins einzelne gehende Auflösung des zeitlichen Ablaufes der Erscheinungen ermöglicht wurde. Gleichzeitig erhöhte er die Empfindlichkeit des Variationsinstrumentes; sein Unifilarmagnetometer, bei welchem ein kleiner magnetisierter Stahlspiegel durch einen tordierten Quarzfaden, an dem er hängt, in senkrechter Stellung zum magnetischen Meridian erhalten wird, gab bei 8,5 sec. Schwingungsdauer und einem Dämpfungsverhältnis von etwa 4 eine Empfindlichkeit von 1 mm gleich 0,3 γ. In dem von ihm a. a. O. mitgeteilten Kurvenbeispiele kann man 199 Pulsationen zählen, welche auf eine (ganze) Schwingungsdauer von 32,2 sec. bei einer mittleren Amplitude von 1,4 γ führen. Eschenhagen glaubte in diesen Wellen von konstanter Periode „gewissermaßen die einfachsten Elementarbewegungen des Erdmagnetismus" erblicken zu dürfen, da (bei seinem Instrumente) keine weiteren Details durch fortgesetzte Auflösung zu erkennen waren. Auf Grund eines umfangreicheren Materiales an solchen Feinregistrierungen (etwa sechzig), kommt er zu dem folgenden Schlusse:[2]) „Alle gesammelten Ergebnisse beweisen, daß man durch eine solche Feinregistrierung bei gleichzeitiger guter Dämpfung der Magnetnadel und hoher Empfindlichkeit gegenüber den Intensitätsänderungen in der Tat bis zur letzten Auflösung der kleinsten Schwankungen des Erdmagnetismus, also zu einer Darstellung der „Elementarwellen" kommt, so daß eine weitere Verfeinerung jener Hilfsmittel keinen Erfolg mehr verspricht."

Bemerkenswert ist, daß jene kurzdauernden Wellen vorzugsweise am Tage, zwischen morgens und abends 6 Uhr, also zu einer Zeit, in der die Sonne über dem Horizonte der Beobachtungsorte zur betreffenden Jahreszeit stand, auf-

---

[1]) M. Eschenhagen, Sitzungsber. d. Berliner Akad. Nr. XXXIX, 965, 1896.

[2]) M. Eschenhagen, Sitzungsber. der Berliner Akad. Nr. XXXII, 678, 1897.

traten, sehr selten nachts, während in den Nachtstunden häufig längere, schon an den gewöhnlichen Registrierungen erkennbare Wellen erschienen.[1]) Interessant vor allem sind die von Eschenhagen entdeckten „Wellengruppen", die eine Analogie zu den Schwebungen der Töne darstellen; eine Wellenbewegung von 34 sec. Periodendauer trat mit einer solchen von 43 sec. in Interferenz und erzeugte die für das Schwingungszahlenverhältnis 5 zu 4 charakteristische Schwebungskurve; dabei betrug die Amplitude der beiden miteinander interferierenden Schwingungen etwa 0,6 γ.

Solche erdmagnetische Schwingungen können ein weites Verbreitungsgebiet besitzen. Schon 1895 wurden bei Gelegenheit von Terminbeobachtungen Wellen von 40 bis 50 sec. Dauer bemerkt, welche (innerhalb der Grenze der Beobachtungsfehler von 1 bis 2 sec.) in Potsdam und in Wilhelmshaven gleichzeitig auftraten. Weiteres hierher gehöriges Material wurde von Kr. Birkeland bei Gelegenheit der Norwegischen Expedition zum Studium der Polarlichter 1899—1900 gesammelt.[2]) Es zeigten sich bemerkenswerte Übereinstimmungen zwischen gleichzeitig zu Haldde bei Bossekop im nördlichen Norwegen und in Potsdam vorgenommenen Feinregistrierungen, also an zwei Stationen, welche um ca. 2000 km voneinander entfernt sind, ein Zeichen dafür, daß derartige Pulsationen ungeheure Gebiete des erdmagnetischen Kraftfeldes mit gleichem Rhythmus durchzucken können. Birkeland hat auch die Häufigkeit des Auftretens solcher Pulsationen als Funktion ihrer Periodendauer dargestellt; hierbei zeigt sich, daß eine Häufung der Erscheinungen auftritt für bestimmte Dauern, welche nach dem damals vorliegenden Materiale bei etwa 32 und 8 sec. gelegen ist. Hier haben wir also bereits Schwingungen von wesentlich kürzerer Dauer als die Eschenhagenschen Elementarwellen.

Es drängt sich daher die Frage auf: Kommen nicht vielleicht Pulsationen von noch kürzerer Periode in den erdmag-

---

[1]) Vgl. auch Th. Arendt, Das Wetter, Heft 11 und 12, 1896.

[2]) Kr. Birkeland, Videnskabsselsk. Skrifter. Akad. Christiania. I. Math.-naturw. Kl. Nr. 1, 1901, S. 3 ff.

netischen Elementen vor? Sind die in den Feinregistrierungen aufgezeichneten kleinen Wellen wirklich die letzten Bestandteile der großen erdmagnetischen Feldschwankungen, kann man in der beschriebenen Weise überhaupt die erdmagnetischen Erscheinungen in ihre letzten Elemente auflösen? Eine einfache Überlegung zeigt, daß dies stets daran scheitern muß, daß wir nicht imstande sind, die Schwingungsdauer der magnetometrischen Apparate unter eine gewisse Grenze herabzudrücken, wenn wir nicht an Empfindlichkeit erheblich einbüßen wollen; die Magnetsysteme sind viel zu träge, um Variationen von wenigen Sekunden Periode folgen zu können, ohne das Bild des zeitlichen Ablaufes dieser Variationen bis zur völligen Unkenntlichkeit zu verwischen; hier muß ein ganz anderes Prinzip herangezogen werden.

Eschenhagen hat schon selbst 1886, zurückgreifend auf einen Vorschlag von Werner Siemens aus dem Jahre 1882, auf die Induktionswirkung in einer ausgedehnten Leiterschleife bei Variation der von dieser umfaßten Kraftlinienzahl hingewiesen.[1] Siemens hatte der Deutschen Polarexpedition[2] vom Jahre 1882—1883 ein 12 km langes, leichtes, durch eine Guttaperchahülle isoliertes, einadriges Kabel mitgegeben, welches auf dem Eise des Kingua-Fjordes, der Deutschen Beobachtungsstation, während des internationalen Polarjahres derart ausgelegt wurde, daß es eine Fläche von rund 8 qkm umspannte. Seine Enden waren an ein astatisches Spiegelgalvanometer von Siemens und Halske angeschlossen, und die in ihm auftretenden Stromstöße wurden mit den Variationen der Vertikalintensität, wie sie eine Lloydsche Wage aufzeichnete, verglichen. Es zeigte sich, daß die im Kabel beobachteten Ströme in der Tat durchaus dem Wechsel in der

[1] M. Eschenhagen, Sitzungsber. der Berliner Akad. Nr. XXXII, 1897, S. 685 und Verhandl. Phys. Ges., I. Jahrg., Nr. 9, S. 151, 1899.

[2] Die internationale Polarforschung 1882—1883. Die Beobachtungs-Ergebnisse der Deutschen Stationen, Band I, Kingua-Fjord u. s. w. Die Erdstrom-Beobachtungen, bearbeitet von W. Giese, S. 411, Berlin 1886; vgl. auch M. Eschenhagen, ebenda S. 597.

Intensität der Vertikalkomponente folgen, so daß kein Zweifel bestehen konnte, daß wirklich die in der Leiterschleife durch die Feldvariation geweckte Induktionswirkung ein Mittel darbietet, jene Variationen zu studieren. Ja die Empfindlichkeit des Kabelapparates erwies sich für die kleinsten beobachteten Schwankungen der Vertikalintensität bei diesen Versuchen etwa hundertmal so groß als die der Lloydschen Wage, seither des einzigen Instrumentes, welches sich für die Registrierung der Vertikalkomponente dauernd als brauchbar erwiesen hat. W. Giese, welcher, wie oben angegeben, diese Beobachtungen der Deutschen Station bearbeitete, hebt hervor, daß das Kabel eigentlich nie frei war von den elektomagnetischen Impulsen und daß die ganze Anordnung für die hohen Breiten eigentlich zu empfindlich war. Eschenhagen schlug daher vor, statt der großen und sehr ausgedehnten ebenen Leiterschleife minder ausgedehnte Drahtspulen zu verwenden, welche den Vorteil bieten würden, daß man je nach ihrer Orientierung beliebige Komponenten des Erdmagnetismus, eventuell auch dessen Totalintensität untersuchen könnte; ob sich empfehlen würde, eine Verdichtung der erdmagnetischen Kraftlinien durch Ausfüllen des Spuleninneren mit weichem Eisen herbeizuführen, sei erst durch besondere Versuche festzustellen. Zu diesen ist Eschenhagen selbst nicht mehr gekommen.

Ich hatte 1897/98 in Kiel zunächst zum Studium der Natur der durch den elektrischen Trambahnbetrieb bedingten Störungen der einzelnen erdmagnetischen Komponenten derartige eisenerfüllte flache Spulen von großer Gesamtwindungsfläche, welche an ein empfindliches, in Juliusscher Aufhängung montiertes Du Bois-Rubenssches Galvanometer angeschlossen waren, mit großem Erfolge benutzt (es sind dies die Versuche, auf welche M. Eschenhagen, Verhandl. der Phys. Ges., I. Jahrg., Nr. 9, S. 151 unten, 1899 hinweist). Zu Zeiten, als der Trambahnverkehr ruhte, blieben aber noch schwache Stromstöße von außerordentlicher Variabilität zurück, welche augenscheinlich mit zeitlichen Variationen in den einzelnen erdmagnetischen Komponenten selbst zusammenhingen. Schon hierbei zeigte

sich aber, daß die Eisenerfüllung beim Studium der rasch sich vollziehenden Schwankungen ungünstig wirkte; dadurch, daß man einen dichteren Kraftlinienstrom durch das Spuleninnere leitet, gewinnt man zwar an Feldintensität, aber das Eisen folgt selbst bei den hier vorkommenden schwachen magnetischen Belastungen den zeitlichen Änderungen zu träge und verwischt dieselben, sogar wenn man sehr weit unterteiltes Eisen und namentlich in der Kraftlinienrichtung selbst nur kurz bemessene Drähte aus weichstem Eisen wählt. Da die Induktionswirkung der zeitlichen Änderungsgeschwindigkeit der betreffenden Feldkomponente proportional ist, wurde daher der weiche Eisenkern bald wieder verlassen und auf die ausgedehntere Leiterschleife zurückgegriffen.

Unterdessen sind in Kiel auf Veranlassung des Herrn Professor Leonh. Weber von Herrn Herm. Andreesen[1]) Versuche angestellt worden, bei denen ein Kabel 96 mal um das magnetische Observatorium herumgelegt wurde, so daß eine Gesamtwindungsfläche von 7200 qm erzielt wurde. Die Kabelenden wurden an ein Drehspulengalvanometer nach Déprez-d'Arsonval von Siemens und Halske von 2,5 bis 3 Minuten Schwingungsdauer angeschlossen. Die erhaltenen Registrierkurven zeigen außer sehr unregelmäßigen Zacken gelegentlich nachts kleinere Zacken von kurzer Dauer, welche Andreesen geneigt ist, ebenfalls vagabundierenden Strömen zuzuschreiben, wie jene großen Zacken, welche einen unverkennbaren Zusammenhang mit dem Trambahnbetriebe aufwiesen. Nur einmal im September 1904 zeigten sich nachts ganz feine regelmäßige Wellenzüge von ca. 30 sec. Periodendauer, welche also den von Eschenhagen gefundenen Wellen entsprechen würden.

2. Hatten die bisherigen Versuche gezeigt, daß das Induktionsprinzip in der Tat imstande ist, ein Vertikal-Intensitäts-Variometer des Erdmagnetismus von hoher Empfindlichkeit zu liefern, so mußte doch seither auch auf diesem Wege der Versuch als aussichtslos erscheinen, wesentlich weiter in die Einzel-

---

[1]) H. Andreesen, Inaug.-Diss., Kiel 1905, S. 32 ff.

heiten des zeitlichen Verlaufes der rascheren erdmagnetischen Pulsationen vorzudringen. An Stelle der beweglichen Systeme der Magnetometer traten jetzt diejenigen der Galvanometer; da man die Schwingungsdauer und die Trägheitsmomente derselben nicht unter eine gewisse Grenze bringen kann, so vermögen sie ebensowenig den kürzeren Wellen zu folgen, wie die direkt auf die Variationen der erdmagnetischen Kraft reagierenden Apparate. Dazu gesellt sich bei den Galvanometern mit beweglichen Magneten und feststehenden stromführenden Teilen noch der Nachteil, daß die Orientierung ihrer beweglichen Teile selbst wieder von den Variationen der erdmagnetischen Kraft abhängig ist. Bei den Spulengalvanometern, bei denen dieser Nachteil wegfallen würde, stört der Umstand, daß sie, durch das Kabel geschlossen, außerordentlich stark gedämpft und daher sehr träge sind, wenn man nicht durch Vorlegen großer Ballastwiderstände die Empfindlichkeit stark herabsetzen will.

Hier konnte nun ein wesentlicher Fortschritt erzielt werden durch Heranziehung des zuerst von Ader angegebenen, dann von Herrn Einthoven und später von Herrn M. Edelmann jun. so überaus verfeinerten und vervollkommneten Saitengalvanometers.[1]) Bei diesem wird ein möglichst dünner versilberter Quarzfaden oder ein feiner Metalldraht in einem starken konstanten Hilfsmagnetfelde senkrecht zu dessen Kraftlinien längs der schneidenartig gestalteten Polschuhe desselben ausgespannt; geht ein Strom durch den Faden, die „Saite“, so wird diese mit einer der Stromstärke, der Stärke des Hilfsfeldes und der Länge der Saite proportionalen Kraft quer zu den Kraftlinien abgelenkt; die Ablenkung wird durch ein Mikroskop hindurch verfolgt oder durch geeignete optische

---

[1]) Vgl. bezüglich der Aderschen Anordnung: Léauté, Compt. rend. **124**, 1440, 1897, oder La Nature, 2, 115, 1897, L'Éclairage électrique 1897, 295, Elektrotechn. Zeitschrift 1897, 561.

W. Einthoven, Ann. der Phys. (4). **12**, 1059, 1903; **14**, 182, 1904; **16**, 20, 1905.

M. Edelmann jun., Physikal. Zeitschrift, 7, Nr. 4, 115, 1906.

Systeme auf einem bewegten lichtempfindlichen Filmstreifen abgebildet. Hier hat man ein System von verschwindend kleiner Masse, welches im Stande ist den raschesten Wechseln der Stromintensität fast momentan zu folgen, eine Anordnung, welche mit dem Vorzug vollkommener Unempfindlichkeit gegen äußere magnetische Störungen denjenigen der höchsten Stromempfindlichkeit verbindet.

Mit einem solchen Saitengalvanometer habe ich meine längere Zeit unterbrochenen Versuche über die Wirkungen rascher erdmagnetischen Pulsationen auf größere Leiterschleifen im Sommer vergangenen Jahres wieder aufgenommen, wobei mich Herr Dr. Max Edelmann jun. in München auf das wirksamste unterstützte, wofür ich ihm auch an dieser Stelle meinen wärmsten Dank aussprechen möchte.

Um bei der Wahl des Beobachtungsortes nicht an Stromquellen gebunden zu sein, wurde bei der Konstruktion der Saitengalvanometer von der Verwendung der Elektromagnete abgesehen und zu derjenigen kräftiger Dauermagnete übergegangen; dadurch wurde zwar etwas an Empfindlichkeit preisgegeben, doch gelang es dem Edelmannschen Institute dafür sehr handliche Saitengalvanometer herzustellen.[1])

Das zu den Versuchen verwendete Galvanometer enthielt einen Faden von 120 Ohm Widerstand und gab 1 mm Ausschlag bei einem Strome von 10^{-7} Ampère; die mikroskopische Vergrößerung war nur eine 50 fache; Ströme von 10^{-8} Ampère waren aber noch bequem und sicher zu messen. Um in den Photogrammen die Zeitmarken mit zu erhalten, ließen wir vor dem Spalte der Registriertrommel das Pendel eines Metronoms so schwingen, daß es bei jeder ganzen Schwingung einmal etwas von der Seite her über den Spalt sich hinbewegte; am Rande des Registrierstreifens entstanden dann kleine Zacken,

[1]) Vgl. bezüglich der Beschreibung derselben sowie der photographischen Registrierapparate die obengenannte Arbeit von M. Edelmann.

an denen die Zeitbestimmung mit großer Sicherheit vorgenommen werden konnte.

Die Leiterschleife wurde hergestellt mittels eines von der Firma Felten und Guillaume bezogenen Kabels von 15 voneinander isolierten Kupferadern von je 0.8 mm Durchmesser, d. i. 0,5 qmm Querschnitt und 0,03463 Ohm Widerstand pro Ader und pro laufenden Meter. Das Kabel war 210 m lang. seine 15 Adern wurden hintereinander geschaltet, so daß eine Gesamtdrahtlänge von 3150 m und beim Auslegen längs einer Kreisfläche eine Gesamtwindungsfläche von 52640 qm zur Verfügung stand bei einem Gesamtwiderstand von 109 Ohm. Es ist klar, daß wenn man ein derartiges Kabel im Freien auslegt, Störungen thermo-, vielleicht auch hydroelektrischer Natur nicht ausbleiben können. Den hierdurch bedingten Kabelströmen legen sich freilich die gesuchten Induktionsströme einfach über, ohne durch diese beeinflußt zu werden, indessen bedingen diese Ströme ein fortwährendes Herausgehen des Galvanometerfadens aus der Ruhelage und eventuell auch aus dem Gesichtsfelde. Dieser Übelstand wurde dadurch behoben, daß in einem Nebenschluß zum Kabel durch eine dauernd hier eingeschaltete elektromotorische Kraft (ein Trockenelement mit regulierbarem großen Vorschaltwiderstand) eine geeignete Kompensation hergestellt wurde; außerdem empfahl es sich noch einen zweiten Nebenschluß anzuordnen, durch welchen die Empfindlichkeit des Galvanometers geeignet abgestuft werden konnte. Das Kabel blieb während des Nichtgebrauches immer in sich kurz geschlossen und an Erde gelegt, so daß eventuelle statische Ladungen sich sofort ausgleichen mußten. Außerdem verblieb bei den Messungen selbst ein Ende des Meßfadens sowie das ganze Gestell des Apparates mit dem Magnetsystem dauernd an Erde.

Das Kabel mußte vollkommen fest auf dem Boden verlegt werden; denn wenn irgend ein Teil desselben, — bei der großen Empfindlichkeit der Anordnung. selbst ein relativ kurzer, — sich bewegt, etwa vom Winde in Pendelschwingungen versetzt wird, so schneidet er die Kraftlinien des Erdfeldes und ruft

Induktionsströme hervor, welche genau dem Rhythmus der Bewegungen folgen.[1]) Außerdem war das Kabel nach Möglichkeit vor direkten elektrostatischen Beeinflußungen, etwa von Seiten des elektrischen Feldes der Atmosphäre zu schützen. Hätte unser Kabel einen Bleimantel besessen, so hätten wir es in die Erde eingegraben, wodurch die genannten Störungsquellen am sichersten eliminiert worden wären. Bei der im nächsten Frühjahr geplanten Fortsetzung der Versuche gedenken wir in der Tat ein umbleites, vieladriges (natürlich nicht eisenbandagiertes) Telephonkabel zu verwenden, welches weit entfernt von jedem größeren Verkehrs- oder Industriezentrum in die Erde so verlegt ist, daß es einen bestimmten Flächenraum (vgl. weiter unten) umspannt. Den seither angestellten Versuchen möchten wir nur die Bedeutung von Vorversuchen beimessen, welche zunächst die Brauchbarkeit der neuen Anordnung erproben sollten.

3. Die ersten Versuche wurden auf dem in der Nymphenburger Vorstadt Münchens gelegenen Grundstücke des Herrn Prof. Dr. M. Th. Edelmann sen. ausgeführt. Hier hatten wir während des Tages und abends reichlich Gelegenheit die Störungen zu studieren, welche durch den Trambahnverkehr, vorübergehende Wagen und die elektrische Straßenbeleuchtung hervorgerufen werden. Dieselben bestehen durchweg in plötzlich auftretenden Zuckungen von sehr unregelmäßiger und verschiedenartiger Gestalt, die aber rasch abklingen.

Daneben zeigten sich aber stets längere Ketten überaus regelmäßiger Wellen von Periodendauern weniger Zehntel

[1]) Hierauf ließe sich eine bemerkenswerte Anwendung der ganzen Anordnung gründen. Da erdmagnetische Kraftlinien überall in genügender Zahl zur Verfügung stehen, so braucht man nur mit einem bewegten Teile eines Systems, etwa eines Pegelapparates oder Flutmessers, dessen Bewegungen fernregistriert werden sollen, einen die Kraftlinien schneidenden Leiterteil zu verbinden, der durch eine Doppelleitung an ein solches hochempfindliches Saitengalvanometer angeschlossen ist. Bei vielen Gelegenheiten überzeugten wir uns davon, wie treu die inducierende Bewegung durch den Stromverlauf nachgeahmt wird.

Sekunden. Diese waren es, welche auch nachts in der Zeit zwischen 1 und 5 Uhr, in der der Trambahnverkehr ruht, und auch morgens zwischen 4 und 5 Uhr, in der auch der Lichtbetrieb im Sommer abgestellt wurde, andauerten. Natürlich wurde sofort an entfernte elektrische Betriebe gedacht, welche die ganze Nacht hindurch unterhalten blieben. Nach eingezogenen Erkundigungen kam hier vor allem die nächste, aber immer noch 1130 m weit entfernte Unterstation der städtischen Elektrizitätswerke in Betracht.

Die großen zwölfpoligen Gleichstromdynamos, welche das Beleuchtungsnetz speisen, machen 165 Touren pro Minute, die Dauer einer ganzen Umdrehung der Armatur beträgt also 0,363 sec. Die Zeit, welche verstreicht, bis ein Wickelungselement von einem Feldmagneten bis vor den nächsten tritt, beträgt nur den zwölften Teil hiervon oder 0,030 sec. Weder die eine noch die andere Periode trat in den Kurven hervor.

Der zum Betriebe dieser Dynamos verwendete dreiphasige Wechselstrom hat die gewöhnlich angewendeten 100 Perioden per Sec.; es konnten Pulsationen von $1/_{300}$ sec. Dauer erwartet werden, aber auch diese waren nicht zu bemerken.

Somit konnte bereits bei diesen Versuchen vermutet werden, daß diese Wellen dem Erdmagnetismus selbst angehörten.

Immerhin wird man derartigen Beobachtungen, welche in der Nähe eines großen Verkehrszentrums angestellt worden sind, nicht unberechtigtes Mißtrauen entgegenbringen. Wir verlegten daher den Beobachtungsort weit außerhalb der Stadt auf das 25 km südlich von München zwischen Icking und Wolfratshausen in der Villenkolonie „Schlederlohe“ gelegene Waldgrundstück des Herrn Prof. Dr. M. Th. Edelmann. Unterhalb desselben führt zwar in tiefem Einschnitte die Isartalbahn vorüber, deren Züge jedesmal beim Vorüberfahren sich durch ganz charakteristische Stromzuckungen in der Leiterschleife kennzeichneten; da aber diese Momente der Störungen durch die vorüberfahrenden Eisenmassen genau feststellbar, da sie außerdem nicht zu häufig waren, konnten sie leicht aus den Beobachtungen eliminiert werden. Die nächste elektrische

Zentrale, das Drehstromwerk in Weidach, liegt 2,2 km entfernt, eine ihren Maschinen entsprechende Schwingungsperiode konnte nicht konstatiert werden. Man könnte noch an eine direkte Induktionswirkung von seiten der unten im Eisenbahneinschnitte vorüberführenden Telegraphenleitungen auf die von uns ausgelegte Leiterschleife denken. Aber abgesehen davon, daß die nächste Stelle der Schleife ca. 70 m vom nächsten Telegraphendrahte entfernt lag, breitete sich zwischen diesem und der Schleife der ganze Erdhang aus, so daß vom Orte des Kabels die Leitungen nirgends sichtbar waren; es war also genügender Erdschutz vorhanden. Die Schleife wurde im Walde ausgelegt, das Kabel durch Holzpflöcke im tiefen Grase befestigt: dadurch waren die oben angedeuteten Fehlerquellen beseitigt.

Auch hier auf diesem völlig geschützten Terrain zeigten sich nun die kurz dauernden Pulsationen vollkommen deutlich ausgeprägt und in großer Fülle, sowohl tags als auch nachts. Indessen besteht ein sehr charakteristischer Unterschied, der an denjenigen erinnert, welcher schon von Eschenhagen bezüglich der langen erdmagnetischen Wellen konstatiert worden war (vgl. oben S. 529). Am Tage sind die Pulsationen heftig, stürmisch, wechselnd und unruhig; während der Nacht treten dafür ruhige Schwingungen, von kleinerer aber gleichförmiger Amplitude auf. Die Kurven weisen teils ziemlich reine Sinuslinien auf, teils mehrere miteinander interferierende Wellensysteme. Die meteorologischen Elemente scheinen keinen direkten Einfluß zu haben, wenigstens konnten wir keinen merklichen Unterschied in den Kabelströmen bemerken bei Wind oder bei Windstille, bei Sonnenschein oder bei bedecktem Himmel, bei hoher oder niedriger Temperatur, bei Regen oder niederschlagsfreiem Wetter, selbst ein heranziehendes Gewitter änderte nichts Wesentliches an dem allgemeinen Erscheinungsbilde. Offenbar umfaßt die Ursache der „erdmagnetischen Pulsationen“ weite Gebiete, so daß der lokale Witterungscharakter an einem bestimmten Orte irrelevant ist.

Was die Empfindlichkeit unserer Anordnung betrifft, so

berechnet sich dieselbe wie folgt: In Schlederlohe hatten wir mit dem Kabel eine nahezu rechteckige Fläche von 53,2 bzw. 54,0 m Länge und 33,1 bzw. 37,8 m Breite, also rund 1900 qm oder $1{,}9 \cdot 10^7$ cm² Fläche umlegt, die übrigen 32 m waren als Hin- und Rückleitung zu dem in der Villa des genannten Grundstückes aufgestellten Galvanometer dicht nebeneinander gelegt. Da die 15 Adern wiederum in Serie geschaltet waren, so betrug die gesamte Windungsfläche 28500 qm oder $2{,}8 \cdot 10^8$ cm². Bei einer Vertikalintensität von 0,41 C. G. S. Einheiten, wie sie im Mittel am Beobachtungsorte herrschte, würde die Änderung um 1 γ dieser Komponente d. i. um den 41000 sten Teil ihres mittleren Betrages in einer Sekunde einer induzierten elektromotorischen Kraft von $2{,}8 \cdot 10^{-5}$ Volt entsprechen. Der Widerstand des gesammten Leiterkreises betrug 229 Ohm; bei voller Empfindlichkeit entsprach, wie oben angegeben, ein Millimeter 10^{-7} Ampère; der genannte Induktionsstoß brachte also mehr als einen Skalenteil Ausschlag hervor, der mit dem Mikroskope genau gemessen werden konnte. Ein Zehntel der genannten Feldvariation konnte noch deutlich bemerkt werden. Da der Faden auch sehr kurz dauernden Stromstößen vollkommen getreu folgt, so steigert sich die Empfindlichkeit in dem Maße, als sich der zeitliche Ablauf der Feldstärkeänderung beschleunigt. Hierin liegt ein wesentlicher Vorteil gegenüber den älteren Methoden, die schon weit oberhalb der genannten Empfindlichkeitsgrenze versagen.

4. Von besonderem Interesse sind naturgemäß die bei den Beobachtungen sich ergebenden Periodendauern. Außer Pulsationen von der Dauer, wie sie schon früher beobachtet worden waren, also von der Periodenlänge von mehreren Sekunden, konnten wir auch sehr viel kürzere magnetische Wellen konstatieren, ja bei Schnelllauf der Registriertrommel gelang es, noch länger andauernde und sehr regelmäßige Pulsationen nachzuweisen, deren Periodendauer nur 0,025 sec. betrugen. Damit ist gezeigt, daß man selbst bei den „Feinregistrierungen“ noch lange nicht an den letzten „Elementen“ der erdmagnetischen Störungen angelangt war, wie vermutet wurde (vgl.

oben S. 528), sondern daß diese bei weiterer Auflösung noch eine Fülle von feineren Einzelheiten zu offenbaren vermögen.

Angesichts so rascher Pulsationen könnte die Vermutung geäußert werden, daß man hier vielleicht eine elektromagnetische Eigenschwingung des in sich geschlossenen Leiterkreises selbst vor sich habe. Das Kabel besitzt ja eine gewisse Selbstinduktion L und eine nicht unerhebliche Kapazität C (die entsprechenden Größen für das Galvanometer sind daneben zu vernachlässigen). Nun ist bekanntlich die Schwingungsdauer eines solchen Leiterkreises:

$$\tau = \frac{2\pi \sqrt{L\,(\mathrm{cm}) \cdot C\,(\mathrm{cm})}}{3 \cdot 10^{10}} \text{ sec.}$$

Die Selbstinduktion einer Ader gegenüber allen anderen Adern und gegenüber dem Erdboden wurde für ein 2 m langes Stück rund gleich 0,00001 Henry gefunden; für eine ganze Ader beträgt sie somit 0,00105 Henry und die Induktanz des ganzen Kabels L war angenähert gleich 0,01575 Henry (Erdquadrant) oder $1{,}6 \cdot 10^7$ elektromagnetische Einheiten (cm).

Die Kapazität einer Ader gegen die anderen betrug 5,7 Mikrofarad pro km, des ganzen Kabels also rund 18 Mikrofarad oder $1{,}8 \cdot 10^{-14}$ elektromagnetische Einheiten oder $1{,}6 \cdot 10^7$ elektrostatische Einheiten (cm). Setzt man diese Werte ein, so erhält man eine Schwingungsdauer für die Eigenschwingung $\tau = 0{,}003$ sec., also eine Größe, die noch unterhalb des Schwellenwertes des Auflösungsvermögens der verwendeten Registrierung gelegen ist.

Es ist natürlich kaum daran zu denken, alle diese Einzelschwingungen fortlaufend zu registrieren; dazu würde man ja außerordentliche Längen der Registrierstreifen benötigen. Aber bereits die vorliegenden, wenn auch gerade nach dieser Seite hin noch unzureichenden Aufzeichnungen scheinen darauf hinzudeuten, daß die Periodenlängen der auftretenden Wellen nicht beliebig verteilt sind, sondern daß gewisse Periodendauern häufiger wiederkehren.

Es liegt die Frage nahe: Dürfen wir nicht gewisse Periodendauern in diesen kurzen erdmagnetischen Pulsationen schon von vornherein vermuten und nach ihnen suchen?

Bei der Erzeugung elektrischer Wellen von kleiner Länge verwendet man bekanntlich häufig, z. B. bei der Demonstration der Hertzschen Versuche nach Righi, Kugeln, welche aus dem elektrischen Gleichgewicht — etwa durch eine Funkenentladung — herausgebracht, elektrische Eigenschwingungen ausführen und dadurch zur Entstehung elektromagnetischer Wellen Veranlassung geben; die Längen dieser Eigenwellen sind von der Größenordnung des Kugelumfanges. Die Theorie solcher „Kugeloscillatoren" wurde zuerst eingehender von J. J. Thomson[1]) behandelt. Neuerdings wurde die Thomsonsche Theorie von A. Lampa[2]) für den Fall erweitert, daß die Umgebung der Kugel eine von der Einheit verschiedene Dielektrizitätskonstante besitzt.

Übereinstimmend ergibt sich, daß die Eigenschwingung einer von Luft umgebenen Kugel die Periodendauer:

$$T = \frac{4\pi a}{V\sqrt{3}}$$

hat, wie a der Kugelradius in cm, V die Lichtgeschwindigkeit $V = 3 \cdot 10^{10}$ cm/sec. ist.

Die Erde stellt eine im Weltenraume frei schwebende, von Luft allseitig umgebene Kugel aus gutleitendem Materiale an ihrer Oberfläche dar. Denkt man sich das elektrische Gleichgewicht auf ihr durch irgend einen irdischen oder außerirdischen Prozeß gestört, so wird sie in den Gleichgewichtszustand nur durch eine Reihe von Eigenschwingungen hindurch gelangen können. Die Periode dieser Schwingungen berechnet sich nach der mitgeteilten Formel zu 0,15 oder 1/6 bis 1/7 sec.

Die Wellenlänge dieser Eigenschwingung ist in Luft gleich 46130 km, d. h. gleich dem 1,155 fachen des Erdumfanges, sie ist also nicht mit einer der in der drahtlosen Telegraphie verwendeten Wellenlängen zu verwechseln.

---

[1]) J. J. Thomson, Recent researches in Electricity and Magnetism. Oxford 1893, S. 360 ff.

[2]) A. Lampa, Wiener Sitzungsber. **111**, Abt. II a, S. 37, 1903.

Es wäre verfrüht, wollte man behaupten, daß gerade eine kurzdauernde Schwingung dieser Periode in den Beobachtungen besonders häufig auftritt: um dies außer Zweifel zu setzen, müßten die Beobachtungen auf einen viel größeren Zeitraum ausgedehnt und namentlich an anderen Orten unter anderen Bedingungen und mit anderen Hilfsmitteln verifiziert werden. Sollte sich indessen die Vermutung bestätigen, so wäre sofort ein anderer Weg angedeutet, auf welchem vermutlich sich wesentliche neue Einblicke in das Wesen der erdmagnetischen Störungen eröffnen würden. Es liegt nicht außerhalb der Möglichkeit einen Schwingungskreis von 0.15 sec. Eigenschwingungsperiode herzustellen. Würde man von dem benutzten Kabel eine Länge von 9,5 km verwenden, so würde dasselbe $7{,}25 \cdot 10^8$ cm Selbstinduktion und etwa ebensoviele cm Kapazität besitzen: man würde dann nur noch einen kleinen Luftkondensator an irgend einer Stelle einzuschalten haben, um eine Periode von der genannten Größenordnung genau einregulieren zu können; das Saitengalvanometer würde man an der dieser Zusatzkapazität im Leiterkreise genau diametral gegenüberliegenden Stelle einschalten, so daß zwischen jedem Saitenende und dem nächsten Kondensatorbelege auf beiden Seiten die gleiche Leiterstrecke enthalten ist; die Kapazität selbst wäre geeignet einzuregulieren. Das Kabel würde, falls kreisförmig ausgelegt, einen Flächenraum von ca. 720 Hektar umfassen.

Man würde an dem Kondensator einen Schwingungsbauch der Spannung erhalten, das Saitengalvanometer wäre an dem Spannungsknoten und dem Schwingungsbauche der Strömung eingeschaltet: vermutlich wird man die Amplitude der Schwingung durch beide, Spannung und Strömung, messen können. Eine solche mit der genannten Selbstinduktion und Kapazität ausgerüstete Leiterschleife würde alsdann einen auf die elektromagnetische Grundschwingung des Erdkörpers abgestimmten Resonator darstellen. Derselbe würde vermutlich leicht „ansprechen", so oft jene regionalen erdmagnetischen Störungen einsetzen, auf deren Vorhandensein schon ältere Beobachtungen hingewiesen haben (vgl. oben S. 529). Als-

dann müssen sich an der Stelle, wo die Kapazität eingeschaltet ist, erhebliche Spannungsschwankungen einstellen: bekanntlich wächst ja die Amplitude derselben außerordentlich rasch, wenn sich die Eigenperiode des Resonators der Periode der Schwingungen, auf welche der Resonator ansprechen soll, nähert.[1]) Man brauchte alsdann also nicht mehr die einzelnen Schwingungen selbst zu registrieren, sondern nur das Anwachsen und Abnehmen der Resonatorerregung.

Derartige Versuche würden sich namentlich in höheren Breiten sehr empfehlen, in denen die „magnetische Unruhe" durchweg eine sehr große ist (vgl. oben S. 531). Hier brauchte man nur ein relativ unempfindliches Saitengalvanometer oder man könnte wahrscheinlich die an der Kapazität auftretenden Spannungsschwankungen elektrometrisch direkt messen. Vor allem wäre es gewiß außerordentlich lohnend, wenn der S. 530 erwähnte Siemenssche Versuch im hohen Norden von Nord-Amerika, in der Nähe des magnetischen Nordpoles mit einer großen Kabelschleife wiederholt werden würde, deren Eigenschwingungsperiode in bestimmter Weise abgestimmt werden könnte.

---

[1]) Vgl. z. B. die am einfachen quadratischen Draht-Resonator angestellten Messungen von V. Bjerknes, Ann. d. Phys. (3), 44, 74, 1891.



Magnetische Ortsbestimmungen in Bayern.

2. Mitteilung.

Von **J. B. Messerschmitt.**

(*Eingelaufen 3. November.*)

(Mit Tafel VII.)

Die magnetische Landesaufnahme konnte bereits soweit gefördert werden, daß nunmehr im rechtsrheinischen Bayern an mehr als 40 Orten alle erdmagnetischen Elemente (Deklination, Inklination und Horizontal-Intensität) neu bestimmt sind, wozu noch fast ebensoviele andere Punkte kommen, an denen infolge äußerer Umstände, insbesondere der Ungunst der Witterung, nur ein oder zwei Elemente erhalten wurden. Alle diese Messungen sind ziemlich gleichmäßig über das ganze Gebiet verteilt. Die gegenseitige Entfernung der Stationen, an welchen alle Elemente beobachtet sind, beträgt durchschnittlich etwa 40 km, entspricht also einem magnetischen Netze erster Ordnung. Man kann daher daraus bereits den allgemeinen Verlauf der magnetischen Kurven sicher ableiten und gestützt darauf die weitere Detailarbeit, nämlich die Untersuchung von gestörten Gebieten, vornehmen.

Meine ersten magnetischen Ortsbestimmungen in Bayern vom Jahre 1903[1]) wurden mit einem von dem Württembergischen Statistischen Landesamt entlehnten magnetischen Theo-

[1]) Messerschmitt, Magnetische Ortsbestimmungen in Bayern. Diese Berichte Bd. XXXV, Heft 1, S. 69—83, 1905.

doliten von L. Tesdorpf ausgeführt. Im Jahre 1904 ist dann bei derselben Firma ein neuer Reisetheodolit bestellt worden, der aber wegen Krankheit des Verfertigers erst im Juni 1905, kurz vor dem plötzlichen Ableben dieses geschickten Mechanikers zur Ablieferung gelangte.

Dieses Instrument (Nr. 2679) weist gegenüber dem älteren, zuerst verwendeten (Tesdorpf Nr. 1769) mehrfache Verbesserungen auf, die schon großenteils bei anderen Reiseapparaten, welche Tesdorpf für die Südpolarexpeditionen und für andere Institute geliefert hat, angebracht sind. Einige weitere Änderungen, welche mir nach den Erfahrungen im Jahre 1903 wünschenswert erschienen, sind an unserem Theodoliten ebenfalls berücksichtigt worden, so daß derselbe in seiner jetzigen Form sowohl recht zweckentsprechend eingerichtet, als auch bei der Arbeit sehr handlich ist. Er kann mit allem Zubehör in einem tragbaren Kasten verpackt und im Felde verhältnismäßig leicht transportiert werden.

Er besteht aus einem theodolitartigen Unterbau, dessen Horizontalkreis völlig verdeckt ist und einen Durchmesser von 12 cm hat. Der Kreis ist in 20′ direkt geteilt und wird durch zwei Schätzmikroskope auf je 0′.2 abgelesen, so daß die Summe der beiden Mikroskopablesungen 0′.1 gibt. Die Teilung ist vorzüglich und kann für die vorliegenden Zwecke als fehlerfrei angenommen werden. Das Fernrohr ist am Rande des Kreises so angebracht, daß die verschiedenen Hilfsapparate zentrisch aufgesetzt werden können. Dabei zeigt die Visierachse genau nach dem Mittelpunkt des Kreises. Das Objektiv hat 20 mm freie Öffnung und 140 mm Brennweite. Das Okular vergrößert neunmal. Das Fadenkreuz besteht aus vier vertikalen und einem horizontalen Faden und wird von oben durch einen kleinen Ausschnitt im Fernrohr und durch einen darüber nach allen Seiten verstellbaren Spiegel mit Blende beleuchtet. Ein kleines gleichseitig rechtwinkliges Prisma, das hinter der Fadenplatte eingesetzt ist, dient zur Reflexion des Fadenkreuzes von dem Magnetspiegel, indem so der Magnet stets durch Autokollimation eingestellt werden kann.

Für die erste Einstellung des Instrumentes ist an dem Dreifuß eine Dosenlibelle angebracht: zur genaueren Nivellierung der Fernrohrachse dient jedoch eine Reiterlibelle, deren Teilwerte 16.″3 betragen.

Zu dem Reisetheodoliten gehören zwei Deklinatorien, zwei Deflektoren, zwei Ablenkungsmagnete mit Ablenkungsschienen und einem Schwingungskasten, ein Inklinationsgehäuse mit zwei Inklinationsnadeln und zwei Streichmagneten, ein astronomischer Aufsatz, ein eisenfreies Stativ und noch einige andere kleinere Hilfsmittel. Sämtliche Teile des Instrumentes sind eisenfrei. Zum Schutze gegen Sonne und Regen dient ein großer eisenfreier Schirm.

Das eine Deklinatorium mit Fadensuspension besitzt zwei Röhrenmagnete von 35 mm Länge, 12 mm äußerem Durchmesser und 20 g Gewicht. Bei dem anderen schwingt die Magnetnadel auf der Pinne. Dieser Magnet besteht aus vier übereinander getrennt gelagerten Stahllamellen, welche an dem einen Ende einen kleinen Spiegel tragen, in dem sich das im Fernrohr befindliche Fadenkreuz spiegelt. Der Magnet hat ein fein geschliffenes Doppelhütchen aus Saphir in einer Metallhülse, welche sich in einem zweiten Zylinder auf- und abbewegen kann. Es kann also die Kollimation durch Umlegen des Magneten eliminiert werden. Um dies zu ermöglichen wird die Pinne versenkt, worauf der Magnet durch zwei Zungenarme gefaßt und mit dem sie tragenden Rahmen im Deklinationsgehäuse um 180° gedreht wird. Im Felde wird nur dieses Magnetsystem bei den Beobachtungen verwendet.

Bei den Deklinationsbestimmungen habe ich gewöhnlich das Azimut einer Mire durch astronomische Messungen bestimmt. Ist die Sonne nicht zu hoch über dem Horizont, so kann das mit dem Untersatz fest verbundene Fernrohr direkt zu den Einstellungen der Sonne benutzt werden. Bei größeren Höhen muß entweder der Sonnenspiegel oder noch besser der astronomische Aufsatz verwendet werden. Dieser besitzt einen Höhenkreis von 10 cm Teilungsdurchmesser. Der Kreis ist in

halbe Grade geteilt und kann durch zwei Nonien auf 1' abgelesen werden. Das Fernrohr hat ein Objektiv von 20 mm Öffnung. Die Okularvergrößerung ist 18 fach; außerdem ist für Zenitbeobachtungen ein Prismenokular beigegeben. Die Sonnengläser können auf die Okularblenden beider Fernrohre aufgesteckt werden. Eine Nivellierlibelle (14" Teilwert), eine Stützlibelle (24" Teilwert), eine Alhidadenlibelle am Höhenkreis (31") und eine Aufsatzlibelle (27") vervollständigen den astronomischen Aufsatz. Für die Fadenbeleuchtung bei Nacht wird entweder ein Ring vor das Objektiv gesteckt oder es kann durch die durchbohrte Fernrohrachse Licht auf einen zentrisch einzuschraubenden Metallspiegel von 1,5 mm Durchmesser mit 0.5 mm starkem Schaft geworfen werden. Durch Drehung dieses kleinen Spiegels läßt sich die Beleuchtung im Okular bequem verändern.

Bei den Azimutmessungen wurde das bereits früher (l. c., S. 74) angewandte Verfahren eingehalten, das sich gut bewährt hat. Es wurde daher der Stand des Taschenchronometer Kittel (Nr. 230) mit Halbsekundenschlag im Felde so oft als möglich mit Hilfe der täglichen telegraphischen Zeitsignale der Post- und Telegraphenämter ermittelt. Die Uhr hat auch im Jahre 1905 ihren vorzüglichen Gang beibehalten, so daß man stets der Zeit auf $\pm$ 0ˢ25 sicher sein konnte, eine Genauigkeit, die für die Azimutmessungen zu Deklinationsbestimmungen völlig ausreicht.

Die Richtung des astronomischen Meridians wurde aus Sonnenbeobachtungen ermittelt, indem jeweilen der rechte und linke Sonnenrand eingestellt wurde. Um allfällige Irrtümer beim Beobachten leichter erkennen zu können, sind die einzelnen Einstellungen gesondert berechnet worden und zwar nach der Formel:

$$\operatorname{tg} a = \frac{\operatorname{tg} t \cdot \cos M}{\sin(\varphi - M)},$$

wenn $\operatorname{tg} M = \cos t \cdot \operatorname{tg} \delta$ ist.

Die Beobachtungen mit dem astronomischen Aufsatz sind bequemer, als mit dem am Untersatz befindlichen Fernrohr,

insbesondere wegen der stärkeren Vergrößerung und der Verwendung eines Okularprismas. Die Genauigkeit ist jedoch in beiden Fällen nahe gleich, wie sich aus direkten Versuchen ergab, indem bei den Azimutmessungen an mehreren Stationen sowohl der astronomische Aufsatz, als auch das feste Fernrohr mit und ohne Sonnenspiegel (schwarzem Glasspiegel) verwendet wurde. Aus der inneren Übereinstimmung eines Satzes von acht Einstellungen folgt der mittlere Fehler eines Azimutes zu ± 0.'15; um etwa den gleichen Betrag weichen die mit den verschiedenen Fernrohren erhaltenen Azimute voneinander ab.

Die Einstellungen der Magnetnadel durch Autokollimation können auf ± 0.'3 sicher geschehen, so daß man unter Berücksichtigung aller in Betracht kommenden Fehlerquellen annehmen darf, daß die vorliegenden Deklinationsbestimmungen auf mindestens 1' genau sind.

Zur Bestimmung der Horizontalintensität dienen zwei Ablenkungsmagnete und zwei Deflektoren. Im Felde wurde dieses Element fast ausschließlich aus Ablenkungsbeobachtungen berechnet. Die Temperaturkoeffizienten der vier Magnete sind aus zwei größeren Reihen im Oktober und November 1905 am erdmagnetischen Observatorium in München ermittelt worden. Hiebei lagen die Temperaturen zwischen 0° und 33° C. Die Temperaturkoeffizienten sind für 1° C.

für den Ablenkungsmagneten	Nr. I (23):	25,7 γ
„ „ „	Nr. II (35):	26,1 γ
„ „ Deflektor 1:		27,3 γ
„ „ „ 2:		26,0 γ.

Die Änderung erfolgt innerhalb des Messungsbereiches genau linear.

Da die Magnete offenbar noch ziemlich jung waren, nahm ihr Moment in der ersten Zeit noch merklich ab. Besser hielt sich das Moment der beiden Deflektoren. Der log c des Ablenkungsmagneten Nr. I zeigte vom 30. August auf den 1. September einen plötzlichen Sprung (von 9,11820 auf 9,11100), dessen Ursache nicht aufgeklärt werden konnte. Da übrigens

während der Zeit der Feldbeobachtungen von Juli bis Oktober fünf Vergleichsreihen in München stattfanden, konnten die angegebenen Änderungen der magnetischen Momente sicher berücksichtigt werden.

Aus der inneren Übereinstimmung der Ablenkungsresultate der vier Magnete ergibt sich eine mittlere Genauigkeit der Horizontalintensität von $\pm 7\,\gamma$ für eine Station. Unter Zurechnung der Unsicherheit der Reduktion auf die Epoche kann die Genauigkeit der vorliegenden Messungen auf $\pm 10\,\gamma$ angenommen werden.

Die Ablenkungs- und die Deklinationsmagnete werden in zylindrischen auseinanderschraubbaren Schutzhülsen von weichem Eisen von 2 mm Stärke mit Holzeinlagen aufbewahrt. Ebenso ist im Transportkasten ein eisernes Kästchen angebracht, in welches die Deflektoren gebettet sind, so daß also dadurch die Magnete vor schädlichen Einwirkungen elektrischer Ströme möglichst geschützt sind. Außerdem ist in München das Instrument niemals durch die Stadt befördert worden, um es von dem Einflusse der elektrischen Ströme des Trambahnnetzes möglichst entfernt zu halten. Ebenso wurden im Felde die Starkstromleitungen nach Kräften gemieden, was freilich bei der großen Verbreitung der elektrischen Anlagen nie ganz möglich ist. Die geringen und überdies ziemlich gleichmäßigen Änderungen der Magnete, insbesondere der Deflektoren, zeigen übrigens, daß die angewandten Schutzhülsen völlig ihren Zweck erfüllen, so daß man auch deshalb beim Transport durchaus nicht so ängstlich wegen der Annäherung an Starkstromleitungen zu sein braucht. Etwas anderes ist es natürlich bei den Messungen selbst. Hiebei darf man sich niemals mehr als 100 Meter dem betreffenden Stromkreise nähern, um keine konstanten Ablenkungen zu erleiden. In unserem Falle konnte ich stets über einen Kilometer von elektrischen Anlagen entfernt bleiben.

Die Inklination wird mit einem Nadelinklinatorium mit zwei Nadeln bestimmt, dessen Gehäuse sich zentrisch auf den Theodolituntersatz befestigen läßt. Der Kreis des Inklinatoriums

hat 12 cm Durchmesser und ist in 20′ geteilt; es können also noch 2′ abgeschätzt werden. Die Summe der Ablesungen an beiden Nadelenden gibt also direkt Bogenminuten. Die Inklinationsnadeln von 11,5 cm Länge ruhen mit ihren 25 mm langen gehärteten Stahlachsen, die an den Enden Zapfen von 0,4 mm Durchmesser haben, auf plangeschliffenen Karneolschneiden. Ihr Gewicht beträgt 5 Gramm. An der Rückseite des Magnaliumgehäuses ist eine Arretierungsvorrichtung angebracht, mit welcher die Hebung und Senkung der Achsen der Nadeln auf und von der Schneide ab sicher und langsam erfolgt.

Die Genauigkeit der Inklinationsmessungen kann auf ± 1′ angenommen werden. Dabei sind bei den Messungen jedesmal die Nadeln sowohl in beiden Lagen beobachtet, als auch jeweilen ummagnetisiert worden. Der Unterschied zwischen den beiden Nadeln beträgt — 2′.5; ihr Mittel entspricht dem in München verwendeten System.

Die Beobachtungen im Feld sind nach den Registrierungen in München auf den Anfang des Jahres 1905 reduziert. Bei den Inklinationen sind aber noch die Angaben des Potsdamer Observatoriums beigezogen worden, da die Variationen der Vertikalintensität durch den Einfluß des elektrischen Trambahnbetriebs in München nicht genügend sicher erhalten werden. Die betreffenden Angaben verdanke ich der gütigen Mitteilung des Vorstandes jenes Observatoriums, Herrn Prof. Ad. Schmidt.

Die magnetischen Elemente in München, gültig für den Anfang des Jahres, sind aus den Mittelwerten der Monate Dezember des vorhergehenden Jahres und dem Januar des folgenden Jahres abgeleitet worden. Sie sind in der nachfolgenden Tabelle I zusammengestellt.

Aus den direkt beobachteten Werten der Deklination (D), der Horizontalintensität (H) und der Inklination (J) sind die rechtwinkligen Komponenten

Tabelle I.

N. Br. 48° 8.'8. Länge 11° 36.'5 ö. v. Greenw. Höhe = 530 m.

München	D	H	J	X	Y	Z	F
1899.0	10° 36.'8 W	0.20 572	63° 23.'2	0.20 220	−0.03 789	0.41 056	0.45 922
1900.0	30.2	595	20.0	250	780	41 011	890
1901.0	25.8	629	18.1	288	735	41 019	914
1902.0	21.2	643	15.1	307	710	40 957	865
1903.0	16.9	652	11.8	320	686	40 878	798
1904.0	10.1	643	10.9	319	644	40 834	755
1905.0	7.3	653	10.5	331	630	40 841	767
1906.0	2.0	651	10.3	335	598	40 832	757
1850.0	15° 53.9	0.19 523	64° 59.5	0.18 776	−0.05 348	0.42 826	0.46 181
Theorie 1885.0	11° 20.5	0.20 096	64° 5.7	0.19 704	−0.03 952	0.41 380	0.46 001

Nordkomponente: $X = H \cdot \cos D$
Westkomponente: $Y = H \cdot \sin D$
Vertikalkomponente: $Z = H \cdot \operatorname{tg} J$

abgeleitet worden, woraus dann die Totalintensität:

$$F = H \cdot \sec J = Z \cdot \operatorname{cosec} J$$

folgt.

Zum Vergleich sind noch die von Lamont für 1850,0, der Epoche seiner magnetischen Ortsbestimmungen, bestimmten Werte angeführt. (Lamont, „Magnetische Ortsbestimmungen in Bayern", Band I, Seite 24 und 135, München 1854.) Aus der Differenz der Werte für 1900 und 1850 folgt die mittlere jährliche Variation der magnetischen Elemente in München innerhalb des letzten halben Jahrhunderts für:

$D: -\ 6.'47$
$H: +\ 21.44\,\gamma$
$J: -\ 1.99$
$X: +\ 29.48\,\gamma$
$Y: +\ 31.36\,\gamma$
$Z: -\ 36.30\,\gamma$
$F: -\ 5.82\,\gamma.$

Vergleicht man damit die seit der Einrichtung des neuen Observatoriums direkt beobachteten Variationen, so erhält man im Mittel von 1899 bis 1906:

$$
\begin{aligned}
D &: - \; 4'.97 \\
H &: + \; 11.3 \;\; \gamma \\
J &: - \; 1.8 \\
X &: + \; 16.4 \;\; \gamma \\
Y &: + \; 27.3 \;\; \gamma \\
Z &: - \; 32.0 \;\; \gamma \\
F &: - \; 23.6 \;\; \gamma,
\end{aligned}
$$

also beträchtlich kleinere Werte. Im einzelnen sind die Unterschiede nach der obigen Zusammenstellung in Tabelle I noch beträchtlicher.

In Deklination ist die jährliche Abnahme der westlichen Deklination im mittleren Europa jetzt nur noch 4′ bis 5′ gegen 6′.5 früher; die Zunahme der Horizontalintensität beträgt nur 11 γ gegen 21 γ. Noch auffälliger ist die Änderung in den einzelnen Jahren, insbesondere bei der Horizontalintensität und bei der Inklination, welch beide Elemente in den letzten Jahren fast konstant geblieben sind, wie die nachstehende Zusammenstellung ergibt:

Jahr	Var. D	Var. H	Var. J
1899—1900	— 6′.6	+ 23 γ	— 3′.2
1900—1901	— 4.4	+ 34 γ	— 1.9
1901—1902	— 4.6	+ 14 γ	— 3.0
1902—1903	— 4.3	+ 9 γ	— 3.3
1903—1904	— 6.8	— 9 γ	— 0.9
1904—1905	— 2.8	+ 10 γ	— 0.4
1905—1906	— 5.3	— 2 γ	— 0.2

Dementsprechend sind auch die Variationen der Komponenten und der Totalkraft gegen den Durchschnitt des letzten halben Jahrhunderts stark geändert. Es rühren diese Unterschiede teils von der jetzt herrschenden stärkeren magnetischen

Unruhe her, teils aber sind sie auch säkularer Natur. Auch die anderen benachbarten Observatorien zeigen den nämlichen Charakter in den Variationen, wie man aus den für die Jahresmitte gültigen Angaben von Potdam und Pola erkennen kann.

Potsdam. Breite 52° 22.′9. Länge 13° 3.′9 ö. v. G. Höhe 86 m.

Jahr	D	H	J	X	−Y	Z	F
1899	9° 60.′7	0.18 818	66° 25.′8	0.18 531	0.03 271	0.43 133	0.47 059
	−4.4	+26	−0.4				
1900	56.3	844	26.2	561	252	206	137
	−4.2	+27	−3.4				
1901	52.1	861	22.8	582	233	128	074
	−4.1	+12	−2.0				
1902	48.0	873	20.8	598	212	090	042
	−4.2	+ 3	−0.8				
1903	43.8	876	20.0	605	190	068	022
	−4.4	+ 4	−0.4				
1904	39.4	880	19.6	612	167	065	021

Pola. Breite 44° 52.′1. Länge 13° 50.8 ö. v. G. Höhe 33 m.

Jahr	D	H	J	X	−Y	Z	F
1899	9° 29.′9	0.22 168	60° —	0.21 836	0.03 626	—	—
	−3 6	+34					
1900	25.3	202	15.9	902	634	0.38 871	0.44 765
	−5.2	+28	−2.7				
1901	20.1	230	13.2	936	606	848	759
	−5.0	+ 3	−2.6				
1902	15.1	233	10.6	948	575	784	705
	−4.4	− 8	−0.7				
1903	10.7	225	9.9	941	545	753	674
	−4.7	+ 6	−2.0				
1904	6.0	221	7.9	951	516	709	639

Für die Deklinationsänderungen in Deutschland kann man auch die Messungen der magnetischen Observatorien von Bergwerken beiziehen. So wird dieses Element in Bochum am Observatorium der Westfälischen Bergwerkschaftskasse (Vorstand Markscheider Lenz)[1]) und in Hermsdorf bei Waldenburg (Reg.-Bez. Breslau) am magnetischen Observatorium der Niederschlesischen Steinkohlen-Bergbau-Hilfskasse (Vorstand Markscheider Fleischer) aus Registrierungen abgeleitet. Letztere Werte verdanke ich der gefälligen direkten Mitteilung des Herrn Fleischer. Hieran sollen noch die aus dreimal täglichen Beob-

[1]) Die jährlichen Beobachtungen sind in der Zeitschrift „Glückauf" veröffentlicht.

achtungen abgeleitete Deklination von Prag angeschlossen werden, da dieser Ort die München am nächsten gelegene magnetische Station ist. Die Lage der drei magnetischen Warten ist:

Bochum: Breite 51° 29′ 28″.2. Länge 7° 13′ 52″.5 ö. v. G. 115 m Meereshöhe.

Hermsdorf: Breite 50° 45′ 38″.5. Länge 16° 13′ 55″.5 ö. v. G. 515 m Meereshöhe.

Prag: Breite 50° 5′ 18″.5. Länge 14° 25′ 21″.5 ö. v. G. 202 m Meereshöhe.

Die Deklination, gültig für die Jahresmitte, und ihre Variation beträgt:

Jahr	Bochum		Hermsdorf		Prag	
1901	12° 42′.8 W	—3′.4	8° 13′.6 W	—4′.7	9° 1′.7	—4′.1
1902	39.4	— 3.7	8.9	— 4.9	8 57.6	— 4.0
1903	35.7	— 4.3	4.0	— 4.7	53.6	— 4.9
1904	31.4	— 4.2	7 59.3	— 4.3	48.7	— 5.4
1905	27.2		55.0		43.3	

Die Ergebnisse der Beobachtungen des Jahres 1905 zur magnetischen Landesaufnahme sind in der Tabelle II zusammengestellt. Sie enthält zunächst die geographischen Koordinaten und Meereshöhen der Beobachtungspunkte. Diese sind den Karten des topographischen Atlasses von Bayern (Maßstab 1 : 50 000) entnommen worden. Das betreffende Blatt ist in der letzten Kolumne angeführt. Die Längen sind in den Karten von der alten Sternwarte in München aus gezählt. Zur Umwandlung in Längen östlich von Greenwich ist die Länge des Nullpunktes zu 11° 36′ 12″ angenommen worden. Die neue im Jahre 1816 von Soldner erbaute Sternwarte liegt 20″ östlicher und 1′ 12″ nördlicher als die alte Sternwarte,[1]) deren Ort also jetzt auf dem Terrain des Ostbahnhofes zu suchen ist. Was nun die Genauigkeit anbelangt, mit der man die Lage des

[1]) Geogr. Breite also 48° 7′ 33″ vgl. K. Then, Die Bayerischen Kartenwerke in ihren mathematischen Grundlagen. München 1905.

Nr.	Ort	Breite	Länge	Meereshöhe	D	H
1	Nesselwang	47° 37′ 29″	19° 30′ 28″	880 m	—	0.20 733
2	Kochel	47 39 37	11 21 54	602	10° 14.2 W	0.20 750
3	Waltenhofen	47 39 55	10 18 31	730	11 56.6	0.20 698
4	Penzberg	47 44 47	11 22 24	600	10 12.5	0.20 717
5	Memmingen	47 47 16	10 10 30	600	11 20.5	0.20 520
6	Grafing	48 2 36	11 56 25	550	—	0.20 600
7	München	48 8 47	11 36 32	530	10 7.3	0.20 653
8	Haspelmoor	48 13 29	11 6 14	543	—	0.20 510
9	Walpertskirchen	48 15 55	11 58 32	490	10 4.2	0.20 512
10	Senden	48 19 28	10 3 24	490	—	0.20 398
11	Neufahrn b. Freis.	48 19 33	11 39 41	460	—	0.20 527
12	Günzburg	48 27 42	10 17 31	460	—	0.20 358
13	Pfaffenhofen a. I.	48 32 2	11 31 58	450	10 20.1	0.20 421
14	Altdorf (Landshut)	48 33 37	12 7 33	410	9 58.0	0.20 413
15	Straubing	48 52 19	12 34 24	330	9 44.6	0.20 272
16	Wasserzell	48 52 34	11 9 25	390	—	0.20 254
17	Pfünz	48 53 15	11 15 52	390	10 30.1	0.20 229
18	Solnhofen	48 53 28	10 59 53	450	10 32.7	0.20 213
19	Dinkelsbühl	49 4 18	10 20 36	450	10 45.4	0.20 076
20	Cham	49 13 27	12 39 43	380	—	0.20 070
21	Neumarkt i. O.	49 16 16	11 28 29	440	10 21.9	0.20 066
22	Ansbach	49 18 35	10 34 43	450	10 43.8	0.20 023
23	Schwabach	49 19 25	11 1 42	340	10 33.2	0.20 050
24	Schwandorf	49 19 31	12 6 7	360	9 57.1	0.20 108
25	Burgfarnbach	49 29 37	10 55 41	315	—	0.19 909
26	Uffenheim	49 32 50	10 13 27	350	10 58.8	0.19 881
27	Neustadt a. Aisch	49 34 47	10 35 48	290	—	0.19 891
28	Kleinheubach	49 43 16	9 12 13	140	11 32.3	0.19 675
29	Neustadt a. W.	49 43 26	12 10 29	420	10 5.2	0.19 973
30	Forchheim	49 43 42	11 3 52	270	10 31.0	0.19 866
31	Kitzingen	49 44 0	10 9 5	210	11 5.3	0.19 816
32	Würzburg	49 46 25	9 57 30	250	11 2.5	0.19 784
33	Bayreuth	49 56 59	11 37 9	360	—	0.19 782
34	Aschaffenburg	49 58 27	9 10 50	200	11 29.4	0.19 570
35	Lohr	50 0 33	9 34 37	200	10 58.9	0.19 624
36	Oberndorf	50 2 16	10 12 36	220	10 58.2	0.19 658
37	Wunsiedel	50 1 55	12 0 1	540	10 3.0	0.19 770
38	„	50 2 28	12 0 46	600	10 8.0	0.19 908
39	Lichtenfels	50 8 34	11 4 5	280	10 40.6	0.19 650
40	Hof	50 18 21	11 53 26	580	10 7.3	0.19 729
41	Neustadt a. S.	50 21 —	10 15 —	250	10 57.5	0.19 624
42	Koburg	50 17 —	10 58 —	—	10 38.5	0.19 624

[1] Beobachtungsort der Inklination 48° 23′ 50″ N. B. 11° 44′ 18″ ö. v. G.
[2] „ „ „ 48° 31′ 50″ N. B. 12° 9′ 12″ ö. v. G.
[3] „ „ „ 49° 27′ 52″ N. B. 11° 1′ 3″ ö. v. G.

Tabelle II.

J	X	Y	Z	F	Lamont	Top. Atlas
—	—	—	—	—	—	89 W
62° 52.1	0.20 420	— 0.03 688	0.40 494	0.45 501	I 111	91 W
62 52.4	0.20 250	0.04 283	0.40 402	0.45 396	—	89 W
—	0.20 389	0.03 672	—	—	—	91 W
63 16.4	0.20 119	0.04 035	0.40 752	0.45 625	I 129	80
63 13.3	—	—	0.40 820	0.45 723	—	78 W
63 10.5	0.20 331	0.03 630	0.40 841	0.45 767	I 135	77 O
63 25.2	—	—	0.40 993	0.45 838	—	76 O
—	0.20 196	0.03 587	—	—	—	71 W
63 28.6	—	—	0.41 810	0.46 727	—	67
63 32.6 [1])	—	—	0.41 247	0.46 072	I 79	70 O
63 38.7	—	—	0.41 075	0.45 843	I 88	60 W
63 34.6	0.20 090	0.03 658	0.41 096	0.45 890	I 151	62 W
63 33.0 [2])	0.20 103	0.03 533	0.41 014	0.45 811	I 114 II 94	63 W
63 47.1	0.19 979	0.03 431	0.41 170	0.45 881	I 177 II 168	56 W
63 50.6	—	—	0.41 241	0.45 946	—	53 O
63 53.8	0.19 438	0.03 687	0.41 287	0.45 976	—	53 O
63 54.8	0.19 420	0.03 699	0.41 285	0.45 968	—	53 W
64 8.7	0.19 723	0.03 742	0.41 428	0.46 036	II 50	45 W
—	—	—	—	—	I 68 II 43	43 W
64 7.5	0.19 739	0.03 610	0.41 372	0.45 982	I 137 II 117	41 W
64 16.9	0.19 674	0.03 795	0.40 625	0.46 142	I 46	39 O
64 11.2	0.19 710	0.03 672	0.40 506	0.46 043	II 157	40 W
64 3.6	0.19 795	0.03 531	0.41 337	0.45 961	I 169	42 W
64 20.1 [3])	—	—	0.41 492	0.46 021	—	34 W
64 26.8	0.19 517	0.03 787	0.41 582	0.46 089	I 183 II 174	33 W
64 34.0	—	—	0.41 827	0.46 316	—	33 O
64 53.3	0.19 277	0.03 935	0.41 980	0.46 362	—	25 W
64 33.6	0.19 665	0.03 498	0.41 988	0.46 497	II 120	30 O
64 23.7	0.19 532	0.03 626	0.41 455	0.45 961	II 58	28 O
64 38.6	0.19 445	0.03 811	0.41 814	0.46 271	—	26 O
64 40.8 [4])	0.19 418	0.03 789	0.41 829	0.46 272	I 196 II 183	26 O
64 43.9	—	—	0.41 909	0.46 343	I 57 II 34	21 W
64 58.0 [5])	0.19 177	0.03 906	0.41 968	0.46 307	I 49	17 W
64 54.5	0.19 265	0.03 738	0.41 908	0.46 276	—	17 O
64 53.0	0.19 299	0.03 741	0.41 934	0.46 313	—	12 W
64 50.0	0.19 477	0.03 450	0.42 077	0.46 491	II 185	15 W
64 38.6	0.19 598	0.03 503	0.42 009	0.46 487	—	22 W
64 55.2 [6])	0.19 310	0.03 640	0.41 951	0.46 324	I 121	13 O
64 55.1	0.19 422	0.03 467	0.42 152	0.46 540	—	8
65 22.5	0.19 266	0.03 730	0.42 813	0.47 097	I 120	5 W
64 57.5	0.19 286	0.03 618	0.42 015	0.46 376	—	—

[4]) Beobachtungsort der Inklination 49° 47′ 4″ N. B. 9° 55′ 15″ ö. v. G. (Käppele). [5]) Im Jahre 1904 wurde in 49° 58′ 22″ N. B. 9° 8′ 16″ ö. v. G. 110 m Höhe J (1905.0) = 65° 0.′6 gefunden. [6]) Im Jahre 1904 wurde in 50° 8′ 40″ N. B. 11° 3′ 47″ ö. v. G. 265 m Höhe J (1905.0) = 64° 54,9 gefunden.

jeweiligen Beobachtungspunktes in die Karten eintragen kann, so möge folgende Betrachtung dienen. In Bayern entspricht 1″ Breitendifferenz 30.9 m Länge, während für 1″ Längendifferenz die Werte zwischen 20.9 m (bei 47½° Breite) und 19.7 m (in 50½° Breite) liegen, d. h. es entspricht auf den topographischen Karten 1″ gleich 0.6 mm in Breite und 0.4 mm in Länge. Die Eintragung des Beobachtungsortes in die Karten geschah meist im Felde selbst, überdies wurde von jeder Station ein kleiner Situationsplan angefertigt, wobei die Station möglichst auf benachbarte größere Objekte bezogen wurde. Man darf daher annehmen, daß die so abgeleiteten Koordinaten unter Berücksichtigung aller Fehlerquellen, wie Verzeichnung durch die Projektion, Schwinden des Papiers u. dgl. auf 2″ genau sind, was für magnetische Zwecke vollauf genügt, da ja die normale Änderung der magnetischen Elemente innerhalb eines Umkreises von einem Kilometer kleiner als die angestrebte Genauigkeit ist. Es ist daher das spätere Wiederauffinden der magnetischen Stationen auch ohne Zuhülfenahme der angefertigten Croquis mit Hülfe der topographischen Karten jederzeit auf wenige Meter möglich.

Die vorletzte Kolumne der Tabelle II gibt für diejenigen Punkte, an welchen bereits früher Lamont beobachtet hat, den Band und die Seitenzahl von Lamonts Magnetischen Ortsbestimmungen in Bayern. Die übrigen Spalten enthalten gemäß ihren Überschriften die verschiedenen bestimmten magnetischen Elemente.

In der Tabelle sind noch die Punkte Neustadt a. S. und Koburg nach den Beobachtungen von Prof. Edler aufgenommen, welche er 1903 im Auftrage des magnetischen Observatoriums in Potsdam ausführte.[1]) Gleichzeitig mit diesem Herrn habe ich im gleichen Jahre in Königsberg i. F. beobachtet, wobei die gegenseitige Entfernung der beiden Instrumente etwa 100 m betrug. Auf 1901.0 bezogen erhielten wir:

---

[1]) Die Station Schwandorf ist aus der ersten Mitteilung wiederholt, weil dort die Werte durch Druckfehler entstellt sind.

	D	H	J
Edler (Theodolit Hechelmann)	11° 2′	0.19630 Γ	65° 2′
Messerschmitt (Theodolit Tesdorpf)	11° 4′	0.19619 Γ	65 0
Unterschied:	— 2′	+ 11 γ	+ 2′

Die Reduktion der beiderseitigen Messungen fand völlig unabhängig von einander statt; auch benutzte Prof. Edler die Variationen der Registrierungen von Potsdam, während ich die von München verwendete. Es war dies übrigens die erste Station, welche ich mit dem Württemberger Instrumente besuchte. Die Differenz der beiderseitigen Messungen liegt noch innerhalb der Genauigkeitsgrenzen, es dürfen daher die Messungen in Bayern und Preußen wohl aufeinander bezogen werden. Zur größeren Sicherheit soll aber noch eine direkte Vergleichung des neuen Reiseinstrumentes mit den Potsdamer Instrumenten später vorgenommen werden.

Bildet man die Unterschiede der auf den Stationen erhaltenen Beobachtungen gegen die Basisstation München, so erhält man die Werte der Tabelle III, worin die Differenzen der Deklination (ΔD), der Horizontalintensität (ΔH) und der Inklination (ΔJ) im Sinne „Feldbeobachtung minus münchner Beobachtung“ genommen sind. Zum Vergleich sind die von Lamont für 1850 gefundenen Unterschiede beigefügt, welche seinen „Magnetischen Ortsbestimmungen in Bayern“ München 1854 und 1856, entnommen sind. Überdies ist jeweilen die Differenz der beiden Resultate in der dritten Kolumne eingetragen. Dabei ist freilich zu berücksichtigen, daß die Beobachtungsorte nicht immer identisch sind, da eben häufig die alten Orte wegen den seither eingetretenen örtlichen Änderungen nicht mehr benutzt werden können. Im allgemeinen ist aber auch die Entfernung der gleichnamigen Punkte nicht sehr groß, so daß unter normalen Verhältnissen eine Vergleichung unbedenklich gestattet ist. In Störungsgebieten freilich gilt dies nicht mehr. Da übrigens Lamont bei seinen Stationen die genauen Soldnerschen Koordinaten angegeben hat, lassen sie sich da mit Hülfe der Katasterpläne bis auf wenige Zentimeter genau wieder auffinden.

Nr.	Ort	ΔD			ΔH			
		1905	1850	Diff.	1905	1850	Diff.	Diff. + 90
1	Nesselwang	—	[+27]	—	+ 80	[+115]	[— 35]	+ 55
2	Kochel	+ 6.9	+ 3.0	+ 3.9	+ 97	+184	— 87	+ 3
3	Waltenhofen	+37.4	[+35]	[+ 2]	+ 45	[+ 90]	[— 45]	+ 45
4	Penzberg	+ 5.2	[+ 5]	[0]	+ 64	[+120]	[— 56]	+ 34
5	Memmingen	+53.0	+40.6	+12.4	— 133	— 23	—110	— 20
6	Grafing	—	[—12]	—	— 53	[+ 60]	[—113]	— 23
7	München	—	—	—	—	—	—	—
8	Haspelmoor	—	[+14]	—	— 143	[— 70]	[— 73]	+ 17
9	Walpertskirchen	— 3.1	[— 9]	[+ 6]	— 141	[— 10]	[—131]	— 41
10	Senden	—	[+15]	—	— 255	[—170]	[— 85]	+ 5
11	Neufahrn b. Freis.	—	[0]	—	— 126	[— 90]	— 36	+ 54
12	Günzburg	—	+38.2	—	— 295	—212	— 83	+ 7
13	Pfaffenhofen a. I.	+12.8	+ 7.4	+ 5.4	— 232	—180	— 52	+ 38
14	Altdorf (Landshut)	— 9.3	[—11]	[+ 2]	— 240	—135	—105	— 15
15	Straubing	—22.7	—23.5	+ 0.8	— 373	—245	—128	— 38
16	Wasserzell	—	[+18]	—	— 399	[—350]	[— 49]	+ 41
17	Pfünz	+22.8	[+14]	[+ 9]	— 424	[—345]	[— 79]	+ 11
18	Solnhofen	+25.4	[+22]	[+ 3]	— 440	[—360]	[— 80]	+ 10
19	Dinkelsbühl	+38.1	+43.9	— 5.8	— 577	—488	— 89	+ 1
20	Cham	—	—23.2	—	— 579	—378	—201	—110
21	Neumarkt i. O.	+14.6	+12.2	+ 2.4	— 587	—460	—127	— 37
22	Ansbach	+36.5	[+40]	[— 3]	— 630	—550	— 80	+ 10
23	Schwabach	+25.9	+26.4	— 0.5	— 603	—521	— 82	+ 8
24	Schwandorf	—10.2	— 6.2	— 4.0	— 544	—451	— 93	— 3
25	Burgfarnbach	—	[+30]	—	— 705	[—570]	—135	— 45
26	Uffenheim	+51.5	+52.3	— 0.8	— 772	—665	—107	— 17
27	Neustadt a. Aisch	—	[+39]	—	— 742	[—645]	[— 97]	— 7
28	Kleinheubach	+85.0	[+86]	[— 1]	— 978	[—890]	[— 88]	+ 2
29	Neustadt a. W.	— 2.1	— 2.4	+ 0.3	— 680	[—572]	[—108]	— 18
30	Forchheim	+23.7	+28.8	— 5.1	— 787	—678	—109	— 19
31	Kitzingen	+58.0	[+59]	[— 1]	— 837	[—760]	[— 77]	+ 13
32	Würzburg	+55.2	+63.6	— 8.4	— 869	—805	— 64	+ 26
33	Bayreuth	—	+23.7	—	— 871	—749	—122	— 32
34	Aschaffenburg	+82.6	+94.7	—12.1	—1083	—973	—110	— 20
35	Lohr	+51.6	[+78]	[—26]	—1029	[—930]	[— 99]	— 9
36	Oberndorf	+50.9	+56.9	— 6.9	— 999	[—880]	—119	— 29
37	Wunsiedel	— 4.3	— 0.7	— 3.6	— 883	—787	— 96	— 6
38	„	+ 0.7	[— 1]	[+ 2]	— 831	[—780]	[— 51]	+ 39
39	Lichtenfels	+33.5	+35.9	— 2.4	—1003	—860	—143	— 53
40	Hof	— 2.5	[+ 6]	[— 8]	— 924	—920	— 4	+ 86
41	Neustadt a. S.	+50.2	+59.1	— 8.9	—1029	—961	— 68	+ 24
42	Koburg	+31.2	[+35]	[— 4]	—1029	[—902]	[—127]	— 37

Tabelle III.

ΔJ				1905			
1905	1850	Diff.	Diff. − 7,5	ΔX	ΔY	ΔZ	ΔF
—	[— 14]	—	—	—	—	—	—
— 18.4	— 18.4	+ 0.0	— 7	+ 89	+ 58	— 347	— 266
— 18.1	[— 6]	[— 12]	— 19	— 81	+ 653	— 439	— 371
—	[— 18]	—	—	+ 58	+ 42	—	—
+ 5.9	+ 3.2	+ 2.7	— 5	— 212	+ 405	— 89	— 142
+ 2.8	[— 7]	[+ 10]	+ 3	—	—	— —19	— 44
—	—	—	—	—	—	—	—
+ 14.7	[+ 7]	[+ 8]	0	—	—	+ 152	+ 61
—	[0]	—	—	— 135	— 43	—	—
+ 18.1	[+ 20]	[— 2]	— 9	—	—	+ 969	+ 960
+ 22.1	+ 9.3	+ 12,8	+ 5	—	—	+ 406	+ 305
+ 28.2	+ 23.6	+ 4.6	— 3	—	—	+ 234	+ 76
+ 24.1	+ 19.2	+ 4.9	— 3	— 241	+ 28	+ 255	+ 123
+ 22.5	+ 12.6	+ 9.9	+ 2	— 228	— 97	+ 173	+ 44
+ 36.6	+ 23.2	+ 13.4	+ 6	— 352	— 200	+ 329	+ 114
+ 40.1	[+ 36]	[+ 4]	— 4	—	—	+ 400	+ 179
+ 43.3	[+ 36]	[+ 7]	0	— 893	+ 57	+ 446	+ 209
+ 44.3	[+ 36]	[+ 8]	+ 1	— 911	+ 69	+ 444	+ 201
+ 58.2	+ 48.4	+ 9.8	+ 2	— 608	+ 112	+ 587	+ 269
—	+ 40.0	—	—	—	—	—	—
+ 57.0	+ 51.0	[+ 6]	— 1	— 592	— 20	+ 531	+ 215
+ 66.4	+ 60.2	[+ 6]	— 1	— 691	+ 269	— 216	+ 375
+ 60.7	+ 55.9	+ 4.8	— 3	— 621	+ 42	— 335	+ 275
+ 53.1	+ 46.3	+ 6.8	— 1	— 525	+ 155	+ 496	+ 194
+ 69.6	[+ 60]	[+ 10]	+ 3	—	—	+ 651	+ 254
+ 76.3	+ 66.5	[+ 10]	+ 2	— 814	+ 157	+ 741	+ 322
+ 83.5	[+ 59]	[+ 24]	+ 6	—	—	+ 986	+ 549
+ 102.8	[+ 131]	[— 28]	— 35	— 1054	+ 305	+ 1139	+ 595
+ 83.1	+ 66.2	+ 16.9	+ 9	— 666	— 132	+ 1147	+ 730
+ 73.2	[+ 70]	[+ 3]	— 5	— 799	— 4	+ 614	+ 196
+ 88.1	[+ 80]	[+ 8]	0	— 886	+ 181	+ 973	+ 504
+ 90.3	+ 81.5	+ 8.8	+ 1	— 913	+ 159	+ 988	+ 505
+ 93.4	+ 72.2	+ 21.2	+ 14	—	—	+ 1068	+ 576
+ 107.5	+ 103.9	+ 3.6	— 4	— 1154	+ 276	+ 1127	+ 540
+ 104.0	[+ 99]	[— 5]	— 12	— 1066	+ 108	+ 1067	+ 509
+ 102.5	[+ 93]	[+ 9]	+ 2	— 1032	+ 111	+ 1093	+ 546
+ 99.5	+ 87.8	+ 11.7	+ 4	— 854	— 180	+ 1236	+ 724
+ 88.1	[+ 82]	[+ 6]	— 1	— 733	— 127	+ 1168	+ 720
+ 104.7	+ 89.7	+ 15.0	+ 8	— 1021	+ 10	+ 1110	+ 557
+ 104.6	[+ 95]	[+ 10]	+ 2	— 909	— 163	+ 1311	+ 773
+ 132.0	[+ 110]	[+ 22]	+ 4	— 1065	+ 100	+ 1972	+ 1330
+ 107.0	(+ 97)	[+ 10]	+ 3	— 1045	+ 12	+ 1174	+ 609

Die vier letzten Reihen der Tabelle III enthalten noch die entsprechenden Differenzen der Komponenten und der Totalintensität gegen den Basispunkt München.

Für diejenigen Orte, an welchen Lamont nicht beobachtet hat, sind die Vergleichswerte seinem Atlas (Magnetische Karten von Deutschland und Bayern. München 1854) entnommen worden. Die so erhaltenen Zahlen sind durch Einklammern kenntlich gemacht.

Die Differenzen zwischen den neuen und alten Messungen enthalten, abgesehen von den eigentlichen Unsicherheiten der Beobachtungen selbst, die konstanten Fehler der Reiseinstrumente der absoluten Messungen und der Unterschiede in den Säkularvariationen zwischen der Basisstation (München) und den Feldstationen.

Betrachtet man zunächst die Deklinationsdifferenzen, so erkennt man sogleich einen Gang in der Größe und im Vorzeichen derselben. Dieser Gang hängt von der Entfernung der Station von der Basisstation und von der Himmelsrichtung ab, er kann daher als Funktion der geographischen Koordinaten dargestellt werden. Schon eine einfache lineare Funktion von der Form

$$\text{Diff.} = a \cdot (B_s - B_m) + b\,(L_s - L_m)$$

gibt ein gutes Resultat. In dieser Formel sind B_s und B_m die Breiten der Station bzw. von München und L_s und L_m die entsprechenden Längen; a und b sind zwei noch zu bestimmende Konstanten. Würde man dieser Formel noch ein konstantes Glied anfügen, so würde dieses die Summe der allfällig vorhandenen Instrumentalkorrektionen darstellen. Man erkennt aber auch ohne eigentliche Rechnung, daß dieselben recht klein sind und noch innerhalb der Beobachtungsgenauigkeit liegen müssen, so daß also die Unterschiede ganz von der Verschiedenheit der Säkularvariationen zwischen der Station und München herrühren. Sie können daher zum Verschwinden gebracht werden, wenn man die betreffenden jährlichen Änderungen der Abnahme in der westlichen Deklination berücksichtigt. Um einen Überschlag über die zu erwartenden Größen zu haben,

habe ich aus obiger Formel die a und b berechnet, indem ich 20 möglichst ungestörte und gleichmäßig über das ganze Gebiet verteilte Stationen berücksichtigte. Die betreffenden Werte sind:

$$\text{Diff.} = 4.105\ \Delta B + 9.636\ \Delta L$$

worin die ΔB, Breitendifferenzen, und ΔL, Längendifferenzen gegen München, in Graden ausgedrückt sind. Mit diesem Ausdruck sind die folgenden das Messungsgebiet umspannenden Werte berechnet, welche also die Differenzen der Säkularvariationen der Deklination gegenüber der in München beobachteten Säkularvariationen vorstellen. Das negative Zeichen bedeutet, daß die jährliche Abnahme der westlichen Deklination größer, das positive, daß sie kleiner als in München ist. — Man würde noch eine bessere Übereinstimmung erhalten, wenn man noch die quadratischen Glieder einführen würde; für den zunächst vorliegenden Zweck genügen die so erhaltenen Zahlen.

ΔB \ ΔL	-2^0	-1^0	0^0	$+1^0$
$+2^0$	$-0'.200$	$-0'.025$	$+0'.150$	$+0'.324$
$+1^0$	-0.276	-0.100	$+0.075$	$+0.249$
0	-0.351	-0.175	0.000	$+0.175$
-1^0	-0.425	-0.249	-0.074	$+0.100$

Beispielsweise genügt es, die Säkularvariation in Unterfranken um 0'.1 bis 0'.2 größer anzunehmen, als in München, damit die vorhandenen Unterschiede verschwinden. Es hat also das System der Isogonen außer einer Parallelverschiebung gleichzeitig eine Drehung erlitten, ein Resultat, das auch mit anderen Erfahrungen übereinstimmt. Im Durchschnitt sind die Unterschiede in den Säkularvariationen, wie nicht anders zu erwarten, recht gering, da eben das untersuchte Gebiet räumlich noch recht klein ist. Einige Abweichungen aber, die die Unsicherheit der Messungen überschreiten, dürften wohl daher rühren, daß die Säkularvariationen in Störungsgebieten etwas anderen

Gesetzen folgen als in ungestörten und in Bayern nehmen gerade diese Gebiete eine bedeutende Ausdehnung ein.

Zunächst ist das Riesgebiet zu nennen, das ja in jüngster Zeit eingehend magnetisch untersucht worden ist. Nach den hier vorliegenden Messungen und denjenigen von Lamont dehnt sich aber dieses Störungsgebiet noch weiter nach Osten aus und zwar umfaßt es das ganze Juragebiet. Besonders drängen sich in der Gegend bei Ingolstadt die Isogonen recht eng zusammen, was man auf Tafel VII deutlich sehen kann. Ein weiteres bemerkenswertes Störungsgebiet hat schon Lamont näher studiert; es ist dies der Bayerische Wald und insbesondere die Umgebung von Passau. Aber auch die anderen Gebirge, wie die Alpen, der Spessart und die Rhön sind magnetisch gestört. In der Rhön besonders ist es der Basalt, der die normale Verteilung im Erdmagnetismus stark beeinflußt. Wie weit dieser Einfluß gehen kann, hat Böhmländer für den Wachtküppel in der Rhön gezeigt.[1])

Aber schon aus den magnetischen Ortsbestimmungen Lamonts und den daraus konstruierten Karten der magnetischen Elemente kann man die Störungsgebiete erkennen. Die Lamontschen Karten enthalten die „wahren isomagnetischen Linien,“ bei welchen sich also die Zeichnung möglichst den Beobachtungen anschmiegt. Leitet man daraus mittlere Werte, die sogenannten „terrestrischen isomagnetischen Linien,“ was am einfachsten graphisch geschieht, ab, so geben die Unterschiede zwischen beiden Systemen einen Aufschluß über die vorhandenen Lokalablenkungen. Auf diese Weise habe ich die in der nachstehenden Tabelle enthaltenen Deklinationsdifferenzen im Sinne „wahrer minus terrestrischer Wert“ aus den Lamontschen Beobachtungen abgeleitet:

---

[1]) K. G. Böhmländer, Verlauf der Isogonen auf dem Wachtküppel. Dissertation. München 1899.

Störungen in Deklination.

Länge ö. v. Ferro / Breite	25°0	25°5	26°0	26°5	27°0	27°5	28°0	28°5	29°0	29°5	30°0	30°5	31°0
50° 30′						+5′	+3′						
15						+4	+1						
0				+1′	+7′	+1	+1	+1′	+6′	+5′	0′		
49 45	+1′	0′	−7′		+4	+1	+1	−1	+5	+2	0		
30	−1	−2	−5				0	+1	+4	0	+3	0′	
15	−2	0	+2				+1	+3	0	−4	−3	+2	
0	−2	+2	−3				+1	0	+3	−1	+2	+4	−2′
48 45							−3	0	0	0	−3	+5	−3
30							−3	−1	+1	+1	+3	+7	+6
15							−3	0	+2	+1	+1	+4	+8
0						−1	−1	0	+2	0	−4	+4	+9
47 45						−1	−2	−1	0	−5	−6	−4	+10
30					+4	−2	−2	−2	−2	−6	−6	+6	

In dieser Tabelle ist das untersuchte Gebiet in kleine Trapeze von 15′ Breitendifferenz und 30′ Längendifferenz eingeteilt und für die Schnittpunkte die Unterschiede der beiden Deklinationssysteme eingetragen. Man erkennt sofort die systematische Verteilung in den Vorzeichen, so daß die einzelnen Störungsgebiete deutlich hervortreten.

Die Vergleichung der neuen Beobachtungen der Horizontalintensität mit den Lamontschen ergibt nun zunächst einen konstanten Unterschied, der im Mittel aus sämtlichen Beobachtungen — 90 γ (Einheiten der fünften Dezimalstelle in H) beträgt. Die Beobachtungen des Jahres 1903 (siehe diese Berichte Bd. 35, 1905, Seite 82) ergaben fast genau den gleichen Betrag, nämlich — 87. Die Differenz stellt die Summe der Instrumentalkorrektionen der beiderseitigen Messungen dar. Der größere Teil davon muß den Lamontschen Messungen zugeteilt werden, da der nämliche Unterschied auch aus den Vergleichungen mit den von Edler ausgeführten Messungen, die von Potsdam aus bearbeitet wurden (z. B. Neustadt a. S.

und Koburg), folgt. Auch die in Württemberg angestellten Beobachtungen geben das nämliche Resultat. Ein kleinerer Teil des Unterschiedes ist dem neuen Instrumente zuzuschreiben, da ja bekanntlich alle magnetischen Messungen mit gewissen konstanten, den Instrumenten eigentümlichen Fehlern behaftet sind. Es wurde daher auch auf der letzten Konferenz der Internationalen Magnetischen Vereinigung in Innsbruck eine systematische Durchführung von Vergleichungen zwischen den Normalinstrumenten der verschiedenen Observatorien beschlossen.[1])

Fügt man allen Differenzen der ΔH (1905—1850) die Konstante 90 hinzu, so erkennt man wiederum einen systematischen Gang in den übrigbleibenden Zahlen, der von dem Unterschiede der säkularen Variationen zwischen den Feldstationen und München herrührt. Es genügt anzunehmen, daß beispielsweise die jährliche Zunahme der Horizontalintensität in der Gegend des Bodensees um 1 γ jährlich größer und in Franken etwa 1 γ kleiner als in München ist, um die vorhandenen Unterschiede zu verringern. Es hat also ebenso wie bei der Deklination das System der Isodynamen der Horizontalintensität außer einer Verschiebung eine geringe Drehung erlitten. Die mathematische Darstellung dieser Änderung als Funktion der geographischen Koordinaten soll jedoch erst später, wenn die neuen Messungen weiter vorgeschritten sind, vorgenommen werden, weil dann auch die Orte mit größeren Störungen besser eliminiert werden können.

Die magnetischen Störungsgebiete treten im Verlauf der Isodynamen der Horizontalintensität noch deutlicher hervor als bei den Isogonen. Insbesondere im mittleren Teile des Jura finden starke Abweichungen von der normalen Verteilung statt. Die Beobachtungen in Pfünz, Eichstätt, Solnhofen liefern alle eine viel zu kleine Horizontalintensität. Bei Ingolstadt hat bereits Lamont eine solche Anomalie gefunden. Diese Beob-

[1]) Messerschmitt, Bericht über die internationale Konferenz für Erdmagnetismus und Luftelektrizität zu Innsbruck 1905. Terrestrial Magnetism., 10. Jahrgang 1905, S. 195.

achtung hat später C. Orff[1]) auf Lamonts Veranlassung gelegentlich astronomisch-geodätischer Messungen mit dem Lamontschen Reisetheodoliten kontrolliert und bestätigt gefunden. Der Standpunkt Lamonts lag etwa 1 km westlicher als derjenige von Orff und zwar beobachtete in Soldnerschen Koordinaten (bayer. Ruten) ausgedrückt:

	X	Y
Lamont	+ 24 172,	+ 3850
Orff	+ 24 154,	+ 3492.

Es kann also die gefundene Anomalie nicht auf ein Versehen oder begrenzt lokale Ursache zurückgeführt werden. Die gefundenen Differenzen der magnetischen Elemente gegen München sind:

	Lamont 1850	Orff 1874/75
ΔD	$+6.'0$	$+16.'3$
ΔH	$-431\,\gamma$	$-452\,\gamma$
ΔJ	$+39.'0$	$+49.'0$

Um einen sicheren Anhaltspunkt über die Störungsgebiete zu haben, wurden für die Horizontalintensität in der gleichen Weise wie für die Deklination die Unterschiede zwischen den wahren und den terrestrischen isomagnetischen Linie ermittelt, welche in der beistehenden Tabelle enthalten sind. Die bereits angeführten Störungsgebiete treten hier noch deutlicher wie bei der Deklination hervor und bildet daher diese Zusammenstellung einen guten Anhalt über die weiterhin vorzunehmenden Untersuchungen. (Vgl. auch Tafel VII.)

[1]) C. von Orff, Astronomisch-geodätische Ortsbestimmungen in Bayern. München 1880, Anhang. Magnetische Messungen zu Ingolstadt und auf der Wülzburg (Seite 143—164). Für Wülzburg findet Orff: $\Delta D = +25.'3$; $\Delta H = -430\,\gamma$ und $\Delta J = +55.'1$, welche Werte gut mit den Lamontschen Karten harmonieren.

Störungen der Horizontalintensität in Einheiten der fünften Dezimale.

Breite \ Länge ö. v. Ferro	25°0	25°5	26°0	26°5	27°0	27°5	28°0	28°5	29°0	29°5	30°0	30°5	31°0
50° 30′						−40′	−50						
15						0	+10						
0				−5′	−50	+15	+20	0′	−35′	−20′	−15′		
49 45	+20′	+30′	−10′		−20	+10	+10	+10	0	0	−20		
30	+30	+20	−20				+15	+35	+40	0	−40	−40	
15	+30	+50	+20				+10	+30	+20	−10	20	−20	
0	+60	+100	+30				−15	−10	−20	−10	−10	−40	−20
48 45							+40	0	−50	−30	−20	−30	−60
30							+20	−10	−20	−10	−20	−40	0
15							+20	−10	0	−10	−40	−50	−10
48 0						+40	+20	0	0	0	−25	−70	−50
47 45						+10	−10	+10	0	+10	−10	−40	0
30					+20	+15	+10	0	−10	0	0	+40	

Die Inklination wurde von mir mit einem Nadelinklinatorium gemessen, während Lamont sie aus der Induktionswirkung des Erdmagnetismus auf weiche Eisenstäbe ableitete. Wie nun Lamont schon selbst fand, traten namentlich in den späteren Jahren bei seinen Eisenstäben Anomalien auf, die die Inklinationsmessungen in nicht sicher kontrollierbarer Weise beeinflußten (Bd. II, Seite 22). Betrachtet man jedoch die Unterschiede der neuen und der alten Inklinationsmessungen in Tabelle III, wobei übrigens meist Stationen aus der ersten Zeit von Lamonts Beobachtungen in Frage kommen, so findet eine recht befriedigende Übereinstimmung statt. Zunächst erhält man, ähnlich wie bei der Horizontalintensität, einen konstanten Unterschied, der im Mittel + 7′5 beträgt.[1]) Bei den 1903 beobachteten

[1]) Dieser Unterschied bildet nichts Auffälliges, indem selbst bei neueren Instrumenten noch Differenzen von derselben Größenordnung vorkommen. So fand z. B. van Rijkevorsel (Comparaison of the instruments for absolute magnetic measurements. Royal. Meteorol. Inst. of the Netherlands, 1897, 98 und 99) noch Unterschiede in den Inklinations-

Inklinationen (1. Mitteilung, Seite 83) beträgt diese Differenz + 9′.5, was eine befriedigende Übereinstimmung genannt werden darf. Es ist also die Reduktionskonstante zwischen beiden Reihen 8′, um welchen Betrag die Lamontschen Inklinationen gegenüber den meinigen zu klein sind. Bringt man diese konstante Reduktion an sämtliche Differenzen an, so erhält man wieder die Unterschiede in den jährlichen Variationen der Inklination zwischen dem Basispunkt München und den Feldstationen. Auch hier ist, wenn auch weniger sicher als bei den anderen Elementen, eine Verdrehung der Isoklinen angedeutet, ein Beweis dafür, daß die Lamontschen Beobachtungen besser sind, als nach den bemerkten Anomalien der weichen Eisenstäbe zu befürchten war.

Störungen der Inklination.

Breite \ Länge ö. v. Greenw.	25°.0	25°.5	26°.0	26°.5	27°.0	27°.5	28°.0	28°.5	29°.0	29°.5	30°.0	30°.5	31°.0
50° 30′						+ 1′	+ 1′						
15						− 3	− 5						
0				+ 2′	− 2′	− 6	− 9	− 7′	− 6′	− 2′	− 1′		
49 45	− 1′	+ 2′	+ 5′		− 5	− 7	− 7	− 7	− 7	− 3	0		
30	+ 5	− 1	+ 2				− 9	− 9	− 7	0	− 1	− 2′	
15	− 6	− 2	3				− 7	− 6	− 4	− 1	− 2	− 1	
0	− 8	+ 3	+ 6				− 5	− 7	0	+ 1	− 2	− 2	− 2′
48 45							− 4	− 3	0	+ 1	+ 1	0	−10
30							− 3	− 1	0	+ 1	0	− 1	−11
15							− 1	0	+ 1	+ 2	+ 3	+ 1	− 3
0						+ 2	0	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 6	+ 4
47 45						+ 2	+ 1	0	0	0	+ 4	+ 8	+ 3
30					+ 1	+ 1	0	− 1	− 1	− 1	+ 3	+ 5	

bestimmungen zwischen den absoluten Messungen verschiedener Observatorien, die bis 8′ gingen. In Potsdam beträgt der Unterschied zwischen dem Erdinduktor und dem Bambergschen Inklinatorium 7′.5. — Bei den anderen Elementen sind die Unterschiede nach Rijkevorsel kleiner, doch gehen sie bei der Deklination noch bis 1′ und bei der Horizontalintensität bit 20 γ. Einmal wurde sogar für Wilhelmshaven 43 γ gefunden.

Ich habe daher auch für dieses Element die Unterschiede zwischen den wahren und terrestrischen Isoklinen gebildet und in der beistehenden Tabelle vereinigt. Diese Zusammenstellung läßt die gleichen Anomalien wie die beiden anderen Elemente erkennen.

Die im vorstehenden aus den Beobachtungen selbst abgeleiteten Normalwerte, die sog. terrestrischen isomagnetischen Linien, sind zwar für die Untersuchung der lokalen Störungsgebiete sehr brauchbar, haben aber natürlich nur beschränkte Gültigkeit, da sie nicht unabhängig von den regionalen Störungen sind. Es erscheint daher angebracht, die gewonnenen Messungsergebnisse auch mit den Elementen zu vergleichen, die nach der Theorie aus einem großen, die ganze Erde umspannenden Materiale abgeleitet sind.

Gauß hat zuerst aus den damals bekannten Messungen das erdmagnetische Potential abgeleitet. Die seither erweiterten und verbesserten Beobachtungen haben denn auch mehrfach Veranlassung gegeben, diese Rechnung zu wiederholen. Von diesen wählte ich das von Ad. Schmidt berechnete System, das sich auf das Jahr 1885,0 bezieht.[1]) Dabei beschränkte ich mich auf die Vergleichung der drei rechtwinkligen Koordinaten X, Y und Z. Zur Erleichterung der Rechnung habe ich für das ganze Gebiet zwischen 47° und 51° nördlicher Breite und 9° bis 14° östlicher Länge von Greenwich besondere Tabellen berechnet, in welchen das Intervall in Länge und Breite von 10′ zu 10′ fortschreitet, so daß daraus rasch durch einfaches Interpolieren die theoretischen Werte entnommen werden können. Die so erhaltenen Werte sind in der Tabelle IV zusammen-

---

[1]) Schmidt Adolf, Mitteilungen über eine neue Berechnung des erdmagnetischen Potentials. Abhandlungen der Bayer. Akad. d. Wiss., math.-phys. Kl., XIX. Bd., I. Abt., 1895. — Derselbe, Der magnetische Zustand der Erde zur Epoche 1885,0. Aus dem Archiv der deutschen Seewarte, XXI. Jahrgang, Nr. 2, 1898. — Derselbe, Über die Darstellung der Ergebnisse erdmagnetischer Beobachtungen im Anschluß an die Theorie. Ann. der Hydrogr. u. Marit. Meteorologie, XXVI, Januar 1898.

gestellt, welche neben den berechneten (R) die aus den Beobachtungen (B) abgeleiteten Komponenten nebst deren Unterschieden im Sinne „Beobachtung minus Rechnung“ enthält. Zugleich ist diese Tabelle an der nördlichen und westlichen Grenze von Bayern durch einige benachbarte Messungen in Preußen und Württemberg ergänzt. Bei diesen Differenzen ist zunächst zu beachten, daß sich die theoretischen Elemente auf die Epoche 1885,0 beziehen, während die von mir beobachteten Werte auf die mittlere Beobachtungszeit, nämlich 1905,0, reduziert sind. Der Unterschied der Epochen entspricht jedoch in unserem Falle, wie bereits gezeigt wurde, wegen der geringen Ausdehnung des untersuchten Gebietes, näherungsweise einer Konstanten. Es ist daher der Unterschied für den vorliegenden Zweck ohne Bedeutung; wollte man jedoch die beiderseitigen Systeme aufeinander reduzieren, so müßte zuerst eine eingehende Untersuchung der säkularen Variationen vorangehen, welche zu ermitteln ja auch eine der Aufgaben ist, die unsere magnetische Landesaufnahme lösen soll.

Würde der Verlauf der magnetischen Elemente genau der Theorie entsprechen, so müßten, bis auf kleine Reste, die von der Verschiedenheit der säkularen Variationen herrühren, sämtliche Differenzen ($B-R$) eines jeden Elementes innerhalb der Unsicherheit der Beobachtungen übereinstimmen. Wie die Tabelle jedoch lehrt, ist dies nicht der Fall, sondern es finden noch ziemlich große Unterschiede statt, die sich teilweise in Gruppen vereinigen lassen. Diese Unterschiede zeigen eben, wie es auch bei anderen geophysikalischen Elementen der Fall ist. an, daß einesteils die Theorie noch zu vervollkommnen ist, andererseits aber neben den lokalen auch regionale Störungsgebiete vorhanden sind.

Ort	Breite	Länge östl. von Greenw.	X_B	X_R
Lindau	47° 34.'0	9° 40.'3	0.20 341	0.19 797
Berchtesgaden	47 37.4	13 0.1	0.20 579	0.20 100
Oberdorf	47 38.0	9 35.9	0.20 295	0.19 789
Kochel	47 39.6	11 21.9	0.20 420	0.19 878
Waltenhofen	47 39.9	10 18.5	0.20 250	0.19 740
Großholzleute	47 40.6	10 6.8	0.20 303	0.19 839
Riedhausen	47 41.1	11 12.0	0.20 423	0.19 846
Reichenhall	47 43.3	12 52.4	0.20 517	0.20 041
Penzberg	47 44.8	11 22.4	0.20 389	0.19 846
Tölz	47 46.2	11 34.5	0.20 423	0.19 858
Memmingen	47 47.3	10 10.5	0.20 119	0.19 671
Reichenhofen	47 51.2	10 0.2	0.20 233	0.19 621
Traunstein	47 52.4	12 37.8	0.20 426	0.19 946
Landsberg	48 3.0	10 53.4	0.20 239	0.19 653
Reinstetten	48 6.0	9 58.6	0.20 121	0.19 515
München	48 8.8	11 36.5	0.20 331	0.19 704
Walpertskirchen	48 15.9	11 58.5	0.20 196	0.19 700
Göggingen	48 20.3	9 57.5	0.20 031	0.19 414
Olbeck	48 30.0	10 4.0	0.20 068	0.19 361
Pfaffenhofen	48 32.0	11 32.0	0.20 090	0.19 534
Sontheim	48 32.6	10 18.1	0.19 971	0.19 374
Landshut	48 33.6	12 7.5	0.20 103	0.19 595
Dillingen	48 34.7	10 29.1	0.19 983	0.19 384
Herbrechtingen	48 38.1	10 10.8	0.19 919	0.19 321
Schwenningen	48 39.4	10 38.3	0.19 950	0.19 370
Schnaitheim	48 42.7	10 10.4	0.19 769	0.19 289
Donauwörth	48 43.1	10 47.5	0.19 939	0.19 365
Schaching	48 50.4	12 56.9	0.20 009	0.19 580
Nördlingen	48 50.9	10 28.9	0.19 786	0.19 273
Straubing	48 52.3	12 34.4	0.19 979	0.19 522
Pfünz	48 53.2	11 15.9	0.19 438	0.19 353
Solnhofen	48 53.5	10 59.9	0.19 420	0.19 319
Geislingen	48 56.3	10 26.2	0.19 794	0.19 230
Rindelbach	48 59.7	10 10.7	0.19 744	0.19 172
Regensburg	49 0.3	12 5.7	0.19 920	0.19 407

Tabelle IV.

Y_B	Y_R	Z_B	Z_R	X_B-X_R	Y_B-Y_R	Z_B-Z_R
				γ	γ	γ
— 0.03 914	— 0.04 352	0.40 646	0.41 289	+ 544	+ 438	— 643
— 0.03 402	— 0.03 722	40 698	41 194	+ 479	+ 320	— 496
— 0.03 979	— 0.04 363	40 598	41 330	+ 506	+ 384	— 732
— 0.03 688	— 0.04 038	40 402	41 273	+ 542	+ 350	— 871
— 0.04 283	— 0.04 228	—	41 324	+ 510	— 55	—
— 0.03 899	— 0.04 264	40 536	41 333	+ 464	+ 365	— 797
— 0.03 710	— 0.04 060	40 655	41 343	+ 577	+ 350	— 688
— 0.03 432	— 0.03 739	40 705	41 256	+ 476	+ 307	— 551
— 0.03 672	— 0.04 022	—	41 323	+ 543	+ 350	—
— 0.03 609	— 0.03 983	40 702	41 330	+ 565	+ 374	— 628
— 0.04 035	— 0.04 245	40 752	41 396	+ 448	+ 210	— 644
— 0.03 889	— 0.04 373	40 725	41 440	+ 612	+ 484	— 715
— 0.03 598	— 0.03 776	40 719	41 352	+ 480	+ 178	— 633
— 0.03 788	— 0.04 093	40 788	41 516	+ 586	+ 305	— 728
— 0.03 878	— 0.04 276	40 816	41 582	+ 606	+ 398	— 746
— 0.03 630	— 0.03 952	40 841	41 546	+ 627	+ 322	— 705
— 0.03 587	— 0.03 886	—	41 600	+ 496	+ 299	—
— 0.03 874	— 0.04 251	40 957	41 717	+ 617	+ 377	— 760
— 0.03 905	— 0.04 220	41 136	41 803	+ 707	+ 315	— 667
— 0.03 658	— 0.03 941	41 002	41 766	+ 556	+ 283	— 764
— 0.03 820	— 0.04 173	41 002	41 817	+ 597	+ 353	— 815
— 0.03 533	— 0.03 832	41 014	41 762	+ 508	+ 299	— 748
— 0.03 782	— 0.04 136	41 049	41 832	+ 599	+ 354	— 783
— 0.03 890	— 0.04 192	41 265	41 873	+ 598	+ 302	— 608
— 0.03 769	— 0.04 103	41 094	41 767	+ 580	+ 334	— 673
— 0.03 796	— 0.04 188	41 154	41 913	+ 480	+ 392	— 759
— 0.03 722	— 0.03 996	41 144	41 895	+ 574	+ 274	— 751
— 0.03 734	— 0.03 650	41 086	41 893	+ 429	— 84	— 807
— 0.03 753	— 0.04 121	41 338	41 984	+ 513	+ 368	— 646
— 0.03 431	— 0.03 719	41 170	41 922	+ 457	+ 288	— 752
— 0.03 687	— 0.03 969	41 287	41 972	+ 85	+ 282	— 685
— 0.03 699	— 0.04 011	41 285	41 984	+ 101	+ 312	— 699
— 0.03 759	— 0.04 124	41 220	42 030	+ 564	+ 365	— 810
— 0.03 796	— 0.04 170	41 300	42 070	+ 572	+ 374	— 770
— 0.03 504	— 0.03 803	41 278	42 010	+ 513	+ 299	— 732

Ort	Breite	Länge östl. von Greenw.	X_B	X_R
Zwiesel	49° 1.'3	13° 13.'2	0.20 084	0.19 536
Dinkelsbühl	49 4.3	10 20.6	0.19 723	0.19 162
Crailsheim	49 8.2	10 6.0	0.19 704	0.19 105
Neumarkt i. O.	49 16.3	11 28.5	0.19 739	0.19 222
Ansbach	49 18.6	10 34.7	0.19 671	0.19 094
Schwabach	49 19.4	11 1.7	0.19 710	0.19 144
Schwandorf	49 19.5	12 6.1	0.19 806	0.19 250
Leuzendorf	49 20.3	10 5.7	0.19 622	0.18 998
Frauenthal	49 30.5	10 5.6	0.19 553	0.18 954
Uffenheim	49 32.8	10 13.4	0.19 517	0.18 955
Kleinheubach	49 43.3	9 12.2	0.19 277	0.18 755
Neustadt a. W.	49 43.4	12 10.5	0.19 665	0.19 122
Forchheim	49 43.7	11 3.9	0.19 532	0.18 986
Kitzingen	49 44.0	10 9.1	0.19 445	0.18 870
Würzburg	49 46.4	9 57.5	0.19 418	0.18 831
Bamberg	49 53.2	10 51.7	0.19 439	0.18 896
Aschaffenburg	49 58.4	9 10.8	0.19 177	0.18 778
Lohr	50 0.6	9 34.6	0.19 265	0.18 687
Oberndorf b. Schweinf.	50 2.3	10 12.6	0.19 299	0.18 762
Wunsiedel	50 1.9	12 0.0	0.19 477	0.18 969
"	50 2.5	12 0.8	0.19 598	0.18 975
Königsberg i. F.	50 4.9	10 32.6	0.19 297	0.18 780
Lichtenfels	50 8.6	11 4.1	0.19 310	0.18 818
Koburg	50 17	10 58	0.19 286	0.18 749
Hof	50 18.3	11 53.4	0.19 422	0.18 852
Neustadt a. S.	50 21	10 15	0.19 266	0.18 702

Tabelle IV (Fortsetzung).

Y_B	Y_R	Z_B	Z_R	X_B-X_R	Y_B-Y_R	Z_B-Z_R
				γ	γ	γ
— 0.03 344	— 0.03 586	0.41 277	0.41 987	+ 538	+ 242	— 710
— 0.03 742	— 0.03 942	41 428	42 105	+ 561	+ 200	— 677
— 0.03 795	— 0.04 176	41 309	42 149	+ 599	+ 381	— 840
— 0.03 610	— 0.03 904	41 372	42 174	+ 517	+ 294	— 802
— 0.03 725	— 0.03 882	40 625	42 223	+ 580	+ 157	— 1598
— 0.03 672	— 0.03 987	40 506	42 218	+ 566	+ 315	— 1712
— 0.03 475	— 0.03 780	41 300	42 185	+ 556	+ 305	— 885
— 0.03 794	— 0.04 165	41 416	42 257	+ 624	+ 371	— 841
— 0.03 815	— 0.04 154	41 517	42 348	+ 599	+ 339	— 831
— 0.03 787	— 0.03 935	41 582	42 364	+ 562	+ 178	— 782
— 0.03 935	— 0.04 312	41 980	42 493	+ 522	+ 377	— 513
— 0.03 498	— 0.03 741	41 988	42 393	+ 543	+ 243	— 405
— 0.03 626	— 0.03 955	41 455	42 432	+ 546	+ 329	— 977
— 0.03 811	— 0.03 938	41 814	42 463	+ 575	+ 127	— 649
— 0.03 789	— 0.04 165	41 829	42 492	+ 587	+ 376	— 663
— 0.03 610	— 0.03 985	41 852	42 521	+ 543	+ 375	— 669
— 0.03 906	— 0.04 302	41 968	42 625	+ 399	+ 396	— 657
— 0.03 738	— 0.04 223	41 908	42 629	+ 578	+ 485	— 721
— 0.03 741	— 0.04 101	41 934	42 621	+ 537	+ 360	— 687
— 0.03 450	— 0.03 753	42 077	42 564	+ 508	+ 303	— 487
— 0.03 503	— 0.03 755	42 009	42 568	+ 623	+ 252	— 559
— 0.03 666	— 0.04 033	41 868	42 632	+ 517	+ 369	— 764
— 0.03 640	— 0.03 929	41 951	42 649	+ 492	+ 289	— 698
— 0.03 618	— 0.03 941	42 015	42 724	+ 537	+ 323	— 709
— 0.03 467	— 0.03 762	42 152	42 622	+ 570	+ 195	— 470
— 0.03 730	— 0.04 074	42 813	42 788	+ 564	+ 344	+ 25

Die vorstehenden Betrachtungen lassen also zunächst erkennen, daß der neue magnetische Reisetheodolit den Anforderungen, welche man an solche Instrumente stellen muß, völlig Genüge leistet, so daß damit die Deklination und Inklination auf mindestens $\pm 1'$ und die Horizontalintensität auf $\pm 10\,\gamma$ erhalten werden kann, eine Genauigkeit, die auch durchgehend erreicht worden ist.

Für die Aufnahmen im Feld dienten die Registrierungen des Münchener Observatoriums als Ausgangspunkt. Die Zusammenstellung der für München gültigen Elemente in den letzten Jahren zeigt, daß die Abnahme der westlichen Deklination jetzt durchschnittlich nicht ganz 5′ beträgt, also kleiner geworden ist als die Variation im Mittel aus dem letzten halben Jahrhundert. Die Variation der Horizontalintensität hat sich noch mehr geändert, indem sie in den letzten Jahren fast ganz verschwunden ist, während noch vor wenigen Jahren eine beträchtliche Zunahme vorhanden war. Auch die Inklination nimmt jetzt nur sehr wenig ab. Ein Vergleich dieses Verhaltens der magnetischen Elemente in München mit demjenigen an den benachbarten Observatorien, insbesondere von Pola und Potsdam, bestätigen dieses Resultat. Diese Änderungen in den jährlichen Variationen rühren zum Teil daher, daß der Erdmagnetismus, parallel der Sonnenfleckentätigkeit, sich jetzt in einer Periode größerer Unruhe befindet, zu welchen Zeiten beispielsweise für die Horizontalintensität die Tendenz zur Abnahme besteht. Zum anderen Teil beruht aber auch die Abnahme der Variationen in Vorgängen säkularer Natur.

Die neuen Messungen sind über das ganze Königreich ziemlich gleichmäßig verteilt. Die mittlere Entfernung der einzelnen Punkte beträgt 40 km, genügt also vollständig, um den normalen Verlauf der magnetischen Elemente ableiten zu können. In einigen Gegenden sind sogar die Stationen schon etwas dichter genommen worden, um über die daselbst vermuteten Störungen einigen Anhalt zu bekommen. Dagegen wurden die beiden großen Störungsgebiete im Ries und im Bayerischen Wald nahe ganz gemieden, da das erstere Gebiet bereits neuerdings eingehend

studiert, letzteres aber, soweit es nötig, im Zusammenhang untersucht werden soll.

Um die bayerischen Messungen mit denjenigen der benachbarten Staaten sicher vergleichbar zu machen, sind bereits mit den preußischen Beobachtern Anschlußmessungen ausgeführt worden; einige weitere Anschlüsse sind noch in Aussicht genommen.

Von ganz besonderer Bedeutung werden die neuen Messungen durch einen Vergleich mit den vor 50 Jahren durch Lamont ausgeführten magnetischen Ortsbestimmungen. Da das Netz von Lamont etwa nochmal so dicht war als das neue, so können daraus allein bereits manche wichtige Schlüsse gezogen werden, wenn es sich herausstellt, daß diese Messungen den entsprechenden Grad der Genauigkeit erreichen. In der Tat bestätigen nun die Vergleichungen der beiderseitigen Messungen die große Genauigkeit, welche bereits Lamont bei seinen Beobachtungen erhalten hat. Bei der Horizontalintensität und der Inklination lassen sich zunächst konstante Unterschiede zwischen dem neuen und alten System ableiten, die hauptsächlich die Instrumentalkorrektionen des Lamontschen Reisetheodoliten darstellen und nichts Auffälliges bieten; wegen der Sicherheit aber, mit der sie aus den Vergleichungen bestimmt werden können, das beste Zeugnis für die Güte der Beobachtungen selbst liefern. Die Deklinationsvergleichung gibt keinen Unterschied, so daß also innerhalb des Genauigkeitsgrades beider Reihen die Deklinationssysteme gleich sind.

Obwohl nun das untersuchte Gebiet eine verhältnismäßig kleine Fläche der Erde umspannt, erkennt man doch nach Berücksichtigung der konstanten Abweichungen deutlich, daß alle magnetischen Linien in den letzten 50 Jahren nicht nur eine Parallelverschiebung sondern auch eine kleine Drehung erlitten haben. Man kann daher die Verschiedenheit der säkularen Variationen bereits recht genau berechnen.

Bekanntlich hat Lamont die Inklination aus dem in weiches Eisen induzierten Magnetismus abgeleitet. Er fand dabei in den späteren Jahren Anomalien, indem offenbar das

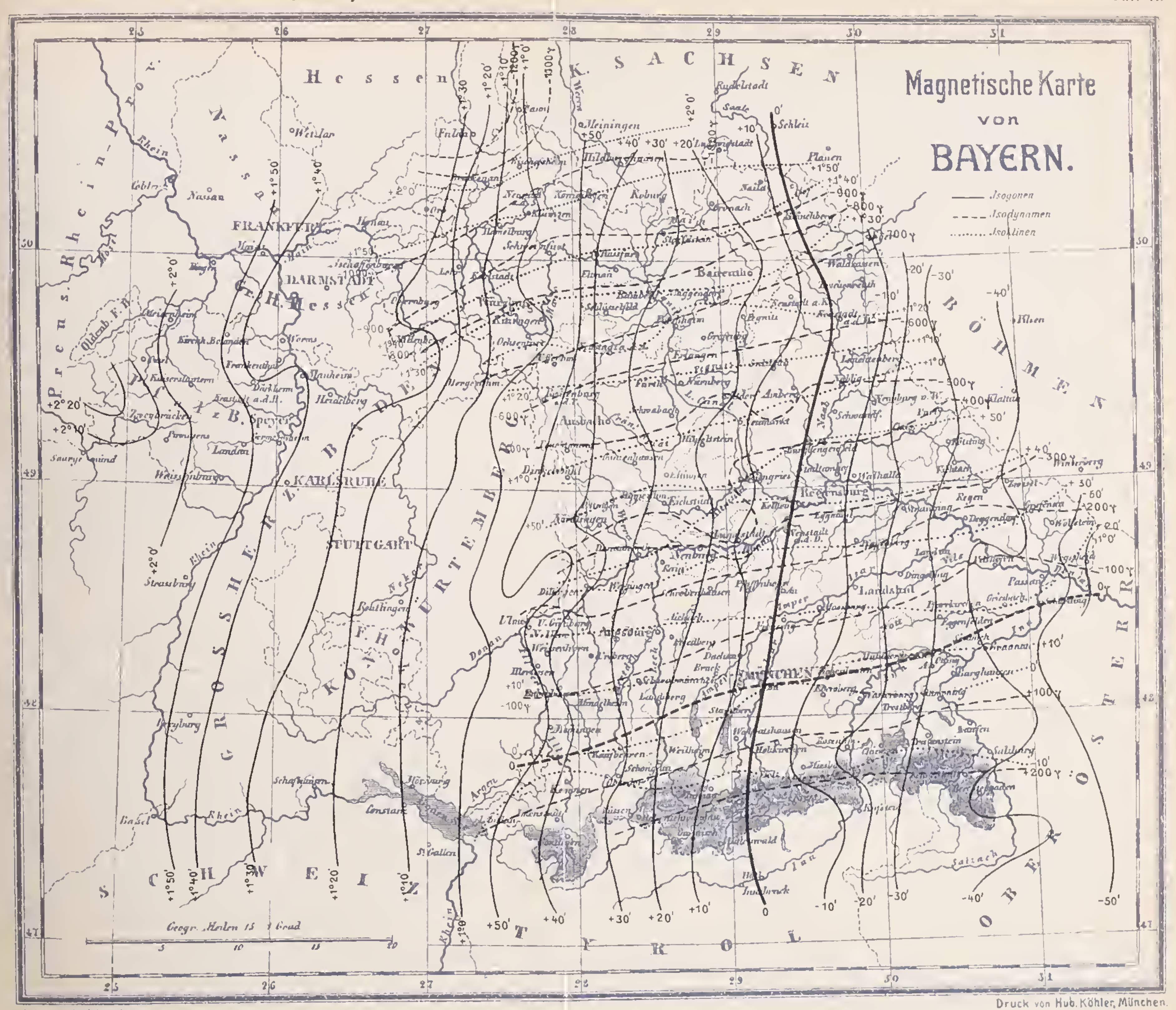
von ihm benutzte weiche Eisen mit der Zeit unkontrollierbare Änderungen erlitten hatte. Es dürfte diese wohl hauptsächlich auf Strukturänderungen zurückzuführen sein. Bei anderen weichen Eisen trat hingegen diese Veränderung nicht ein, wie eine Vergleichung von Beobachtungen von Theodoliten, die Lamont an andere Institute und Gelehrte geliefert hat, dartut. In den ersten Jahren der Lamontschen Messungsreihe besteht diese Unsicherheit jedoch noch nicht und es verdienen, wie eben der Vergleich mit den neuen Beobachtungen lehrt, diese Inklinationsmessungen volles Vertrauen. Die Beobachtungen der späteren Jahre können dagegen nur zum Teil, nach eingehender Diskussion und Vergleichung mit Neumessungen, weitere Verwendung finden.

Aus den Beobachtungen von Lamont wurde nun der mittlere Verlauf des Erdmagnetismus, die sogenannten terrestrisch isomagnetischen Linien, abgeleitet und mit dem wahren verglichen. Ebenso fand ein Vergleich der neuen Beobachtungen mit den aus der Theorie folgenden Werten statt. Beide Wege ergeben einen Überblick über die in Bayern vorkommenden magnetischen Störungsgebiete, die aus der beiliegenden Karte noch deutlicher zu erkennen sind.

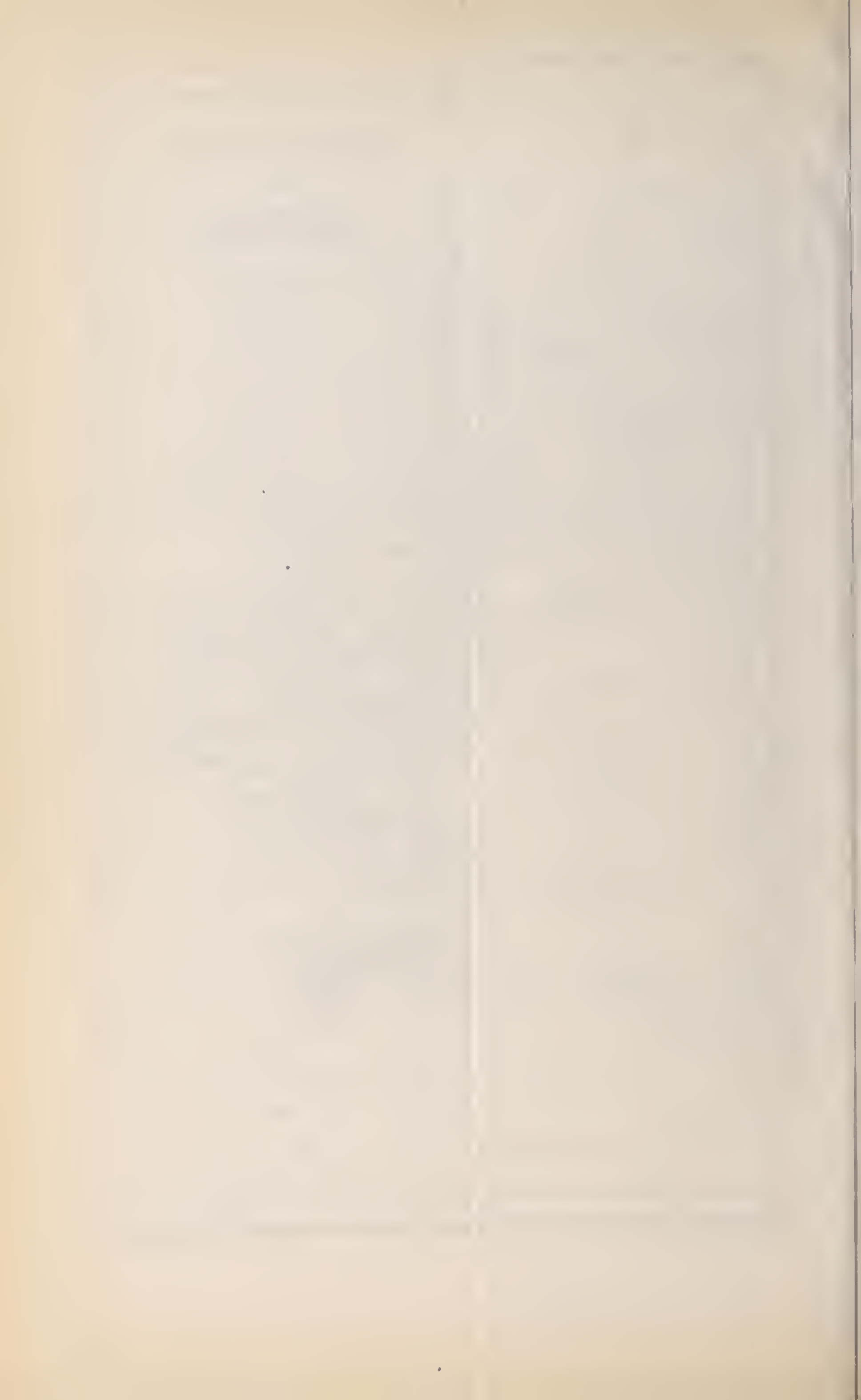
Es ist vor allem das Gebirge, welches den Verlauf der magnetischen Linien beeinflußt. Die Störungen machen sich daselbst besonders dadurch geltend, daß eine Verminderung der normalen Horizontalintensität gefunden wird.

Im Süden erscheinen die Alpen als wichtigstes Störungsgebiet, das besonders in dem östlichen Teile von der Linie Tölz-Holzkirchen bis zur Salzach deutlich hervortritt. Die bayerische Hochebene gibt mehr normale Werte bis in die Nähe der Donau, wo durch das Zusammenstoßen der verschiedenen Gebirgssysteme große geologische Störungen auftreten, die sich auch im Erdmagnetismus bemerklich machen.

Das vulkanische Riesgebiet zeigt ganz besondere magnetische Verhältnisse, die durch die basaltischen Lakkolithe ihre Erklärung finden. Dieses Störungsgebiet setzt sich aber längs dem ganzen Jura fort. Hier hebt sich noch das Gebiet in der



Messerschmitt, del.
Druck von Hub. Köhler, München.



Gegend von Ingolstadt vor allem heraus, wo sich die Isodynamen der Horizontalintensität und die Isogonen besonders eng aufeinander drängen, ein Verhalten, das noch wichtiger wird, weil in dieser Gegend auch die Intensität der Schwere starke Abweichungen erkennen läßt. Es ist klar, daß die geologischen Verhältnisse dieses Gebietes, die freilich zum Teil nicht offen daliegen, eine Erklärung geben können.

Die Störungen im Bayerischen Wald dagegen sind leichter aus den sichtbaren Gebirgsmassen zu erklären, aber auch hier erstreckt sich die Wirkung noch weiter südlich über das rechte Ufer der Donau hinaus.

Auch die Gegend von Amberg und Neumarkt in der Oberpfalz zeigt eine zu geringe Intensität des Magnetismus, besonders dort, wo der Jura sich an den Bayerischen Wald anschließt, ein Verhalten, das auch die Schweremessungen erkennen lassen.

Das Fichtelgebirge tritt magnetisch weniger hervor, dagegen kommen die vulkanischen Durchbrüche in der Rhön besonders in Betracht. Manche Kuppen zeigen so starke magnetische Störungen, daß Aufnahmen, die ein ganz enges Netz bilden, die Lage der Störungsmassen recht genau zu bestimmen erlauben.

Im Spessart erleidet besonders die Deklination ganz außergewöhnliche Ablenkungen und zwar in dem Sinne, daß die Mißweisung kleiner als ihr normaler Wert ist. Diese Anomalie setzt sich noch weit außerhalb Bayern fort und erstreckt sich bis an den Rhein.

Die vorliegenden Beobachtungen lassen also genau erkennen, wo die Detailuntersuchungen einzusetzen haben, die dann im Verein mit anderen geophysikalischen Messungen, insbesondere der Richtung und Intensität der Schwerkraft und den geologischen Verhältnissen, manche wichtige Frage klären und ihrer Lösung näher bringen können und damit allgemeinere Bedeutung gewinnen.



Über Potenzreihen mit unendlich vielen verschwindenden Koeffizienten.

Von **G. Faber** in Karlsruhe.

(*Eingelaufen 3. November.*)

Überwiegen in einer Potenzreihe mit endlichem Konvergenzradius die Koeffizienten vom Werte Null in genügend starkem Maße über die übrigen, so läßt sich unter geeigneten einfachen Zusatzbedingungen nachweisen, daß der Konvergenzkreis eine natürliche Grenze der betreffenden Funktion ist. Herr Fabry hat diese Fragen zuerst auf das gründlichste untersucht;[1]) einen Teil seiner Sätze habe ich dann einfacher bewiesen.[2])

Wenn man mit $n(\nu)$ die Anzahl der nicht verschwindenden Koeffizienten bezeichnet, die zu Potenzen mit Exponenten $\leq \nu$ gehören, so ist z. B. $\lim\limits_{\nu=\infty} \frac{n(\nu)}{\nu} = 0$ eine hinreichende Bedingung für die Nichtfortsetzbarkeit der Reihe. Andrerseits ist, wie Herr Fabry[3]) ausdrücklich hervorhebt, das Vorhandensein unendlich vieler und schließlich beliebig viele aufeinanderfolgende Koeffizienten umfassender Lücken in der Koeffizientenreihe für sich allein nicht hinreichend dafür, daß der Konvergenzradius sich als natürliche Grenze ergibt; ja es kann $\varliminf\limits_{\nu=\infty} \frac{n(\nu)}{\nu} = 0$

[1]) Ann. éc. norm. (3) 13 (1896) und acta math. 22 (1899).

[2]) Münchener Berichte 34 (1904).

[3]) Acta math. 22 (1899), p. 87 u. Journ. de Math. (5) 4 (1898), p. 349.

und $\overline{\lim_{\nu=\infty}} \frac{n(\nu)}{\nu}$ beliebig klein (aber > 0) sein, ohne daß auf dem Konvergenzkreise mehr als eine einzige singuläre Stelle zu liegen braucht.

Es ist vielleicht nicht überflüssig, diese von Herrn Fabry konstatierte interessante Möglichkeit durch Konstruktion einfacherer Beispiele als derjenigen des Herrn Fabry aufs neue darzutun.

Wenn $\overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[m_\nu]{|a_{m_\nu}|} = 1$ ist, konvergiert die Reihe

$$(1) \qquad \sum_0^\infty{}^\nu a_{m_\nu} \left(\frac{x^2+x}{2}\right)^{m_\nu}$$

in dem Gebiete, in welchem $\frac{1}{2}|x| \cdot |x+1| < 1$ ist, d. i. im Innern einer Lemniskate (ohne Doppelpunkt) mit den Brennpunkten 0 und -1. Vom Kreise $|x| = 1$ liegt der eine Punkt $x = 1$ auf dieser Lemniskate, alle übrigen aber innerhalb derselben; denn für diese übrigen Punkte des Einheitskreises ist $\frac{1}{2}|x^2 + x| < \frac{1}{2}(|x^2| + |x|)$ mit Ausschluß des Gleichheitszeichens, also < 1.

Wählt man nun

$$(2) \qquad m_{\nu+1} > 2\, m_\nu$$

und ordnet man (1) nach Potenzen von x:

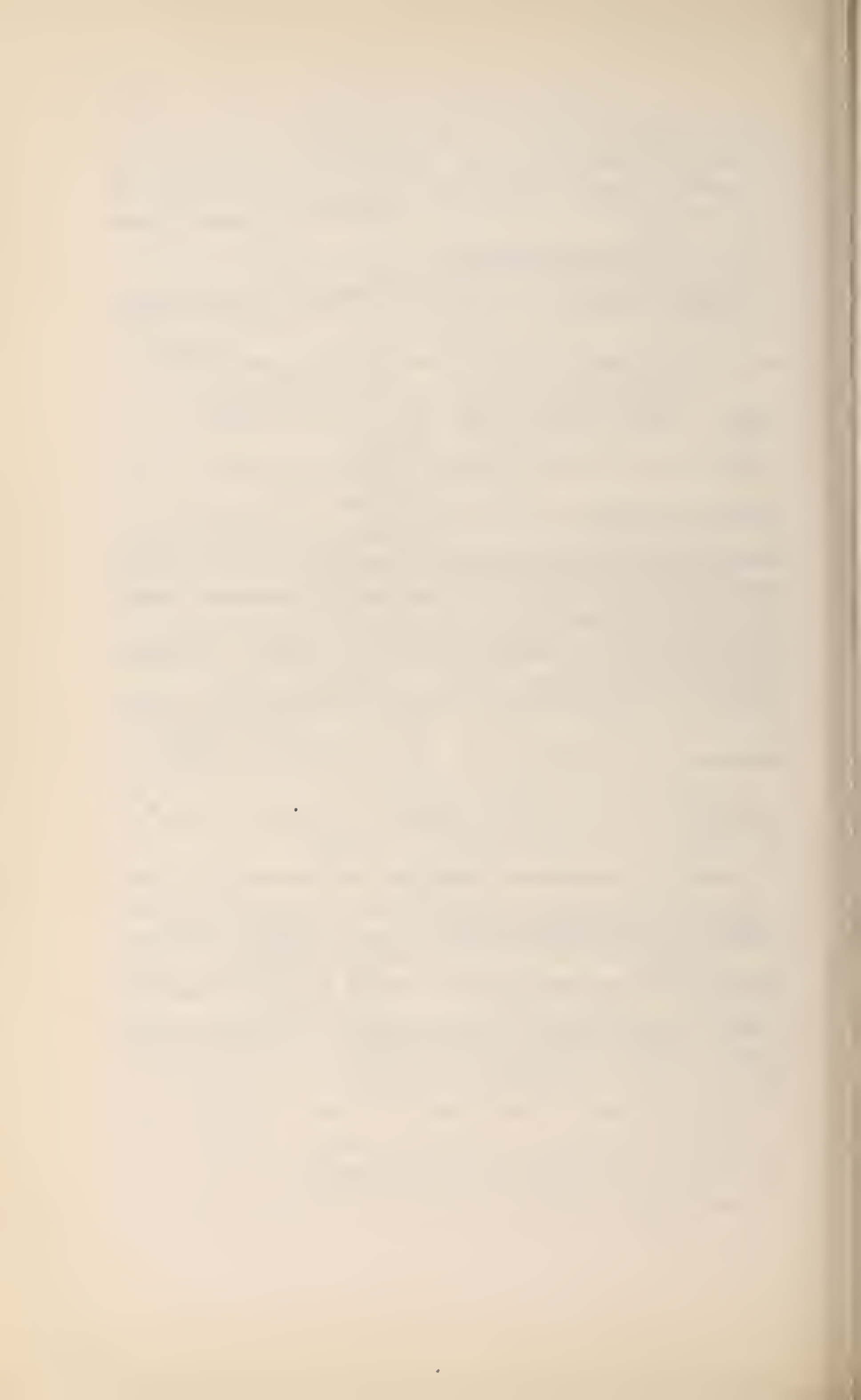
$$(3) \qquad \sum_0^\infty{}^\mu b_\mu x^\mu,$$

so werden sämtliche b_μ, deren Indices zwischen $2\, m_\nu$ und $m_{\nu+1}$ liegen, gleich Null; es lassen sich also auf diese Weise in der Koeffizientenreihe $b_0, b_1, b_2 \ldots$ beliebig viele und beliebig große Lücken herstellen. Trotzdem hat die Reihe (3), da sie ja die gleiche Funktion wie (1) darstellt, auf dem Einheitskreise keine singuläre Stelle als höchstens die Stelle $x = 1$; diese ist aber sicher singulär; denn auf Grund der Voraussetzung (2) und des eingangs erwähnten Fabryschen Satzes ist die Lemniskate $|x(x+1)| = 2$ natürliche Grenze der Funktion (1). Will man von jenem Satze keinen Gebrauch machen, so wähle man die

a_{m_ν} reell, dann werden es auch die b_μ und es wird, wie leicht zu sehen, $\overline{\lim_{\mu=\infty}} \sqrt[\mu]{|b_\mu|} = 1$, woraus ebenfalls folgt, daß der Punkt $x = 1$ ein singulärer für (3) ist.

Wählt man die m_ν so, daß $\lim_{\nu=\infty} \frac{m_{\nu+1}}{m_\nu} = \infty$ wird, so ergibt sich für die Reihe (3): $\underline{\lim_{\mu=\infty}} \frac{n(\mu)}{\mu} = 0$ (speziell: $\lim_{\nu=\infty} \frac{n(m_\nu)}{m_\nu} = 0$), dagegen wird im allgemeinen $\overline{\lim_{\mu=\infty}} \frac{n(\mu)}{\mu} = \frac{1}{2}$ werden, da ja zwischen $\mu = m_\nu$ und $\mu = 2m_\nu$ sämtliche Koeffizienten vorhanden sein können und dann $\lim \frac{n(2m_\nu)}{2m_\nu} = \frac{1}{2}$ ist; man kann aber den obern Limes beliebig verkleinern, wenn man statt von (1) von der im übrigen genau dasselbe leistenden Reihe $\sum_0^\infty{}^\nu a_{m_\nu}\left(\frac{x^l + x^{l+1}}{2}\right)^{m_\nu}$ ausgeht, wo l eine beliebige natürliche Zahl ist; es ergibt sich dann, wenn wieder $\lim \frac{m_{\nu+1}}{m_\nu} = \infty$ angenommen wird, $\underline{\lim_{\mu=\infty}} \frac{n(\mu)}{\mu} = 0$, $\overline{\lim_{\mu=\infty}} \frac{n(\mu)}{\mu} = \frac{1}{l+1}$ $\Big($speziell: $\lim_{\nu=\infty} \frac{n(l\cdot m_\nu)}{l\cdot m_\nu} = 0$; $\lim_{\nu=\infty} \frac{n((l+1)m_\nu)}{(l+1)m_\nu} = \frac{1}{l+1}\Big)$.

In den so konstruierten Beispielen ist die einzige auf dem Konvergenzkreise gelegene singuläre Stelle keine isolierte Singularität der betreffenden Funktion, und es scheint in der Tat (obwohl hiefür ein Beweis nicht vorliegt) $\underline{\lim_{\nu=\infty}} \frac{n(\nu)}{\nu}$ immer > 0 zu sein, sobald auf dem Konvergenzkreis nur eine endliche Anzahl isolierter Singularitäten auftritt.



Öffentliche Sitzung
zu Ehren Seiner Königlichen Hoheit des Prinz-Regenten

am 17. November 1906.

Der Präsident der Akademie, Herr K. Th. v. Heigel, eröffnete die Festsitzung mit der folgenden Ansprache:

Unauslöschbar wird sich jedem Teilnehmer an den soeben verrauschten Kaiserfesten das rührende und erhebende Bild eingeprägt haben: neben der kraftvollen Persönlichkeit des Reichsoberhaupts unser Regent, alt, doch nicht gealtert, ungebeugt von der Last seiner Jahre, ein Ehrfurcht gebietendes Beispiel von Pflichttreue. Der französische Akademiker Fontenelle sagte einmal: „Wenn ich vor einen Vornehmen treten muß, verbeuge ich mich, doch mein Geist macht den Bückling nicht mit!“ Doch auch dem selbstbewußten Dichter würde, wenn er vor unseren Regenten getreten wäre, jede Ehrenbezeugung von Herzen gekommen sein, denn diesen Fürsten zeichnen nicht bloß Rang und Würde aus, sondern auch echte Menschlichkeit und Bürgertugend.

Längst ist der Beweis erbracht, daß er der Wissenschaft treue Fürsorge und jede mögliche Förderung angedeihen läßt. Auch im ablaufenden Jahre hat sich unsere Akademie mancher Beweise der Gunst der K. Staatsregierung zu erfreuen gehabt. Vor allem verdient unseren Dank die Einräumung des Nordflügels des Wilhelminums. Freilich mußte die westliche Hälfte des ersten Stockwerkes zunächst dem Ludwigsgymnasium ein-

geräumt werden, und ein Teil davon wird nach Errichtung des neuen Gymnasiums dem Staatsarchiv überlassen werden müssen. Immerhin bedeutet es einen Fortschritt, daß die östliche Hälfte des ersten Stockwerkes vom Münzkabinett und das zweite Stockwerk vom zoologischen Institut bezogen werden können; die erforderliche Adaptierung wird in wenigen Monaten durchgeführt sein. Wenn in absehbarer Zeit auch noch andere, gegenwärtig zu fremden Zwecken verwendete Räume im Erdgeschoß und im dritten Stockwerk an die wissenschaftlichen Sammlungen des Staates abgegeben werden, ist dem empfindlichsten Mißstand im Wilhelminum abgeholfen. Denn nur wenn die Sammlungen in genügend geräumigen und hellen Räumen in übersichtlicher Ordnung aufgestellt sind, vermögen sie ihren Doppelzweck zu erfüllen: für den Unterricht in den Instituten das erforderliche Material und auch den breitesten Volksmassen Anregung und Belehrung zu bieten.

Zu wärmstem Danke sind wir der K. Staatsregierung und den beiden Kammern verpflichtet für Erhöhung des Etats der Kommission für Erforschung der Urgeschichte Bayerns, sowie der zoologischen Sammlung. Mit reicheren Mitteln ausgestattet, wird die genannte Kommission in Stand gesetzt sein, die Ausgrabungsarbeiten systematischer vornehmen zu lassen und in Wahrheit der Mittelpunkt der prähistorischen Studien in Bayern zu werden. Der zoologischen Sammlung aber ist durch die Aufbesserung ihres Etats die Möglichkeit gegeben, empfindliche Lücken ihrer Bestände auszufüllen und die wertvollen Erwerbungen der letzten Jahre durch zweckentsprechende Verarbeitung und Aufstellung fruchtbar zu machen.

Noch einem dringenden Bedürfnis aber ist in nächster Zeit abzuhelfen: es gilt, einen unseres Staates und unserer hohen Schulen würdigen neuen botanischen Garten zu schaffen.

Nahezu ein Jahrhundert ist verflossen, seit die Haupt- und Residenzstadt München ihren ersten botanischen Garten erhalten hat.

Während Berlin schon im 17. Jahrhundert einen „Apothekergarten“ und seit 1718 einen „Garten der Sozietät der Wissenschaften“ hatte, die Kaiserstadt Wien sich einer weltberühmten Pflanzenschule erfreute und sogar kleine Universitätsstädte, wie Altdorf, ihre Lehrgärten besaßen, fehlte es in München noch um die Wende des 18. Jahrhunderts an einem solchen Institut. Erst 1807 erhoben zwei Akademiker, der große Anatom und Physiker Sömmering und Medizinalrat Güthe, ihre Stimmen für Ausfüllung der empfindlichen Lücke in den trefflichen wissenschaftlichen Anstalten der kurbayerischen Akademie. Sömmering motivierte seinen Antrag galanter Weise u. a. auch damit, daß Botanik, von Alters her scientia amabilis, die liebenswürdige Wissenschaft, genannt, in jüngster Zeit ein Lieblingsstudium der Damen geworden sei. Die Akademie schloß sich dem Antrage an, und der gütige Max Joseph ging auf die Wünsche der Gelehrten ein; er schenkte zur Anlage eines botanischen Gartens eine Wiese von $6^1/_2$ Tagwerken längs dem Herzogsgarten und dem Löwenwirtshause vor dem Karlstor; andere Grundstücke im Umfang von 8 Tagwerken wurden dazu gekauft. Hier wurde sodann in den nächsten Jahren ein anfänglich nur die Heimatsflora umfassender Garten von Hofgartenintendant v. Sckell und Professor v. Schrank, bisher Konservator des botanischen Universitätsgartens in Landshut, angelegt, also von Männern, die mit den einschlägigen Gesetzen der Natur, der Wissenschaft und der Kunst wohl vertraut waren.

Das neue Unternehmen fand jedoch viele Gegner. Im Publikum waren schlimme Gerüchte verbreitet über Beschaffenheit und Tauglichkeit des gewählten Platzes. Auch die alte Eifersucht zwischen Universität und Akademie spielte herein. Die Landshuter Professoren meinten, es wäre besser, das Geld, statt es im Münchener Kalkboden nutzlos zu vergraben, zur Erweiterung des herrlichen Universitätsgartens auf dem Hofberg zu verwenden. Allein Schrank, Güthe und Sckell, 1811 von der Regierung zu gründlicher Untersuchung der Frage aufgefordert, vertraten einstimmig und entschieden die Auffassung, daß gegen den gewählten Platz in München schwer-

wiegende Bedenken nicht zu erheben seien. Er sei gesichert gegen die im Isartal jährlich wiederkehrenden Überschwemmungen, habe die richtige Lage gegen den Sonnenlauf und genügenden Schutz gegen rauhe Bergwinde durch die nicht allzu hohen Gebäude des Herzog-Klemens-Palastes; dagegen sei genügend Vorsorge getroffen, daß dem Garten nicht durch bürgerliche Gebäude Licht und Luft und die nicht minder nötige Ruhe entzogen würden. Der Boden, vorwiegend Kalkerde mit Alaunerde und Eisenoxyd, sei zwar für den Anbau zärterer Pflanzen zur Zeit noch nicht sehr geeignet, könne aber von einem wissenschaftlich gebildeten Kultivateur nach Wunsch verbessert werden. Leichter könne die Universität eines botanischen Gartens entbehren, da die für den Unterricht notwendigen Pflanzen auch auf dem Handelswege erhältlich seien, als eine Akademie, welche das botanische Studium als reine Wissenschaft betrachte und betreibe. Auch in Paris sei der Jardin des plantes nicht mit der uralten Universität, sondern mit dem weit jüngeren Institut des sciences et des arts verbunden. Der Akademie des ersten Staates im konföderierten Deutschland dürfe ein so wichtiges Attribut nicht länger fehlen.

Diese Gründe schlugen durch: die Arbeiten für die geplante Schöpfung durften fortgesetzt werden.

Es wäre hier nicht am Platze und kann nicht meine Aufgabe sein, eingehend zu schildern, was in der Folge für innere Einrichtung des Gartens, Verbesserung des Bodens, Bau der Gewächshäuser, Ansiedlung der Pflanzen geleistet wurde. Dem praktischen Sinn, dem rastlosen Eifer und der wissenschaftlichen Erfahrung der Gründer und ihrer Nachfolger war es zu danken, daß sich der Münchener Garten zu einem der reichsten und bestgeordneten in Deutschland entwickelte. Pflanzen sind organische Wesen, die einer verständnis- und liebevollen Wartung bedürftig sind. Es kam unserem Garten zugute, daß seine Pfleger nicht bloß ausgezeichnete Floristen waren, sondern auch ein Herz für die lebende Pflanze hatten. Am nächsten, so meine ich als Laie, muß doch auch dem Botaniker das-

jenige liegen, was noch lebt. Dekorativer Wirkung darf selbstverständlich in einem botanischen Garten nicht die Bedeutung eingeräumt werden, wie in einem Ziergarten, doch schon der Name Sckell bürgte dafür, daß auch auf anmutige Formen und Umrisse, auf harmonische Übergänge der Baumarten, auf Abstufung der Farbentöne von Blumen und Strauchwerk jede mögliche Rücksicht genommen wurde. Nicht minder wurde auf Einbürgerung seltener Arten aus allen Teilen der alten und neuen Welt, insbesondere unter der Leitung des berühmten Erforschers der brasilianischen Flora, Karl von Martius, rege Sorgfalt verwendet.

Einen schweren Schlag erlitt jedoch der Garten im Jahre 1854 durch den Beschluß der Regierung, den zur Aufnahme der Industrieausstellung bestimmten Glaspalast in den botanischen Garten zu verlegen und mitten durch eine öffentliche Straße zu ziehen. Es soll anfänglich geplant gewesen sein, den Glaspalast selbst nach Beendigung der Ausstellung als Gewächshaus zu benützen; der Gedanke konnte aber natürlich nicht verwirklicht werden, denn wie hätten so ungeheuere Räume erwärmt werden sollen? Martius verglich seinen geliebten Garten nach der Katastrophe des Jahres 1854 mit einem Menschenkörper, in welchem alle Sehnen entzwei geschnitten seien. Die Besorgnis war nicht unbegründet, aber übertrieben. Dem erhöhten Eifer der Beamten und Bediensteten gelang es, die Umwandlung des Gartens so glücklich durchzuführen, daß er nach wie vor zu wissenschaftlichen Untersuchungen reiches Material lieferte, den Künstlern zu mannigfaltigen Studienzwecken diente und zahlreiche Gäste zu harmloser Naturbeobachtung anregte.

In dieser Gestalt ist er unser aller Liebling gewesen, und es läßt sich wohl verstehen, daß der verehrte Kollege Radlkofer, der hier sein Leben lang „die Arbeit und das Wirken der Pflanzen“ liebevoll beobachtet hat, die tröstliche Oase nicht aufgegeben wissen will.

Und doch muß ernstlich die Schöpfung eines neuen botanischen Gartens ins Auge gefaßt werden! Gerade der zart-

fühlende Freund der Pflanzenwelt darf sich dieser Forderung nicht länger verschließen. Wenn Sckell für verbürgt erachtete, daß der Garten niemals durch Umbauung geschädigt werden könnte, so ist dieser Erwartung nicht entsprochen worden; er ist heute auf allen Seiten von teilweise sehr hohen Gebäuden — es sei nur an den Justizpalast, die Töchterschule u. s. w. erinnert — eng umschlossen, so daß ihm nicht mehr soviel Luft und Licht vergönnt ist, als zum Fortkommen empfindlicher Pflanzenarten notwendig wäre. Noch schädlicher — ich bediene mich der Worte des sachkundigsten Gewährsmannes, unseres Kollegen Goebel selbst — wirkt die Rauchentwicklung, die hauptsächlich infolge der beständigen Erweiterung des nahen Bahnhofes unerträglich geworden ist und Hunderten von Pflanzen einen frühen Tod bringt. Die Gewächshäuser sind, obwohl auf ihre Reinigung jährlich große Summen verwendet werden, fast beständig mit einer Rußschichte bedeckt, die den Warmhauspflanzen das unentbehrliche Sonnenlicht entzieht oder doch verkümmert. Nadelholz kann überhaupt nicht am Leben erhalten werden, so daß den Schülern und dem Publikum die Gelegenheit benommen ist, sich mit den gewöhnlichsten Arten unserer Waldflora vertraut zu machen. Die Verhältnisse des Gartens sind überhaupt zu eng, zu kleinlich geworden; für die dringend wünschenswerte Ausbreitung des Alpinums, der biologischen Gruppen u. s. w. ist kein Raum mehr geboten. Die Gewächshäuser sind vor nahezu 50 Jahren gebaut worden; seither sind in Bezug auf Konstruktion, Heizung. Verglasung u. s. w. namhafte Fortschritte gemacht worden. Um einer größeren Anzahl Studierender mikroskopische Forschung zu ermöglichen, wurde 1891 das pflanzenphysiologische Institut errichtet; es reicht zur Zeit für Unterrichtszwecke gerade noch aus. Dagegen können die Räume für die Sammlungen nicht mehr genügen. Der riesig gesteigerte Weltverkehr, die Erschließung unbekannter Regionen in der alten und neuen Welt haben auch für die Botanik eine Fülle neuer Schätze und damit eine Fülle neuer Aufgaben gebracht. Unsere Herbarien können aber neue Bestände schlechterdings nicht mehr aufnehmen.

Und gänzlich fehlt es an Platz für ein wirkliches botanisches Museum, das den Studierenden und dem Publikum die Kenntnis aller pflanzlichen Rohstoffe für Medizin, Pharmazie, Industrie und Handel vermitteln könnte.

Allen diesen Übelständen kann nur durch Schöpfung eines neuen Gartens abgeholfen werden; deshalb hat sich das Generalkonservatorium in voller Übereinstimmung mit dem Konservatorium des botanischen Gartens und des pflanzenphysiologischen Instituts schon vor drei Jahren für möglichst baldige Verlegung ausgesprochen, und von der K. Staatsregierung wird die Angelegenheit mit ernster Sorgfalt behandelt.

Freilich ist ausgeschlossen, daß sich wieder ein Platz findet, der allen Besuchern so leicht zugänglich wäre, wie der jetzige. Die Studierenden werden nicht mehr so rasch und bequem in die botanischen Lehrgebäude gelangen; auch den Beamten und Lehrern wird ihre Tätigkeit erheblich erschwert werden. Und große Summen, darüber darf man sich nicht täuschen, werden, wenn man schon aus hygienischen Gründen den sogenannten kleinen Garten nicht der Privatspekulation überlassen will, aufgebracht werden müssen. Der botanische Garten in Dahlem bei Berlin hat mehrere Millionen gekostet. Minderwertiges darf auch in München nicht geschaffen werden.

Doch diese Gründe gegen die Verlegung des alten Gartens werden durch die wichtigeren Vorteile einer neuen Schöpfung aufgewogen.

Daß der botanische Unterricht der studierenden Jugend auch an einem von der Universität, ja sogar von der Universitätsstadt weit entfernten Platze erteilt werden kann, ist eine bereits erwiesene Tatsache; der Garten in Dahlem ist viel weiter von Berlin entfernt, als z. B. Nymphenburg von München. Und der erste Zweck eines botanischen Gartens, der mächtig fortschreitenden Wissenschaft einen der Entwicklung förderlichen Boden zu unterbreiten, kann eben nur durch Anlage eines geräumigeren, mit allen Errungenschaften der Wissenschaft und der Technik ausgestatteten Pflanzengartens erfüllt werden.

Glücklicherweise fallen in dieser Frage die Interessen der Wissenschaft und der Kunst, des Staates und der Stadt zusammen.

Die Künstlerschaft Münchens wird ihre Ausstellungen nicht mehr lange in dem baufälligen Glaspalast abhalten können; die Errichtung eines neuen Ausstellungsgebäudes ist unabweisbares Bedürfnis.

Der Staat Bayern und die Stadt München haben, was mühelos nachzuweisen wäre, ebenso ein wirtschaftliches wie ein geistiges Interesse an Erfüllung berechtigter Wünsche der Vertreter von Kunst und Wissenschaft. Welche Schwierigkeiten auch immer dem großen Unternehmen sich entgegenstellen mögen: wenn alle beteiligten Faktoren einmütig, eifrig und opferwillig zusammenwirken, ist eine würdige Lösung der Aufgabe mit Sicherheit zu erhoffen. Möge der holde Genius der scientia amabilis zu fröhlichem Gelingen seinen Segen spenden!

Aus den Zinsen der Adolf v. Baeyer-Jubiläums-Stiftung wurden bewilligt:

1. dem Privatdozenten für Chemie Dr. Heinrich Wieland in München zur Beschaffung von Chemikalien 300 M.;
2. dem Professor Dr. Karl Hofmann in München zur Beschaffung radioaktiver Schwermetalle 300 M.;
3. dem Privatdozenten Dr. Julius Sand in München zur Beschaffung von Apparaten für physikalisch-chemische Messungen 200 M.

Hierauf verkündigte der Klassensekretär, Herr C. v. Voit, die Wahlen der mathematisch-physikalischen Klasse. Es wurden gewählt und von Seiner Königlichen Hoheit dem Prinz-Regenten bestätigt:

zum außerordentlichen Mitgliede:

Dr. Karl Hofmann, außerordentlicher Professor für anorganische Chemie an der hiesigen Universität;

zu korrespondierenden Mitgliedern:

1. Dr. Wilhelm Fiedler, Professor für darstellende und synthetische Geometrie an der eidgenössischen technischen Hochschule in Zürich;
2. Dr. August Froriep, ordentlicher Professor der Anatomie an der Universität in Tübingen;
3. Dr. Karl Rabl, ordentlicher Professor der Anatomie an der Universität in Leipzig;
4. Dr. Ernst Stahl, Professor der Botanik an der Universität in Jena;
5. Dr. Hermann Carl Vogel, Geheimer Regierungsrat, Professor und Direktor des astrophysikalischen Laboratoriums in Potsdam;
6. Dr. Veit Brecher Wittrock, Professor der Botanik an der Universität und Direktor des botanischen Gartens in Stockholm.

Sitzung der math.-phys. Klasse vom 1. Dezember 1906.

Herr Hugo v. Seeliger hält einen Vortrag über: „Das Zodiakallicht und die empirischen Glieder in der Bewegung des inneren Planeten.“

Nur in ganz wenigen Fällen reicht das Newtonsche Anziehungsgesetz scheinbar nicht aus, die beobachteten Bewegungen im Planetensystem vollständig zu erklären. Die größte dieser Anomalien ist eine von Leverrier entdeckte Bewegung des Perihels der Merkurbahn von etwa 40 Sekunden im Jahrhundert, welche die Theorie nicht ergibt, die aber durch die Beobachtungen zweifellos festgestellt ist. Der Vortragende erblickt den Grund des Widerspruchs zwischen Theorie und Beobachtung darin, daß bisher die Einwirkung fein verstreuter Materie innerhalb des Planetensystems auf die Planeten nicht genügend berücksichtigt worden ist. Diese fein verstreute Materie bietet den Anblick des Zodiakallichts dar. Bei nahe liegenden Annahmen über die Flächen gleicher Dichtigkeit in dem Gebilde des Zodiakallichts gelingt es in der Tat alle bisher bemerkten Widersprüche zu beseitigen. Die Dichtigkeit der Massenverteilung kann dabei äußerst gering sein. Selbst im Maximum braucht nur in jedem Kubikkilometer sich eine Masse vorzufinden, gleich der eines Würfels Wasser, dessen Seitenlänge kaum $^1/_3$ Meter beträgt.

Das Zodiakallicht und die empirischen Glieder in der Bewegung der innern Planeten.

Von **H. Seeliger.**

(Eingelaufen 1. Dezember.)

Nur in ganz wenigen Fällen ist es bisher der Astronomie nicht gelungen, die beobachteten Bewegungen, der erlangten Genauigkeit entsprechend, als reine Folge der Newtonschen Gravitation darzustellen. Beschränkt man sich auf die Bewegungen der großen Planeten, so ist insbesondere in einem Fall eine allerdings erhebliche Differenz zwischen Theorie und Beobachtung hervorgetreten. Auf ihn bezieht sich die vielbesprochene Entdeckung Leverriers, der vor mehr als 40 Jahren fand, daß die Perihellänge der Merkurbahn sich im Jahrhundert um rund 40″ schneller vorwärts bewegt, als die allein auf die gegenseitige Anziehung der Planeten gegründete Theorie ergibt. Diese Leverriersche Entdeckung ist von vielen Seiten nachgeprüft worden. Stets ergab sich eine Bestätigung auch in quantitativer Beziehung, so daß man das tatsächliche Vorhandensein dieser Anomalie als absolut feststehend bezeichnen muß. Die eingehendsten Nachforschungen in dieser Richtung verdankt man S. Newcomb, der über Leverrier hinausgehend, bei allen vier inneren Planeten und zwar in allen Bahnelementen nach etwaigen anderen empirischen Gliedern suchte, indem er die Säkularveränderungen der Bahnelemente einerseits empirisch bestimmte, andererseits nach der Newtonschen Theorie berechnete. Die so gefundenen Differenzen in den hundertjährigen

Veränderungen im Sinne Beobachtung—Theorie, nebst ihren wahrscheinlichen Fehlern sind folgende:[1])

	Merkur	Venus	Erde	Mars
$\frac{de}{dt} =$	$-0''.88 \pm 0''.50$	$+0''.21 \pm 0''.31$	$+0''.02 \pm 0''.10$	$+0''.29 \pm 0''.27$
$e\frac{d\pi}{dt} =$	$+8.48 \pm 0.43$	-0.05 ± 0.25	$+0.10 \pm 0.13$	$+0.75 \pm 0.34$
$\frac{di}{dt} =$	$+0.38 \pm 0.80$	$+0.38 \pm 0.33$	—	-0.01 ± 0.20
$\sin i \frac{d\Omega}{dt} =$	$+0.61 \pm 0.52$	$+0.60 \pm 0.17$	—	$+0.03 \pm 0.22.$

Die angeführten wahrscheinlichen Fehler mögen vielleicht nicht die ganze Unsicherheit der Resultate angeben. Immerhin wird man doch zugeben müssen, daß einige dieser Glieder nicht ohne weiteres als nicht reell angesehen werden dürfen. In jedem Falle werden solche Annahmen, welche etwa zur Erklärung der Bewegung des Merkurperihels gemacht werden, den Vorzug verdienen, welche auch die anderen Newcombschen Glieder ihren Fehlern entsprechend miterklären. Nur das Glied in der Exzentrizität der Merkurbahn und ebenso der anderen Planetenbahnen muß zunächst unberücksichtigt bleiben, da zu seiner Erklärung andere Annahmen, als bis jetzt gebraucht worden sind, nötig wären. Newcomb selbst ist der Meinung, daß bei Merkur der wahrscheinliche Fehler zu klein herausgekommen ist und dieses Glied, zunächst wenigstens, als nicht reell angesehen werden darf.

2.

Die Zahl der Hypothesen, welche zur Erklärung der Bewegung des Merkurperihels aufgestellt worden sind, ist nicht klein. Sie sind zum Teil von Newcomb a. a. O. erwähnt und in einer Weise kritisiert worden, der man in den meisten Punkten beistimmen wird können. Lange Zeit wurde, namentlich im

[1]) S. Newcomb, the Elements of the four inner Planets etc. Washington 1895, S. 108.

Anschluß an Leverrier selbst, die Annahme intramerkurieller Planeten in kleiner oder größerer Zahl oder selbst in volle Planetenringe aufgelöst, bevorzugt. Die formale Seite der Frage wurde öfters, so von Newcomb und Bauschinger,[1]) untersucht. In dieser Beziehung genügt die erwähnte Annahme den zu stellenden Anforderungen ziemlich befriedigend, wenn man sie in Verbindung mit einer säkularen Drehung des empirischen, in der Astronomie gebrauchten Koordinatensystems zur Anwendung bringt. Sie rechnet aber, abgesehen vielleicht noch von anderen Bedenken, mit Verhältnissen, wenigstens wenn man den allerdings negativen Aussagen der Beobachtung entsprechend die Anzahl der einzelnen Massen des Ringes groß annimmt, welche sich zunächst weder erweisen noch widerlegen lassen, und die also zu derjenigen Klasse von Hypothesen gerechnet werden muß, die man als unnötige bezeichnen kann. Vorausgesetzt natürlich, daß man eine mehr ansprechende Annahme machen kann.

Nicht so gut entspricht in formaler Beziehung die Annahme ungleicher Hauptträgheitsmomente des Sonnenkörpers, die ebenfalls vielfach, besonders eingehend von P. Harzer[2]) untersucht worden ist, da der Sonnenäquator seiner Lage nach ziemlich sicher bekannt ist und man doch wohl annehmen muß, daß die Hauptachsen im Äquator und in der Rotationsachse liegen. Aber dieser Annahme wird durch die Beobachtungen an der Sonne entschieden widersprochen, denen zufolge die in verschiedenen Richtungen gemessenen Durchmesser sich kaum um mehr als etwa 0.″1 voneinander unterscheiden können. Dagegen erfordert die obige Annahme, daß der äquatoriale Sonnendurchmesser um etwas mehr als 1″ größer als der polare sein muß. Dieses Resultat läßt sich streng aus gewissen Voraussetzungen mit wenigen Worten ableiten, weshalb ich kurz darauf eingehe, obwohl ja die Frage durch die Rechnungen des Herrn Harzer

[1]) J. Bauschinger, Untersuchungen über die Bewegung des Planeten Merkur. München 1884.

[2]) Paul Harzer, Über die Bewegung des Merkurperihels. Astron. Nachr. Nr. 3030 (1891).

als erledigt betrachtet werden darf. Sind C und A die beiden Hauptträgheitsmomente der Sonne in Bezug auf die Drehachse und in Bezug eine im Äquator gelegene Achse, wobei das dritte Trägheitsmoment dem A gleich angenommen wird, M die Sonnenmasse, n, a, π die mittlere Bewegung, mittlere Entfernung von der Sonne und Länge des Perihels eines Planeten, so ist für hinreichend kleine Exzentrizitäten und Neigungen bekanntlich die säkulare Veränderung von π gegeben durch:

$$\frac{d\pi}{dt} = \tfrac{3}{2}(C - A) \cdot \frac{n}{a^3 M}.$$

Die Abplattung ε der Sonnenoberfläche ist andererseits nach einem vielgebrauchten Satze der Himmelsmechanik gegeben durch:

$$\varepsilon = \tfrac{1}{2}\Phi + \tfrac{3}{2}\frac{C - A}{R^2 M},$$

wo R der Sonnenradius und Φ das Verhältnis der Zentrifugalkraft zur Anziehung im Äquator ist. Diese Formel setzt nichts über die Dichtigkeitszunahme in der Richtung zum Zentrum des Sonnenkörpers voraus, nur wird angenommen, daß sich das Innere der rotierenden flüssigen Masse im Gleichgewicht befindet. Daraus folgt aber für die Abplattung des Sonnenkörpers:

$$\varepsilon = \tfrac{1}{2}\Phi + \left(\frac{a}{R}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{d\pi}{dt}.$$

Soll demnach die Bewegung des Merkurperihels durch eine Verschiedenheit der Trägheitsmomente der Sonne erklärt werden, so muß $\frac{d\pi}{dt} = 40''$ im Jahrhundert gesetzt werden und da $\Phi = 0.000020$ ist, folgt $\varepsilon = 0.000525$. Danach muß der äquatoriale Sonnendurchmesser (α) 1."01 größer sein als der polare (β), was mit den Angaben des Herrn Harzer gut stimmt. Die Messungen an der Sonne geben sicherlich kaum $\alpha - \beta = 0.''1$.

Wird die Sonne als homogen betrachtet, so gibt bekanntlich die Gleichgewichtstheorie $\alpha - \beta = 0.''05$. Nimmt man andererseits das andere Extrem an, nämlich, daß die Masse

unendlich zusammendrückbar ist, daß also die ganze übrige Sonnenmasse gegenüber der in der Nähe des Zentrums befindlichen zu vernachlässigen ist, so ergibt sich leicht $\alpha - \beta = 0''.02$. Nach diesen Daten dürfte es jedenfalls aussichtslos sein, die Merkurperihelbewegung durch ungleiche Verteilung der Masse der Sonne in ihrem Innern zu erklären, selbst wenn man von den Bedingungen des Gleichgewichts absieht.

Von physikalischer Seite beeinflußt, hat man bald nach der Leverrierschen Entdeckung und seit jener Zeit in den verschiedensten Formen durch mehr oder weniger ansprechende Überlegungen eine Modifikation des Newtonschen Fernwirkungsgesetzes zu finden gesucht, welche die Anomalie in der Bewegung des Merkurperihels zu erklären imstande wäre. Der Erfolg ist in formaler Beziehung im ganzen ausgeblieben, d. h. es gelang in den meisten Fällen nicht, den festgestellten Betrag dieser Bewegung herzuleiten. Überdies hat man hierbei von vornherein darauf verzichtet oder verzichten müssen, die anderen Newcombschen empirischen Glieder zu erklären. Das letztere dürfte allerdings, in erster Annäherung, vielleicht als zulässig angesehen werden können. Wie dem auch sein möge, als besonders geeignet wurde in letzter Zeit eine Modifikation des Newtonschen Gesetzes betrachtet, derzufolge der Exponent 2 der reziproken Entfernung durch einen um eine sehr kleine Größe vermehrten $2 + \lambda$ zu ersetzen wäre. Schon in Newtons Prinzipien ist der Satz abgeleitet, daß hierdurch eine säkulare Bewegung des Perihels in positivem Sinne entsteht und die Mathematiker Green und Carl Neumann[1]) haben sich dieses Gesetzes angenommen und es im Gebiete der Elektrizität verwertet. Der Verwendung eines solchen Gesetzes in der Astronomie stehen indessen ernstliche Bedenken entgegen. Bleibt man auf dem Boden der Fernwirkungstheorie, so wird ein solches allerdings akzeptabel sein, da es in der Tat bei passender Wahl von λ die Bewegung des Merkurperihels in gewünschtem Betrage

[1]) Carl Neumann, Allgemeine Untersuchungen über das Newtonsche Prinzip der Fernwirkungen. Leipzig 1896.

ergibt ohne bei den anderen Planeten Beträge für ähnliche Glieder zu erfordern, die den Beobachtungen widersprechen. Dagegen stellen sich Bedenken allgemeinerer Art ein. Ich habe zu wiederholten Malen [1]) darauf aufmerksam gemacht, daß das Newtonsche Gesetz kein strenger und unbedingt geltender Ausdruck für die im Weltall herrschenden Anziehungen sein kann, indem man auf lästige, wenn nicht unüberwindliche Schwierigkeiten stößt, wenn man dieses Gesetz auf beliebig große, mit Masse erfüllte Räume anwendet. Letzteres muß aber erlaubt sein, da das Newtonsche Gesetz ein Universalgesetz, d. h. unter allen Umständen genau gültig sein soll. Diese Bedenken sind, wie ich glaube, durch die dagegen erhobenen Einwände, nur gewichtiger geworden. Nach meiner Meinung müßte demnach, wenn man an eine solche rein formale Modifikation des Ausdrucks für die Newtonsche Fernwirkung denken will, diesen Bedenken Rechnung getragen werden. Das Greensche Gesetz ist aber, wie ich nachgewiesen habe, nicht geeignet, dies zu leisten.

Verläßt man aber den Boden der Fernwirkungstheorie, so wird man kaum erwarten dürfen, durch irgendwelche physikalische Überlegungen oder Annahmen zu einem ähnlich einfachen Gesetze zu gelangen, wie das Greensche. Ich kann mich deshalb nicht der Meinung anschließen, wonach durch die Annahme dieses Gesetzes eine brauchbare oder befriedigende Erklärung der Bewegung des Merkurperihels angebahnt sein soll.

3.

Die theoretische Astronomie hat die Bewegungen im Planetensystem mit Berücksichtigung aller vorhandenen Massen zu erklären und in dieser Beziehung alles zu versuchen, ehe sie zu einer Modifikation ihrer Grundlagen oder zur Annahme unsichtbarer Massen oder dergleichen greift. Zu diesen jedenfalls vorhandenen, weil sichtbaren Massen gehören aber die Massen,

[1]) Über das Newtonsche Gravitationsgesetz. Astron. Nachrichten Nr. 3273 und Sitzungsberichte der Münchener Akademie, 1896.

welche das Zodikallicht erzeugen oder kurz gesagt das Zodiakallicht.

Ich hatte bei verschiedenen Gelegenheiten[1]) Veranlassung, mich der Ansicht anzuschließen, nach der die Erscheinung des Zodiakallichts auf fein zerstreute Materie zurückzuführen ist, die um die Sonne herumgelagert ist und nachweisbar über die Erdbahn hinausreicht. Über die Dichtigkeitsverteilung in dieser Masse läßt sich zur Zeit Genaueres nicht aussagen; aber nichts spricht dagegen, daß die Flächen gleicher Dichtigkeit scheibenförmige Rotationsflächen sind und die Dichtigkeit mit der Entfernung von der Sonne abnimmt. Früher nahm man den Äquator dieser Flächen als nahezu in der Ekliptik liegend an, neuere Beobachter dagegen sind geneigt, ihn mit größerer Annäherung mit dem Sonnenäquator zusammenfallen zu lassen. Damit soll nicht gesagt sein, daß alle Flächen gleicher Dichtigkeit genau dieselbe Rotationsachse haben, denn wie sich die der Sonne nächsten Teile des Zodiakallichts in dieser Richtung verhalten, wird sich wohl schwerlich feststellen lassen, ist jedenfalls bisher völlig unaufgeklärt geblieben, da man die Erscheinung des Zodiakallichtes sicher nicht bis zu kleineren Winkelabständen von der Sonne, als 20 oder 30 Grad, verfolgen kann. Zudem kann die Massendichtigkeit aus der beobachteten Lichtverteilung keineswegs hypothesenfrei abgeleitet werden, denn die letztere ist nicht nur von der Dichtigkeit der Massenverteilung sondern auch von dem Volumen der einzelnen Teilchen, welche das Zodiakallicht bilden, abhängig. Je größer die Anzahl der Teilchen ist, in welche dieselbe Masse zerteilt ist, desto größer ist unter sonst gleichen Umständen die Flächenhelligkeit des zurückgeworfenen Sonnenlichts.

Man hat demnach eigentlich kein anderes Mittel zur Bestimmung der Massendichtigkeit im Zodiakallicht, als das Studium der von ihm ausgehenden Anziehungskräfte. Daß solche vor-

---

[1]) U. A. a) Über allgemeine Probleme der Mechanik des Himmels. Verlag der Münchener Akademie, 1892.

b) Über kosmische Staubmassen und das Zodiakallicht. Sitzungsberichte der Münchener Akademie, 1901.

handen sein und die Bewegungen der Planeten beeinflussen müssen, ist selbstverständlich zweifellos und nur über die Größe dieser Einwirkung können die Meinungen auseinandergehen.

Mit einiger Sicherheit darf behauptet werden, daß sich die Masse des Zodiakallichts symmetrisch um eine Ebene gruppiert, von der wir allerdings nicht wissen, ob sie der Ekliptik oder dem Sonnenäquator näher liegt. Es ist ferner ziemlich sicher, daß in der Erscheinung des Zodiakallichts die Jahreszeit so gut wie keine Rolle spielt. Man wird danach die Dichtigkeit q als Funktion nur von der Entfernung von der Sonne (ϱ) und des Winkelabstandes ϑ von dem Pole der Symmetrieebene ansehen dürfen. Es kann also q als eine Kugelfunktionsreihe:

$$q = {}_n\sum_0^\infty A_n\, P^n (\cos \vartheta)$$

angenommen werden, in der die Koeffizienten A_n Funktionen von ϱ sind. Wegen der erwähnten Symmetrie wird ferner n eine gerade ganze Zahl sein. Nimmt man nun an, daß die genannte Reihenentwicklung für q so aufgestellt werden kann, daß sie für alle innerhalb einer Kugel vom Radius r_1 liegenden Punkte gilt, wo also r_1 die Maximalausdehnung des Zodiakallichts ist, dann läßt sich die Störungsfunktion Ω, welche bei der Bewegung des inneren Planeten in Betracht zu ziehen ist, sehr einfach darstellen. Denn es ist zunächst:

$$\Omega = k^2 \int_0^\pi \sin \vartheta\, d\,\vartheta \int_0^{r_1} \varrho^2\, q\, d\,\varrho \cdot \int_0^{2\pi} \frac{d\,\varphi}{\varDelta},$$

wo $\varDelta$ die Entfernung des Planeten $(r\,\vartheta_1\,\varphi_1)$ und eines Massenteilchens $(\varrho\,\vartheta\,\varphi)$ ist und k die Gaußsche Konstante bedeutet. Ist noch γ der Winkel zwischen ϱ und r, so hat man:

$$\frac{1}{\varDelta} = {}_i\sum_0^\infty \frac{\varrho^i}{r^{i+1}}\, P^i (\cos \gamma) \ldots \varrho < r$$

$$\frac{1}{\varDelta} = {}_i\sum_0^\infty \frac{r^i}{\varrho^{i+1}}\, P^i (\cos \gamma) \ldots \varrho > r.$$

Setzt man dies und die Reihe für q in den Ausdruck für Ω ein, so ergibt die Anwendung sehr bekannter Sätze aus der Theorie der Kugelfunktionen:

$$\Omega = 4\pi k^2 \cdot {}_n\sum_0^\infty \frac{1}{2n+1} P^n(\cos\vartheta) \left\{ \int_0^r \frac{\varrho^{n+2}}{r^{n+1}} A_n \, d\varrho + \int_r^{r_1} \frac{r^n}{\varrho^{n-1}} A_n \, d\varrho \right\}.$$

Die weitere Entwicklung hängt von der Form ab, welche die A_n als Funktionen von ϱ haben. Man könnte gegebenenfalls sich die A_n stets als Potenzreihen, welche nach ganzen positiven und negativen Potenzen von ϱ fortschreiten (da die Umgebung des Punktes $\varrho = 0$ ausgeschlossen erscheint), denken, und da man nur den säkularen Teil von Ω brauchen wird, wären die säkularen Teile von:

$$r^m P^n(\cos\vartheta), \quad \log r \cdot P^n(\cos\vartheta),$$

wo m positive oder negative ganze Zahlen bedeuten, zu entwickeln. Das ist leicht in der gewöhnlichen Weise durch Rechenentwicklungen und in mathematisch annehmbarerer Form durch Einführung von Funktionen, die den Kugelfunktionen verwandt sind, auszuführen. Doch hätte die Mitteilung der betreffenden Formeln für die vorliegenden Fragen keine Bedeutung, denn es ist gegenwärtig unmöglich die Entwicklung von q etwa anderswoher zu nehmen und andererseits ist die Einwirkung des Zodiakallichts auf die Bewegung der Planeten so klein und dergestalt, daß eine Bestimmung der wirksamen Koeffizienten durch diese Störungen nicht wohl auszuführen wäre. Man wird vielmehr nur zu einem befriedigenden Ziele gelangen, wenn man von vornherein über die Gestalt der Flächen gewisse Annahmen macht, die man natürlich, dem Gesagten zufolge, als mehr oder weniger plausibel ansehen mag. Hält man daran fest, daß die genannten Flächen ähnlich plattgedrückten Scheiben aussehen müssen, dann kann man die näheren Bestimmungsstücke innerhalb gewisser Grenzen variieren, ohne einen schlechteren Anschluß an die Beobachtungsdaten befürchten zu müssen. Man wird deshalb die spezielleren Daten so wählen können, daß die auszuführende Rechnung verhältnismäßig einfach wird.

Da bietet sich nun zunächst die Annahme dar, daß man das Zodiakallicht aus lauter Schichten, welche zwischen zwei Umdrehungsellipsoiden mit großen Abplattungen liegen, bestehen läßt. Man kann jedenfalls eine, vielleicht auch mehrere stetige Dichtigkeitsänderungen von Schicht zu Schicht so wählen, daß das Potential der ganzen Masse auf innere Punkte durch weitere Entwicklung auch für die numerische Rechnung brauchbar zum Ausdrucke gebracht wird. Indessen wird man in gewissem Sinne allgemeiner und zweckmäßiger so verfahren, daß man eine endliche Zahl beliebiger homogener Ellipsoide mit gleichem Mittelpunkt in der Sonne übereinanderlegt und die Dichtigkeit dieser Ellipsoide ebenso wie ihre Lage und Größenverhältnisse so wählt, wie den darzustellenden Anomalien in den Bewegungen der inneren Planeten angemessen ist. Die einzelnen Ellipsoide müssen so gelegt werden, daß ihre Oberflächen von keiner Planetenbahn geschnitten werden. Diesen Weg habe ich vor 13 Jahren beschritten, mußte damals aber den Abschluß meiner Rechnungen aufgeben, da die Newcombschen Zahlen noch nicht vorlagen, somit irgendwelche Handhabe zu einer Prüfung nicht vorhanden war.

4.

Man muß also die säkularen Störungen, denn diese kommen allein in Betracht, in angemessener Form berechnen, welche ein homogenes Rotationsellipsoid auf innere und äußere planetarisch bewegte Punkte ausübt. Zu diesem Zwecke ist der säkulare Teil des Potentiales eines homogenen aber beliebig stark abgeplatteten Ellipsoides abzuleiten. Bei dieser Rechnung kann man von den Potentialen V_a und V_i eines abgeplatteten Rotationsellipsoids mit den Axen a, a und b und der homogenen Dichtigkeit q auf äußere und innere Punkte in der integrierten Form ausgehen. Viel einfacher ist es aber, wenn man zuerst die Ausdrücke unter dem Integral entwickelt und dann erst die Integration ausführt, wobei nur bekannte Formeln anzuwenden sind. Beide Methoden geben selbstverständlich übereinstimmende Resultate.

Ist noch k die Gaußsche Konstante und setzt man:

$$\frac{V}{k^2 \pi q a^2 b} = \Omega,$$

so ist bekanntlich für äußere Punkte:

$$\Omega_a = \int_{\lambda_1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2 + y^2}{a^2 + \sigma} - \frac{z^2}{b^2 + \sigma}\right) \cdot \frac{d\sigma}{(a^2 + \sigma)\sqrt{b^2 + \sigma}},$$

wo λ_1 bestimmt ist durch die Gleichung:

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2 + \lambda_1} + \frac{z^2}{b^2 + \lambda_1} = 1.$$

Für innere Punkte ergibt sich Ω_i, wenn in Ω_a $\lambda_1 = 0$ gesetzt wird. Setzt man hierin noch:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

so wird also:

$$\Omega_a = \int_{\lambda_1}^{\infty} \left(1 - \frac{r^2}{a^2 + \sigma} - \frac{z^2 (a^2 - b^2)}{(a^2 + \sigma)(b^2 + \sigma)}\right) \frac{d\sigma}{(a^2 + \sigma)(\sqrt{b^2 + \sigma})} \qquad (1)$$

und:

$$\frac{r^2}{a^2 + \lambda_1} + \frac{z^2 \cdot (a^2 - b^2)}{(a^2 + \lambda_1)(b^2 + \lambda_1)} = 1. \qquad (2)$$

Für innere Punkte ist dagegen das zugehörige Potential:

$$\Omega_i = \int_0^{\infty} \left[1 - \frac{r^2}{a^2 + \sigma} - \frac{z^2 (a^2 - b^2)}{(a^2 + \sigma)(b^2 + \sigma)}\right] \frac{d\sigma}{(a^2 + \sigma)\sqrt{b^2 + \sigma}}.$$

Die Berechnung der säkularen Störungen, welche die inneren Planeten durch diese Potentiale erleiden, kann nun dadurch ausgeführt werden, daß man die in den bekannten Ausdrücken für diese Störungen vorkommenden Differentialquotienten von Ω nach den Elementen bildet und dann die Integrale in Bezug auf den ganzen Umkreis der mittleren Anomalie auf mechanischem Wege ermittelt. In einem gegebenen speziellen Falle wäre dieses Verfahren rechnerisch vielleicht das einfachere. Will man aber wiederholt ähnliche

Rechnungen mit abgeänderten Daten ausführen, dann ist es angemessen, die Unbequemlichkeit einer allgemeinen analytischen Entwicklung nicht zu scheuen.

Im vorliegenden Falle, wo es sich um die inneren Planeten handelt, dürfen nun die Bahnexzentrizitäten und die Bahnneigungen gegen die Ekliptik oder andere gegen sie nicht beträchtlich geneigte Ebenen als kleine Größen betrachtet werden, nach deren Potenzen brauchbare Entwicklungen von Ω fortschreiten werden. Für die Planeten Venus, Erde und Mars wird man dann, da es sich doch nur um mäßig genaue Entwicklungen handelt, bei den Gliedern zweiter Ordnung stehen bleiben können. Es ist leicht einzusehen, daß die Endresultate kaum wesentlich sich ändern werden, wenn man auch in Bezug auf die Merkurbahn dieselbe Einschränkung der Entwicklung gelten läßt und ich habe vorläufige Rechnungen tatsächlich so ausgeführt. Jetzt soll die Entwicklung auf breiterer Grundlage ausgeführt werden und zwar so, daß auch für Merkur die größten Glieder bis auf 3 bis 4 Stellen genau herauskommen.

Im folgenden wird die sogenannte Elliptizität λ:

$$\lambda^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2} \tag{3}$$

eingeführt. Damit bestimmt sich der hier in Frage kommende Wert von λ_1 nach (2):

$$\lambda_1 + b^2 = \frac{r^2 - \lambda^2 b^2}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{(r^2 + \lambda^2 b^2)^2 + 4 z^2 \lambda^2 b^2}.$$

Bezeichnet man mit a_1 die mittlere Entfernung des in Betracht zu ziehenden Planeten und setzt man:

$$r^2 = \varrho = a_1^2 + u,$$

so wird u eine kleine Größe sein und es soll also das Potential Ω nach Potenzen und Produkten von u und $z^2 = \zeta$ entwickelt werden.

Bezeichnet man die Werte der Differentialquotienten für $u = 0$ und $z = 0$ durch Hinzufügung des Index 0, so wird:

$$
\left.\begin{aligned}
\Omega = \Omega_0 + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \varrho}\right)_0 u + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \zeta}\right)_0 \cdot z^2 \\
+ \left[\left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \varrho^2}\right)_0 u^2 + 2\left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \varrho \, \partial \zeta}\right)_0 u z^2 + \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \varrho^2}\right)_0 z^4\right] \frac{1}{1 \cdot 2} \\
+ \left\{\left(\frac{\partial^3 \Omega}{\partial \varrho^3}\right)_0 u^3 + 3\left(\frac{\partial^3 \Omega}{\partial \varrho^2 \, \partial \zeta}\right)_0 u^2 z^2 + 3\left(\frac{\partial^3 \Omega}{\partial \varrho \, \partial \zeta^2}\right)_0 u z^4 \right. \\
\left. + \left(\frac{\partial^3 \Omega}{\partial \zeta^3}\right) \cdot z^6 \right\} \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \\
+ - - - - - - - - - -
\end{aligned}\right\} \quad (4)
$$

Bei der Differentiation des Integrals für Ω_a kann man die Grenze λ_1 konstant halten, weil für $\sigma = \lambda_1$ der Ausdruck unter dem Integral nach (2) verschwindet, wodurch die weitere Ausrechnung wesentlich vereinfacht wird. Das Glied:

$$
\Omega_0 = \mathrm{I} - a_1^2 \, \mathrm{II},
$$

wo:

$$
\mathrm{I} = \int_{\lambda_1^0}^{\infty} \frac{d\sigma}{(a^2 + \sigma)\sqrt{b^2 + \sigma}}; \quad \mathrm{II} = \int_{\lambda_1^0}^{\infty} \frac{d\sigma}{(a^2 + \sigma)^2 \sqrt{b^2 + \sigma}},
$$

kann man ganz fortlassen, da es nur vom Bahnelement a_1 abhängt und Differentialquotienten nach a_1 im folgenden nicht vorkommen. Es tritt noch das Integral:

$$
\mathrm{III} = \int_{\lambda_1^0}^{\infty} \frac{d\sigma}{(a^2 + \sigma)^2 (b^2 + \sigma)^{\frac{3}{2}}}
$$

auf. Hier ist λ_1^0 der Wert von λ_1 für $u = z^2 = 0$, also:

$$
(\lambda_1^0)^2 + b^2 = a_1^2 - a^2 + b^2 = a_1^2 - \lambda^2 b^2.
$$

Am einfachsten für die numerische Rechnung scheinen sich die Formeln zu gestalten, wenn man:

$$
\xi^2 = \frac{\lambda^2 b^2}{a_1^2 - \lambda^2 b^2} \tag{5}
$$

einführt, woraus u. a. folgt:

$$a_1^2 = \lambda^2 b^2 \cdot \frac{1+\xi^2}{\xi^2}.$$

Die oben erwähnten Integrale I, II und III sind bekanntlich leicht ausführbar und man findet:

$$\mathrm{I} = \frac{2}{b\lambda} \operatorname{arctg} \xi; \quad \mathrm{II} = \frac{1}{b^3 \lambda^3}\left[\operatorname{arctg} \xi - \frac{\xi}{1+\xi^2}\right]$$

$$(a^2 - b^2)\ \mathrm{III} = -\frac{3}{b^3 \lambda^3} \operatorname{arctg} \xi + \frac{1}{b^3 \lambda^3} \cdot \frac{3\xi + 2\xi^3}{1+\xi^2}.$$

Ich habe im folgenden noch die Bezeichnung benutzt:

$$\left.\begin{aligned} \Psi(\xi) &= 3 \operatorname{arctg} \xi - \frac{3\xi + 2\xi^3}{1+\xi^2} \\ \Psi_1(\lambda) &= 3\left(\operatorname{arctg} \lambda - \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Die Berechnung des Differentialquotienten in (4) bietet nun höchstens einige Umständlichkeiten, aber keine Schwierigkeiten dar. Es wird genügen, ihre Werte in der definitiven Form anzuführen.

$$\left(\frac{\partial^1 \Omega_a}{\partial \varrho}\right)_0 = -\frac{1}{3 b^3 \lambda^3}\left[\Psi(\xi) + 2\xi \frac{\lambda^2 b^2}{a_1^2}\right]$$

$$\left(\frac{\partial^2 \Omega_a}{\partial \varrho^2}\right)_0 = \quad \frac{\xi}{\lambda b a_1^4}$$

$$\left(\frac{\partial^3 \Omega_a}{\partial \varrho^3}\right)_0 = -\frac{\xi}{\lambda b a_1^6}\left[\frac{5}{2} + \frac{1}{2}\xi^2\right]$$

$$\left(\frac{\partial^4 \Omega_a}{\partial \varrho^4}\right)_0 = +\frac{\xi}{\lambda b a_1^8}\left[\frac{35}{4} + \frac{7}{2}\xi^2 + \frac{3}{4}\xi^2\right]$$

$$\left(\frac{\partial^5 \Omega_a}{\partial \varrho^5}\right)_0 = -\frac{\xi}{\lambda b a_1^{10}}\left[\frac{315}{8} + \frac{189}{8}\xi^2 + \frac{81}{8}\xi^4 + \frac{15}{8}\xi^6\right]$$

$$\left(\frac{\partial^6 \Omega_a}{\partial \varrho^6}\right)_0 = +\frac{\xi}{\lambda b a_1^{12}}\left[\frac{3465}{16} + \frac{693}{4}\xi^2 + \frac{891}{8}\xi^4 + \frac{165}{4}\xi^6 + \frac{105}{16}\xi^8\right].$$

Für die Differentialquotienten nach ζ findet man:

$$\left(\frac{\partial\ \Omega_a}{\partial\ \zeta}\right)_0 = \quad \frac{1}{b^3\ \lambda^3}\ \Psi'(\xi)$$

$$\left(\frac{\partial^2 \Omega_a}{\partial\ \zeta^2}\right)_0 = + \frac{1}{b\ \lambda\ a_1^4}\ \xi^5$$

$$\frac{\partial^2 \Omega_a}{\partial\ \zeta\ \partial\ \varrho} = + \frac{1}{b\ \lambda\ a_1^4}\ \xi^3$$

$$\frac{\partial^3 \Omega_a}{\partial\ \zeta\ \partial\ \varrho^2} = - \frac{\xi^3}{b\ \lambda\ a_1^6}\left[\frac{7}{2} + \frac{3}{2}\ \xi^2\right]$$

$$\frac{\partial^3 \Omega_a}{\partial\ \zeta^2\ \partial\ \varrho} = - \frac{\xi^5}{\lambda\ b\ a_1^6}\left[\frac{9}{2} + \frac{5}{2}\ \xi^2\right]$$

$$\frac{\partial^4 \Omega_a}{\partial\ \zeta\ \partial\ \varrho^3} = + \frac{\xi^3}{b\ \lambda\ a_1^8}\left[\frac{63}{4} + \frac{27}{2}\ \xi^2 + \frac{15}{4}\ \xi^4\right]$$

$$\frac{\partial^4 \Omega_a}{\partial\ \zeta^2\ \partial\ \varrho^2} = + \frac{\xi^5}{\lambda\ b\ a_1^8}\left[\frac{99}{4} + \frac{55}{2}\ \xi^2 + \frac{35}{4}\ \xi^4\right]$$

$$\frac{\partial^5 \Omega_a}{\partial\ \zeta\ \partial\ \varrho^4} = - \frac{\xi^3}{\lambda\ b\ a_1^{10}}\left[\frac{693}{4} + \frac{891}{8}\ \xi^2 + \frac{495}{8}\ \xi^4 + \frac{105}{8}\ \xi^6\right].$$

— — — — — — — — — — —

In Rücksicht auf die im Folgenden auftretenden Verhältnisse, denen zufolge bei Merkur zwar u beträchtlich, dagegen aber ζ sehr klein und bei den übrigen inneren Planeten, wo ζ merkbarer als u ist, reichen die angegebenen Werte zu einer für die vorliegenden Zwecke genügend sicheren Berechnung der säkularen Störungen sicherlich aus. Es sind nunmehr die säkularen Teile der Potenzen und Produkte von u und ζ zu berechnen. Ich bezeichne diese durch ein vorgesetztes S. Am einfachsten gewinnt man in den vorliegenden Fällen den säkularen Teil einer Funktion f von u und ζ durch Ausführung des Integrals:

$$S f(u, \zeta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(u, \zeta) \cdot (1 - e \cos E)\, d E,$$

worin selbstverständlich:

$$u = r^2 - a_1^2 \text{ und } \zeta$$

durch die exzentrische Anomalie E auszudrücken sind.

Auf diesem Wege findet man:

$$\left.\begin{aligned}
S(u) &= \frac{3}{2} a_1^2 e^2 \\
\frac{1}{1\cdot 2} S(u^2) &= a_1^4 \left(e^2 + \frac{15}{16} e^4\right) \\
\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} S(u^3) &= a_1^6 \left(\frac{5}{4} e^4 + \frac{35}{96} e^6\right) \\
\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} S(u^4) &= a_1^8 \left(\frac{1}{4} e^4 + \frac{35}{48} e^6 + \frac{105}{1024} e^8\right) \\
\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} S(u^5) &= a_1^{10} \left(\frac{7}{24} e^6 + \frac{35}{128} e^8 \ldots\right) \\
\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} S(u^6) &= a_1^{12} \left(\frac{1}{36} e^6 \ldots\right).
\end{aligned}\right\}$$

Bei der Entwicklung der säkularen Teile von Größen, welche mit Potenzen von z^2 behaftet sind, soll bis zu Gliedern 6. Ordnung gegangen werden, wobei indessen Glieder von der Ordnung $z^4 e^2$ und z^6 und kleinere als unmerklich fortzulassen sind. Man kann nun weiter z in die Form bringen:

$$z = B_1 r \sin v + C_1 r \cos v,$$

wo v die wahre Anomalie bedeutet. Man kann dann sofort z als Funktion der exzentrischen Anomalie darstellen und die obigen Integrale für $f(u\,\zeta) = u^m z^n$ entwickeln. Bis zum angegebenen Genauigkeitsgrad findet sich dann:

$$\begin{aligned}
S(z^2) &= a_1^2 \left[B_1^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^2\right) + C_1^2 \left(\frac{1}{2} + 2 e^2\right)\right] \\
\frac{1}{2} S(z^2) &= a_1^4 \cdot \frac{3}{16} (B_1^2 + C_1^2)^2 \\
S(z^2 u) &= a_1^4 e^2 \left[B_1^2 \frac{3}{8} + C_1^2 \frac{25}{8} - e^2 B_1^2 \frac{3}{8} + e^2 C_1^2 \cdot \frac{9}{4}\right] \\
\frac{1}{2} S(z^2 u^2) &= a_1^6 e^2 \left[B_1^2 \frac{1}{4} + C_1^2 \frac{3}{4} - e^2 B_1^2 \frac{3}{32} + e^2 C_1^2 \frac{153}{32}\right]
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{6} S(z^2 u^3) = a_1^8 \, e^4 \left[B_1^2 \frac{5}{24} + C_1^2 \frac{49}{24} \right]$$

$$\frac{1}{24} S(z^2 u^4) = a_1^{10} \, e^4 \left[B_1^2 \frac{1}{24} + C_1^2 \frac{5}{24} \right].$$

Bei der Zusammenfassung des Resultats für Ω_a nach Formel (4) empfiehlt sich folgende Schreibweise. Es sei q_0 die mittlere Dichtigkeit der Sonnenkugel, ϱ ihr Radius, n_1 die mittlere Bewegung des Planeten und $\mu = k^2$ die Anziehungskonstante, c eine passend zu wählende ganze Zahl derart, daß nicht zu große und nicht zu kleine Werte für die Koeffizienten hervorgehen. Ich setze dann:

$$\left.\begin{aligned} \beta &= \frac{3}{4} \cdot \frac{q}{q_0} \cdot \frac{1+\lambda^2}{\lambda^3} 10^c \ldots \\ A_1 &= \left(\frac{a_1}{\varrho}\right)^3 \cdot \beta \cdot 10^{-c} \end{aligned}\right\} . \qquad (7)$$

Dann ergibt sich für die in den Störungsformeln für die Elemente vorkommende Größe $\frac{a_1 n_1}{\mu} V_a$ folgender Ausdruck, wobei, wie schon erwähnt, die Glieder, welche nur das Element a_1 enthalten, der Einfachheit wegen fortgelassen worden sind:

$$\left.\begin{aligned} S\left(\frac{a_1 n}{\mu} V_a\right) = {} & A_1 n_1 \left\{ \Psi(\xi) \left[-\frac{e^2}{2} + \frac{1}{2}(B_1^2 + C_1^2) + \left(2C_1^2 - \frac{1}{2}B_1^2\right) e^2 \right] \right\} \\ & + A_1 n_1 \frac{\xi^5}{1+\xi^2} \left\{ \frac{e^4}{4}\left(1 + \frac{3}{4}\xi^2\right) + e^6 \left[\frac{7}{24} + \frac{11}{16}\xi^2 + \frac{115}{192}\xi^4 \right.\right. \\ & \left. + \frac{35}{192}\xi^6 \right] + (B_1^2 + C_1^2)^2 \cdot \frac{3}{16}\xi^2 \\ & - e^2 B_1^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{8}\xi^2\right) + e^2 C_1^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{9}{8}\xi^2\right) \\ & - \frac{e^4 B_1^2}{64}(24 + 108\,\xi^2 + 115\,\xi^4 + 35\,\xi^6) \\ & \left. - \frac{e^4 C_1^2}{64}(24 + 180\,\xi^2 + 335\,\xi^4 + 175\,\xi^6) \right\}. \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Für innere Punkte stellt sich die Endformel völlig streng in sehr viel einfacherer Gestalt dar. Man findet sofort:

$$\left.\begin{aligned}\frac{a_1 n}{\mu} S(V_i) = A_1 n_1 \Big\{ -\tfrac{1}{2} e^2 \Psi_1(\lambda) + \tfrac{1}{2}(B_1^2 + C_1^2)\,\Psi(\lambda) \\ + e^2 (2 C_1^2 - \tfrac{1}{2} B_1^2)\,\Psi(\lambda) \Big\}\end{aligned}\right\}. \quad (9)$$

Um alles beisammen zu haben sind nun noch die Größen B_1 und C_1 und ihre Differentialquotienten nach den Elementen: Länge des Perihels π, Länge des aufsteigenden Knoten Ω, Neigung der Bahnebene i zu berechnen, welche Elemente sich in üblicher Weise auf die Ekliptik und den Widderpunkt beziehen. Da sich z auf die Äquatorebene des Ellipsoids bezieht, ist:

$$z = r \sin i_1 \sin(v + \pi - \Omega - \delta) = B_1 r \sin v + C_1 r \cos v.$$

Hierbei bedeutet i_1 die Neigung der Ebene der Planetenbahn gegen den Äquator des Ellipsoids, δ ist die Winkeldistanz des aufsteigenden Knotens der Planetenbahn auf der Äquatorebene von dem aufsteigenden Knoten derselben Bahnebene auf der Ekliptik in demselben Sinne wie π und Ω gezählt. Nennt man noch J die Neigung des Äquators und Φ die Länge seines aufsteigenden Knotens in Bezug auf die Ekliptik. so sind die drei Winkel in dem von den drei in Frage kommenden Kreisen gebildeten sphärischen Dreieck: i_1, J und $180^0 - i$ und die den zwei ersten Winkeln gegenüberliegenden Seiten und $\Omega - \Phi$ und δ. Man hat demnach:

$$\left.\begin{aligned}\sin i_1 \sin\delta &= \sin J \sin(\Omega - \Phi) \\ \sin i_1 \cos\delta &= \cos J \sin i - \sin J \cos i \cos(\Omega - \Phi)\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

und damit ergibt sich sofort:

$$B_1 = \sin i_1 \cos(\pi - \Omega - \delta); \quad C_1 = \sin i_1 \sin(\pi - \Omega - \delta). \quad (11)$$

Die zweite Formel (10) wird für kleine Werte von $J - i$ und $\Omega - \Phi$, wie solche in der Tat bei Merkur vorkommen, praktisch unbrauchbar. Sie ist dann durch:

$$\sin i_1 \cos\delta = \sin(i - J) + 2 \sin J \cos i \sin^2 \frac{\Omega - \Phi}{2}$$

zu ersetzen.

Aus (11) ergibt sich nun sehr einfach:

$$\frac{\partial B_1}{\partial \pi} = -C_1; \quad \frac{\partial C_1}{\partial \pi} = +B_1$$

$$\frac{\partial B_1}{\partial i} = \cos i_1 \cos(\pi - \Omega); \quad \frac{\partial C_1}{\partial i} = \cos i_1 \sin(\pi - \Omega)$$

und, was auch zur Kontrolle benutzt werden kann:

$$\frac{\partial (B_1^2 + C_1^2)}{\partial i} = 2 \sin i_1 \cos i_1 \cos \delta.$$

Ferner ergibt eine einfache Rechnung:

$$\frac{\partial B_1}{\partial \Omega} = + C_1 + \sin J \sin(\pi - \Phi) - 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} i \sin i_1 \sin \delta \cos(\pi - \Omega)$$

$$\frac{\partial C_1}{\partial \Omega} = - B_1 - \sin J \cos(\pi - \Phi) - 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} i \sin i_1 \sin \delta \sin(\pi - \Omega).$$

Als Kontrollformel wird man die sehr einfache Relation zu verwenden haben:

$$\frac{\partial (B_1^2 + C_1^2)}{\partial \Omega} = 2 \sin i_1 \cos i_1 \sin i \cdot \sin \delta.$$

Nunmehr sind alle im Folgenden benutzten Formeln abgeleitet.

Es sei gleich bemerkt, daß für die innern Planeten folgende Daten benutzt worden sind, wobei das Jahrhundert als Zeiteinheit angesetzt ist:

	i	π	Ω	$\log e$	$\log \left(\frac{a_1}{\varrho}\right)^3 n_1$
Merkur	7°003	75°896	47°147	9.3131	14.4912
Venus	3.394	130.164	75.780	7.8320	14.8984
Erde	—	101.219	—	8.2241	15.1095
Mars	1.850	334.218	48.786	8.9699	15.3841.

Die in Frage kommenden Säkularänderungen der Planetenbahnelemente ergeben sich aus den bekannten Gleichungen:

$$\frac{de}{dt} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \cdot \frac{\partial}{\partial \pi} S\left(\frac{a_1 n_1 V}{\mu}\right)$$

$$e\frac{d\pi}{dt} = +\sqrt{1-e^2} \cdot \frac{\partial}{\partial e} S\left(\frac{a_1 n_1 V}{\mu}\right) + \frac{e}{\sqrt{1-e^2}} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} i \frac{\partial}{\partial i} S\left(\frac{a_1 n_1 V}{\mu}\right)$$

$$\sin i \cdot \frac{d\Omega}{dt} = +\frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \cdot \frac{\partial}{\partial i} S\left(\frac{a_1 n_1 V}{\mu}\right)$$

$$\frac{di}{dt} = -\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} i}{\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial}{\partial \pi} S\left(\frac{a_1 n_1 V}{\mu}\right) - \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \cdot \frac{1}{\sin i} \cdot \frac{\partial}{\partial \Omega} S\left(\frac{a_1 n_1 V}{\mu}\right).$$

5.

Will man nun die angegebenen Formeln zur Darstellung der empirischen Glieder in den säkularen Bewegungen der Bahnelemente der inneren Planeten benutzen, so hat man, den früheren Bemerkungen gemäß, eine Anzahl konzentrischer Ellipsoide, die mit 1, 2, 3 etc. bezeichnet werden mögen, passend zu wählen. Unbekannt sind zunächst die Dichtigkeiten innerhalb der einzelnen Ellipsoide q_1, q_2, q_3 etc., ebenso die Elliptizitäten $\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3$ etc., die Neigungen $J_1\ J_2$.., die Knotenlängen $\Phi_1\ \Phi_2$ etc. ihrer Äquatorebenen. Selbstverständlich wird man die Zahl der Unbekannten möglichst klein wählen, denn eine durch eine genügend große Anzahl von Unbekannten erzwungene Darstellung der empirisch gegebenen Daten hätte keine Bedeutung. Sind die einzelnen q bekannt, so muß die Gesamtdichtigkeit innerhalb des ersten Ellipsoids $q_1 + q_2 + q_3 + \cdots$ angenommen werden. Zwischen dem ersten und zweiten Ellipsoid herrscht die Dichtigkeit $q_2 + q_3 + \cdots$, zwischen dem zweiten und dritten $q_3 + q_4 + \cdots$ u. s. f. Zu bemerken ist noch, daß die Massen innerhalb der Sonnenkugel eigentlich nicht in Betracht gezogen werden sollten. Indessen tritt, wenn hierauf nicht Rücksicht genommen wird, nur eine Vergrößerung der Sonnenmasse ein, was natürlich umsomehr gleichgültig ist, als sich die einzelnen q gegenüber der Sonnendichtigkeit q_0 verschwindend klein ergeben.

Ursprünglich hatte ich fünf Ellipsoide mit den großen Halbachsen:

$$a_1 = 0.10, \quad 0.17, \quad 0.24, \quad 0.60, \quad 1.20$$

angenommen. Die Rechnung ergibt aber, daß die Koeffizienten, welche die den drei ersten Ellipsoiden entsprechenden Beiträge zu den säkularen Veränderungen bestimmen, so nahe proportional verlaufen, daß gar nicht daran gedacht werden kann, die einzelnen $q_1\, q_2\, q_3$ zu bestimmen. Es ist demnach so gut wie ganz gleichgültig, wie die Dichtigkeit der Massenverteilung in der Nähe der Sonne bis zu etwa $^2/_3$ der Merkurentfernung verläuft. Man wird deshalb in jedem Falle mit der Annahme nur eines Ellipsoides, das zwischen Sonne und Merkurbahn liegt, auskommen müssen und es ist dabei ziemlich gleichgültig, wie groß man das zugehörige a wählt. Ich habe im Folgenden nur das Ellipsoid 3 beibehalten. Ebenso zeigt der Verlauf der Koeffizienten, daß das Ellipsoid 4 keinen nennenswerten Beitrag zur Darstellung der empirischen Glieder liefern kann und es fast ganz gleichgültig ist, ob man dieses beibehält oder nicht. Ich habe es schließlich fortgelassen, so daß nur die beiden Ellipsoide 3 und 5 übrig bleiben. Jedenfalls ergibt sich aus dem Gesagten, daß die Massenverteilung im Zodiakallicht nur in ganz allgemeinen Umrissen bestimmbar ist, was in jedem Falle nicht zu Ungunsten der ganzen Hypothese zu sprechen scheint. —

Was die Elliptizitäten λ betrifft, so zeigt sich ebenfalls, daß dieselben innerhalb weiter Grenzen willkürlich angenommen werden dürfen, ohne eine wesentliche Änderung in der Darstellung der empirischen Glieder zu veranlassen; nicht einmal die Werte der Unbekannten ändern sich sehr merklich. Da zunächst über die Dichtigkeitsflächen im Zodiakallicht nichts näheres angegeben werden kann und nur die Annahme, daß die Abplattungen sehr beträchtlich sind, einige Sicherheit hat, ist man tatsächlich zu diesen willkürlichen Annahmen gezwungen. Wichtig ist es, daß eine solche Willkür keine große Bedeutung hat. Ich habe nun für das Ellipsoid 3 $\lambda = 10$, für das Ellipsoid 5 dagegen $\lambda = 5$ gewählt. Auf diese Weise ist

erreicht, daß die Erdbahn ganz innerhalb des Ellipsoids 5 liegt, was bei der Aufstellung der Formeln angenommen worden ist.

Die Lage der Äquatorebenen der Ellipsoide ist, wie von vornherein zu erwarten, nicht so unbestimmt, wie die anderen Daten. Es zeigt sich, daß die Lage des Ellipsoids 3 in ziemlich bestimmter Weise angenommen werden muß, dagegen die von 5, wegen des geringen Einflusses der hieraus hervorgehenden Störungen, ziemlich gleichgültig ist. Wichtig und nötig ist zu einer befriedigenden Darstellung der empirisch gefundenen Newcombschen Glieder die Einführung einer Drehung des in der Astronomie üblichen Koordinatensystems gegen ein im Sinne der Mechanik sogenanntes absolutes oder besser gesagt, gegen ein Inertialsystem im Sinne der Untersuchungen Herrn E. Andings[1]) und meiner eigenen.[2])

Ich hatte mich bei einer provisorischen Rechnung, deren Resultate ich in der Versammlung der Astronomischen Gesellschaft in Jena[3]) vortrug, damit begnügt, die Störungsfunktion V_a bis auf Glieder zweiter Ordnung inklusive in Bezug auf Neigung und Exzentrizitäten zu benutzen, ein Verfahren, dessen Zulässigkeit wohl von Anfang an überblickt werden kann, das durch die folgenden Mitteilungen aber unzweifelhaft bestätigt wird. Einen detaillierten Nachweis über diese Rechnungen zu geben, hätte kein Interesse mehr, da sie jetzt nur noch als orientierende Grundlage für das Folgende benutzt worden sind. Ich begnüge mich deshalb hier nur die damals erhaltenen Resultate anzugeben.

Es gelang eine durchaus befriedigende Darstellung durch die Einführung von fünf Unbekannten, nämlich: Neigung J und Knoten Φ des Äquators des Ellipsoids 3 in Bezug auf die Ekliptik, die zwei Dichtigkeiten q_3 und q_5 und schließlich der Rotations-

---

[1]) E. Anding, Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Band VI 2, 1905.

[2]) Über die sogenannte absolute Bewegung. Sitzungsberichte der Münchener Akademie, 1906.

[3]) Vierteljahrsschrift der Astron. Gesellschaft, Jahrgang 41.

komponente r, welche sich auf die Orientierung des empirischen Koordinatensystems der Astronomie bezieht und die hundertjährige Drehung dieses Systems um eine auf der Ekliptik senkrechten Achse bedeutet. Es ist von vornherein nach der Art, wie sich die Orientierung des astronomischen Koordinatensystems mit der Zeit entwickelt hat, recht wenig wahrscheinlich, daß die beiden anderen Rotationskomponenten p und q außer r einen nennenswerten Betrag haben könnten. Deshalb wurden die p und q gar nicht eingeführt, weil sonst die Zahl der Unbekannten größer als wünschenswert geworden wäre. So handelte es sich um die Bestimmung von fünf Unbekannten aus zehn Bedingungsgleichungen und das Überwiegen der letzteren ist durchaus genügend. Bei der Beurteilung dieses Überschusses ist es bekanntlich ganz gleichgültig, ob die darzustellenden empirischen Glieder groß oder klein sind. Eine säkulare Veränderung der Exzentrizitäten wird erst durch die höheren Potenzen von Exzentrizität und Neigung, als in Betracht gezogen worden sind, erzeugt und man muß sich auf die obige Bemerkung beziehen, daß diese ebenfalls von Newcomb abgeleiteten Veränderungen zunächst wenigstens unberücksichtigt bleiben können.

Für die fünf genannten Unbekannten nebst ihren mittleren Fehlern ergab sich nun:

$$J = 6^\circ\!.95 \pm 0^\circ\!.97 \qquad \Phi = 40^\circ\!.03 \pm 7^\circ\!.3$$

$$\frac{q_3}{q_0} = (2.52 \pm 0.15)\,10^{-11} \quad \frac{q_5}{q_0} = (2.60 \pm 2.19)\,10^{-15}$$

$$r = 5''\!.693 \pm 1''\!.68.$$

Hierbei wurde angenommen, daß der Äquator des Ellipsoids 5 mit dem Sonnenäquator zusammenfällt.

Für die Rechnung mit den im Vorigen gegebenen genaueren Formeln habe ich nun für J und Φ, sowie für die Lage des Ellipsoids 5 dieselben Annahmen gemacht, die eben erwähnt worden sind, da schon so ein guter Anschluß an die empirischen Daten in Aussicht stand. Als zu bestimmende Unbekannte wurde statt q_3 und q_5 eingeführt:

$$\beta_3 = \tfrac{3}{4}\frac{q_3}{q_0}\frac{1+\lambda^2}{\lambda^3}10^{12}; \quad \lambda = 10$$

$$\beta_5 = \tfrac{3}{4}\frac{q_5}{q_0}\frac{1+\lambda^2}{\lambda^3}10^{14}: \quad \lambda = 5.$$

Für das Ellipsoid 3, d. h. $a = 0.24$, ergibt sich nun:

	ξ	$\log \Psi(\xi)$
Merkur	0.7839	$8.7692_n - 10$
Venus	0.3498	$7.2360_n - 10$
Erde	0.2459	$6.5196_n - 10$
Mars	0.1587	$5.5894_n - 10.$

Ferner ist:

$$\log \Psi(10) = 1.1955_n, \quad \log \Psi_1(10) = 0.6145.$$

Für das Ellipsoid 5 habe ich aus äußeren Gründen, weil die früheren Rechnungen beim Mars mit einem Näherungswert für ξ ausgeführt worden waren und ich wegen der Kontrolle denselben Wert für ξ benutzen wollte, angenommen $a = 1.2235$ (früher 1.20). Hiermit ergibt sich für Mars:

$$\xi = 1.2773; \quad \log \Psi(\xi) = 9.5057_n$$

und:

$$\log \Psi(5) = 0.7833_n; \quad \log \Psi_1(\lambda) = 0.5494.$$

Mit diesen Daten kann nun an die Ausrechnung der im Artikel 4 gegebenen Formeln geschritten werden. Diese Ausrechnung ist nicht ganz einfach. Ich hoffe indessen mich durch wiederholte Kontrollen und wo solche nur auf diesem Wege zu erhalten waren, durch doppelte Rechnung vor Rechenfehlern geschützt zu haben, so daß ich die Sicherheit des Endergebnisses einigermaßen verbürgen kann. Die Mitteilung der Einzelheiten der Rechnung wäre danach wohl überflüssig und ich führe nur das Endresultat an. Zunächst ist zu bemerken, daß auch jetzt die Säkularstörungen in den Exzentrizitäten vollständig unmerklich sind. Das Weitere kann in die zehn Bedingungsgleichungen für die drei Unbekannten β_3, β_5, r zusammengefaßt werden, wobei die in Klammern gesetzten Zahlen

Logarithmen bedeuten und der Strich über der Kennziffer eine Verminderung um 10 andeutet:

$$
\begin{array}{llllllr}
 & & & & & & \sqrt{g} \\
c\,\dfrac{d\pi}{dt} \left\{ \begin{array}{l} \text{Merkur} \\ \text{Venus} \\ \text{Erde} \\ \text{Mars} \end{array} \right. &
\begin{array}{l} [0.6505\ ]\,\beta_3 + \\ [7.9629\ ] \\ [7.8418\ ] \\ [7.9369\ ] \end{array} &
\begin{array}{l} [0.3538_n]\,\beta_5 + \\ [\bar{9}.2878_n] \\ [\bar{9}.8834_n] \\ [\bar{9}.8403\ ] \end{array} &
\begin{array}{l} [9.3131]\,r \\ [7.8338] \\ [\bar{8}.2240] \\ [\bar{8}.9699] \end{array} &
\begin{array}{l} = +8''.48 \\ = -0.05 \\ = +0.10 \\ = +0.75 \end{array} & &
\begin{array}{r} 3 \\ 4 \\ 7 \\ 3 \end{array} \\[2ex]
\sin i\,\dfrac{d\Omega}{dt} \left\{ \begin{array}{l} \text{Merkur} \\ \text{Venus} \\ \text{Mars} \end{array} \right. &
\begin{array}{l} [8.4728_n] \\ [\bar{8}.7263\ ] \\ [7.9285\ ] \end{array} &
\begin{array}{l} [\bar{9}.5147_n] \\ [0.4791\ ] \\ [9.7993\ ] \end{array} &
\begin{array}{l} [\bar{9}.0861] \\ [\bar{8}.7723] \\ [\bar{8}.5091] \end{array} &
\begin{array}{l} = +0.61 \\ = +0.60 \\ = +0.30 \end{array} & &
\begin{array}{r} 2 \\ 6 \\ 5 \end{array} \\[2ex]
\dfrac{di}{dt} \left\{ \begin{array}{l} \text{Merkur} \\ \text{Venus} \\ \text{Mars} \end{array} \right. &
\begin{array}{l} [\bar{9}.5404\ ] \\ [\bar{8}.9815\ ] \\ [7.2369\ ] \end{array} &
\begin{array}{l} [0.0809_n] \\ [\bar{9}.2588\ ] \\ [9.6137_n] \end{array} & &
\begin{array}{l} = +0.38 \\ = +0.38 \\ = -0.01 \end{array} & &
\begin{array}{r} 1 \\ 3 \\ 5. \end{array}
\end{array}
$$

Die Gewichte g sind den von Newcomb angegebenen wahrscheinlichen Fehlern entsprechend auf ganze Quadratzahlen abgerundet worden.

Von einer weiteren Verbesserung der Größen J und Φ habe ich abgesehen, denn es ergibt sich, daß man eine fast genau gleiche Darstellung wie früher erhält, wenn man β_3 der Perihelbewegung des Merkurs und β_5 dem Glied im Venusknoten entsprechend annimmt:

$$\log \beta_3 = 0.2207, \quad \log \beta_5 = \bar{8}.7084.$$

Es ist nun weiter nicht möglich die Quadratsumme der übrigbleibenden Fehler merkbar, d. h. die Genauigkeit der vierstelligen Rechnung wesentlich übersteigend, zu verkleinern und man könnte also mit dem erhaltenen Resultat sich begnügen. Indessen schien es mir wünschenswert die mittleren Fehler der Unbekannten zu ermitteln. Aus diesem Grunde wurde eine Ausgleichung der zehn Bedingungsgleichungen mit drei Unbekannten ausgeführt. Diese ergab die folgenden Werte nebst ihren mittleren Fehlern:

$$\beta_3 = 1.654 \pm 0.077; \quad \beta_5 = 0.0477 \pm 0.0263$$
$$r = 5''.85 \pm 1''.22$$

und nunmehr ergibt sich folgende Darstellung, wobei ich der Übersichtlichkeit wegen die einzelnen, von β_3, β_5 und r herrührenden Glieder anführe und ihrer Summe die Newcombschen Daten gegenüberstelle:

		β_3	β_5	r	Rechnung	Newcomb		$N-R$	
$e\frac{d\pi}{dt}$	Merkur	+7."396	−0.108	+1.203	+8."49	+8."48	±0."43	−0."01	−0."01
	Venus	+0.015	−0.009	+0.040	+0.05	−0.05	0.25	−0.10	−0.10
	Erde	+0.012	−0.037	+0.098	+0.07	+0.10	0.13	+0.03	+0.01
	Mars	+0.014	+0.033	+0.546	+0.59	+0.75	0.35	+0.16	+0.19
$\sin i\,\frac{d\Omega}{dt}$	Merkur	−0.049	−0.016	+0.713	+0.65	+0.61	0.52	−0.04	−0.01
	Venus	+0.088	+0.144	+0.346	+0.58	+0.60	0.17	+0.02	0
	Mars	+0.014	+0.030	+0.189	+0.23	+0.03	0.22	−0.20	−0.18
$\frac{di}{dt}$	Merkur	+0.574	−0.057	—	+0.52	+0.38	0.80	−0.14	−0.11
	Venus	+0.159	+0.009	—	+0.17	+0.38	0.33	+0.21	+0.18
	Mars	+0.003	−0.020	—	−0.02	−0.01	0.20	+0.01	0

In der letzten Rubrik steht noch die Darstellung, wie sie die provisorische Rechnung geliefert hat. Ein irgendwelcher in Betracht zu ziehender Unterschied ist nicht vorhanden und der Umstand, daß die frühere Darstellung ein wenig besser ist, hat keine Bedeutung, weil er sofort verschwinden würde, wenn eine Neubestimmung von i und Φ unternommen würde, was natürlich gegenwärtig ein ganz unnötiges Unternehmen wäre.

Aus den obigen Zahlen β_3 und β_5 ergibt sich noch:

$$\frac{q_3}{q_5} = 2.18 \times 10^{-11}; \quad \frac{q_5}{q_0} = 0.31 \times 10^{-14}.$$

Die Gesamtmasse der ganzen Massenverteilung ist hiernach gleich 3.1×10^{-7} Sonnenmassen.

Die Dichtigkeit der Massenverteilung ist also selbst in den der Sonne am nächsten liegenden Partien ganz außerordentlich klein. Sie entspricht der Massenverteilung, die man erhält, wenn man einen Würfel Wasser von weniger als $^1/_3$ Meter Seitenlänge in einem Raum von 1 Kubikkilometer verteilt.

Was die Darstellung der Newcombschen empirischen Glieder betrifft, so ist dieselbe geradezu überraschend gut. Sämtliche Glieder werden innerhalb ihres wahrscheinlichen Fehlers durch die Rechnung dargestellt und mit Ausnahme des Gliedes in $\sin i \frac{d\Omega}{dt}$ bei Mars weit innerhalb des wahrscheinlichen Fehlers. Bedenkt man nun weiter, daß diese Darstellung gleich beim ersten Versuche gelungen ist, so wird man den erreichten Erfolg wohl kaum nur einem glücklichen Zufall zuschreiben. Die Sache liegt eben so, daß die gemachten allgemeinen Annahmen einen weiten Spielraum für die speziellen Zahlenangaben, die zu Grunde gelegt wurden, gestatten. Da eine Einwirkung der das Zodiakallicht bildenden Massen auf die Bewegung der inneren Planeten unter allen Umständen stattfinden muß und man, wie schon oben erwähnt, nur über die Größe und Art dieses Einflusses im Zweifel sein kann, da weiter in der durchgeführten Rechnung nirgends Zahlen auftreten, die nach irgend einer Richtung Bedenken erregen können, so ist mit einiger Sicherheit anzunehmen, daß die empirischen Glieder in der Bewegung der inneren Planeten tatsächlich auf die Massen des Zodiakallichts zurückzuführen sind.

Wesentlich für die gewonnene Darstellung ist die Lage des innersten Ellipsoides, die durch J und Φ bestimmt ist, während das Charakteristische in der Dichtigkeitsverteilung die schnelle Abnahme der Massendichtigkeit ist, die bereits in den Gegenden, wo sich die Merkurbahn befindet, eingetreten ist. Als ebenso wesentlich für die Darstellung der empirischen Glieder, mit Ausnahme des die Perihelbewegung des Merkur bestimmenden, hat sich die Einführung der Rotationsgröße r bewährt. Es war dies übrigens von vornherein zu erwarten. Was dieses r betrifft, wonach also eine säkulare Drehung des empirischen Koordinatensystems der Astronomie um das der Mechanik zu Grunde liegende im Betrag von 5″8 ± 1″2 im Jahrhundert stattfindet, so ist nicht uninteressant, daß sich sein Betrag gegen die früheren Darstellungen mit Ausschluß der Perihelbewegung und ohne Rücksicht auf die Einwirkungen der Massen

des Zodiakallichts nicht unwesentlich verkleinert hat. Ich habe a. a. O. darauf hingewiesen, daß eine Verkleinerung des früher gefundenen Wertes $r = 7''\!.5$ angemessen zu sein scheint. Eine solche Verkleinerung ist jetzt schon eingetreten; es wäre aber vielleicht möglich diese Verkleinerung noch weiter zu treiben durch abgeänderte Anfangsdaten, die ja doch mehr oder weniger willkürlich waren, was eben als ein günstiges Zeichen für die Zulässigkeit der Grundlagen dieser Arbeit angesehen werden darf.

Die empirischen Glieder in den Exzentrizitäten konnten nicht in gleichem Maße, wie die übrigen, dargestellt werden. Wollte man dieses erreichen, so müßte wohl eine andere und voraussichtlich weniger einfache Anordnung der Massen des Zodiakallichts, wie hier angenommen worden, in Betracht gezogen werden. Daß namentlich in der Nähe der Planeten so einfache Verhältnisse gar nicht bestehen können, dürfte insoweit feststehen, als das Zodiakallicht als eine Massenanhäufung von stabiler Dichtigkeitsverteilung angesehen wird. Damit werden indessen Fragen berührt, zu deren Behandlung bisher noch kein Versuch gemacht worden ist.

Namen-Register.

Sach-Register.

Verzeichnis der im Jahre 1906 eingelaufenen Druckschriften.

Die verehrlichen Gesellschaften und Institute, mit welchen unsere Akademie in Tauschverkehr steht, werden gebeten, nachstehendes Verzeichnis zugleich als Empfangsbestätigung zu betrachten.

Das Format ist, wenn nicht anders angegeben, 8⁰.

Von folgenden Gesellschaften und Instituten:

Geschichtsverein in Aachen:

Zeitschrift. Bd. 27. 1905.

Historische Gesellschaft des Kantons Aargau in Aarau:

Argovia. Bd. 31. 1905.

Société d'Émulation in Abbeville:

Bulletin trimestriel 1903/05. 1906, No. 1 et 2. 1903—06.
Mémoires. Tome 21. 1906.
Mémoires. 4ᵉ Série, tome 5, partie 1 et Table générale 1707—1904. 1904.

Royal Society of South-Australia in Adelaide:

Memoirs. Vol. I, part 3. 1905. 4⁰.
Transactions and Proceedings. Vol. XXIX. 1905.

Observatory in Adelaide:

Meteorological Observations of the years 1902/04. 1905—06. fol.

Südslavische Akademie der Wissenschaften in Agram:

Ljetopis. 1905. 1906.
Rad. Bd. 161—164. 1905—06.
Zbornik. Bd. X, 2; XI, 1. 1905—06.
Žívota Biskupa. Strossmayora 1. 1906.
Codex diplomaticus regni Croatiae. Vol. III. 1905. gr. 8⁰.
Rječnik Svezak 25, 2. 1905. 4⁰.

K. Kroat.-slavon.-dalmatinisches Landesarchiv in Agram:

Vjestnik. Bd. VIII, Heft 1—4. 1906. 4⁰.

Kroatische Archäologische Gesellschaft in Agram:

Vjesnik. N. Serie, Bd. VIII. 1905. 4⁰.

Faculté de droit et des lettres in Aix:

Annales. Tome 1, No. 4; tome 2, No. 1, 2. Paris 1905—06.

Naturforschende Gesellschaft des Osterlandes in Altenburg:

Mitteilungen aus dem Osterlande. N. F., Bd. 12. 1906.

Société des Antiquaires de Picardie in Amiens:

Album archéologique. Fasc. 14. 1905. fol.
Documents inédits concernant la Province. Tome 40, fasc. 2. 1905. 4⁰.
Bulletin. Année 1905, trimestre 1—3. 1905—06.

K. Akademie der Wissenschaften in Amsterdam:

Verhandelingen. Afd. Natuurkunde, I. Sectie, Deel IX, No. 2, 3; II. Sectie, Deel XII, No. 3, 4. 1906. 4⁰.
Verhandelingen. Afd. Letterkunde, Deel VI, No. 2—5; Deel VIII, No. 1, 2. 1906. 4⁰.
Zittingsverslagen. Afd. Natuurkunde, Teil XIV. 1906.
Verslagen en Mededeelingen. Afd. Letterkunde, Deel VII. 1906.
Jaarboek voor 1905. 1906.
Prijvers: Licinus tonsor. 1906.

Historischer Verein in Ansbach:

53. Jahresbericht. 1906.

Stadt Antwerpen:

Paedologisch Jaarboek. Jahrg. VI, afl. 1. 1906.

Académie des sciences in Arras:

Mémoires. 2e Série, tome 35. 1905.
Congrès des Sociétés savantes tenu à Arras les 7—10 Juillet 1904. 1905.

Naturwissenschaftlicher Verein in Aschaffenburg:

Mitteilungen V. Herausgegeben 1906.

Redaktion der Zeitschrift „Athena" in Athen:

Athena. Tome 18, Heft 1. 1906.

École française in Athen:

Bulletin de Correspondance hellénique. 30e année, No. 1—4. Paris 1906.

Congrès international d'archéologie in Athen:

Comptes rendus. 1ère session. 1905.

Historischer Verein für Schwaben und Neuburg in Augsburg:

Die Herrschaftsgebiete im heutigen Regierungsbezirk Schwaben und Neuburg nach dem Stand von 1801. Historische Karte. 1906.

Johns Hopkins University in Baltimore:

Studies in historical and political Science. Series XXIII, No. 11—12; Series XXIV, No. 1, 2. 1905—06.
The Johns Hopkins University Circulars. 1905, No. 9; 1906, No. 1—3. 1905—06.
American Journal of Mathematics. Vol. 27, No. 4; vol. 28, No. 1. 1905—06. 4⁰.
The American Journal of Philology. Vol. 26, No. 3, 4. 1905.
American Chemical Journal. Vol. 34, No. 3—6; vol. 35, No. 1—4. 1905—06.
Bulletin of the Johns Hopkins Hospital. Vol. 17, No. 178—189. 1906. 4⁰.
The Johns Hopkins Hospital Reports. Vol. XI, No. 12. 1903—04. 4⁰.

Peabody Institute in Baltimore:

Second Catalogue of the Library. Part VII S—T; part VIII V—Z. 1904—05. 4⁰.

39th annual Report, June 1. 1906.

Maryland Geological Survey in Baltimore:

Maryland Geological Survey. Vol. 5. 1905.

K. Bibliothek in Bamberg:

Katalog der Handschriften. Bd. I, Abt. I, Lief. 5; Bd. I, Abt. II, Lief. 4, 5. 1906.

Historischer Verein in Bamberg:

64. Jahresbericht für das Jahr 1905. 1906.

Naturforschende Gesellschaft in Basel:

Verhandlungen. Bd. 18, Heft 2, 3. 1906.

Historisch-antiquarische Gesellschaft in Basel:

Basler Zeitschrift für Geschichte und Altertumskunde. Bd. V, Heft 2; Bd. VI, Heft 1. 1906.

Universität in Basel:

Jahresverzeichnis der Schweizerischen Universitäten 1904—05. 1905.

Schriften der Universität aus dem Jahre 1905/06 in 4⁰ u. 8⁰.

Société des sciences in Bastia:

Bulletin. Année 24, trimestre 1, 4. 1905—06.

Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen in Batavia:

Tijdschrift. Deel 48, afl. 2—6. 1905—06.

Verhandelingen. Deel 55, stuk 2; Deel 56, stuk 2—4. 1905—06. 4⁰.

Notulen. Deel 43, afl. 1—4; Deel 44, afl. 1. 1905—06.

Die Orchideen von Ambon von J. J. Smith. 1905. 4⁰.

De Java-Oorlog von 1825—30. Deel IV. 1905. gr. 8⁰.

Rapporten van de Commissie in Nederlandsch-Indie voor oudheidkundig onderzoek 1904. 1906. 4⁰.

R. Observatory in Batavia:

Observations. Vol. 27. 1904—06. fol.

Regenwaarnemingen in Nederlandsch-Indie. 26. Jahrg. 1904. 1905. 4⁰.

K. Natuurkundige Vereeniging in Nederlandsch-Indie zu Batavia:

Natuurkundig Tijdschrift. Deel LXV. Weltevreden 1905.

Historischer Verein in Bayreuth:

Archiv für Geschichte. Bd. 23, Heft 1. 1906.

K. Serbische Akademie der Wissenschaften in Belgrad:

Glas. Vol. 70, 71. 1906.

Spomenik. Vol. 42, 43. 1906. 4⁰.

Godišnjak. Vol. 19 (1905). 1906.

Etnografski Zbornik. Atlas VI. 1905. 4⁰.

Pripowetka o dewojci bez ruku. 1905.

Srpski Dijalektol Zbornik kniga I. 1905.

L'Activité de l'Académie Royale Serbe en 1905. 1906.

J. Cvijić, Osnove za geograph i geolog. Tom. I, II. 1906. 4⁰.

Sperlič, Omladina. 1906.

Museum in Bergen (Norwegen):

G. O. Sars, An Account of the Crustacea of Norway. Vol. V, parts 11—14. 1906. 4⁰.
Aarbog. 1905, Heft 3; 1906, Heft 1. 2.
Aarsberetning for 1905. 1906.
A. Appellöf, Meeresfauna von Bergen. Heft 2, 3. 1906.

University of California in Berkeley:

Schriften aus dem Jahre 1904/05 in 4⁰ u. 8⁰.

Lick Observatory in Berkeley:

Bulletin. No. 99, 100. 1906. 4⁰.

K. Preuß. Akademie der Wissenschaften in Berlin:

Corpus inscriptionum latinarum. Vol. 13, pars 3, fasc. 2. 1906. fol.
Acta Borussica. Die Behördenorganisation, Bd. VIII. 1906.
Abhandlungen aus dem Jahre 1905. 4⁰.
Sitzungsberichte. 1905, Nr. 39—53; 1906, Nr. 1—38. gr. 8⁰.
Politische Korrespondenz Friedrichs des Großen. Bd. 31. 1906.

K. Preuß. Geologische Landesanstalt in Berlin:

Abhandlungen. N. F., Heft 41, 45, 47, 49. 1905—06. 4⁰.
H. Potonié, Abbildungen und Beschreibungen fossiler Pflanzenreste. Lief. III. 1905. 4⁰.

Zentralbureau der internationalen Erdmessung in Berlin:

Veröffentlichungen. N. F., Nr. 12, 13. 1906. 4⁰.

Deutsche Chemische Gesellschaft in Berlin:

Berichte. 38. Jahrg., Nr. 18; 39. Jahrg., Nr. 1—15, 17. 1905—06.

Deutsche Geologische Gesellschaft in Berlin:

Zeitschrift. Bd. 57, Heft 3, 4 (1905); Bd. 58, Heft 1 (1906).

Medizinische Gesellschaft in Berlin:

Verhandlungen. Bd. 36. 1906.

Deutsche Physikalische Gesellschaft in Berlin:

Die Fortschritte der Physik im Jahre 1905. 3 Bde. Braunschweig 1906.
Verhandlungen. Jahrg. 6, Nr. 24, 1904; Jahrg. 7, Nr. 1—24, 1905; Jahrg. 8, Nr. 1—23. Braunschweig 1906.

Physiologische Gesellschaft in Berlin:

Zentralblatt für Physiologie. 1905, Bd. XIX, Nr. 21—26; 1906, Bd. XX, Nr. 1—19.
Verhandlungen. Jahrg. 1905—06, Nr. 1—13.
Bibliographia physiologica. 3. Serie, 1905, Bd. 1, Nr. 3; Bd. 2, Nr. 2.

K. Technische Hochschule in Berlin:

Wissenschaftliche Arbeiten auf schiffbautechnischen Gebieten von Rektor Flamm. 1906. 4⁰.

Kaiserlich Deutsches Archäologisches Institut in Berlin:

Jahrbuch. Bd. XX, Heft 4; Bd. XXI, Heft 1—3. 1906. 4⁰.

Institut für Gärungsgewerbe in Berlin:

Verhandlungen der 34. Plenarversammlung des deutschen Landwirtschaftsrates 1906.

Kolonial-Abteilung des auswärtigen Amts in Berlin:

Bericht über die Grenzvermessung zwischen Deutsch-Südwestafrika und Britisch-Betchuanaland. 1905. fol.

K. Preuß. Meteorologisches Institut in Berlin:

Deutsches meteorologisches Jahrbuch für 1904 und 1905. Heft 1: Preußen und benachbarte Staaten. Jahrg. 1905, 1906. 4⁰.

Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen in Potsdam im Jahre 1902. 1905. 4⁰.

Ergebnisse der magnetischen Beobachtungen in Potsdam im Jahre 1901. 1905. 4⁰.

Ergebnisse der Niederschlagsbeobachtungen im Jahre 1902 von G. Hellmann. 1905. 4⁰.

Die Niederschläge in den norddeutschen Stromgebieten von G. Hellmann. 3 Voll. 1906. gr. 8⁰.

Ergebnisse der Beobachtungen an den Stationen II. und III. Ordnung im Jahre 1900. 1906. 4⁰.

Redaktion des „Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik" in Berlin

Jahrbuch. Bd. 34, Heft 3; Bd. 35, Heft 1, 2. 1906.

Verein zur Beförderung des Gartenbaues in den preuß. Staaten in Berlin:

Gartenflora. Jahrg. 1906, Nr. 1—24.

Verein für Geschichte der Mark Brandenburg in Berlin:

Forschungen zur Brandenburgischen und Preußischen Geschichte. Bd. XIX, 1. und 2. Hälfte. Leipzig 1906.

Zeitschrift für Instrumentenkunde in Berlin:

Zeitschrift. 26. Jahrg., Nr. 1—12. 1906. 4⁰.

Schweizerische Naturforschende Gesellschaft in Bern:

Verhandlungen in Luzern 10.—13. September 1905. Luzern 1906.

Schweizerische Geodätische Kommission in Bern:

Bericht der Abteilung für Landestopographie über die Arbeiten 1893—1903. Zürich 1905. 4⁰.

R. Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna:

Memorie. Serie VI, tomo 2. 1905. 4⁰.
Rendiconto. N. Serie, vol. 9 (1904—05). 1905.

R. Deputazione di storia patria per le Provincie di Romagna in Bologna:

Atti e Memorie. Serie III, vol. 23, fasc. 4—6; vol. 24, fasc. 1—3. 1905—06.

Osservatorio astronomico e meteorologico in Bologna:

Osservazioni meteorologiche dell' annata 1904. 1905. 4⁰.

Niederrheinische Gesellschaft für Natur- und Heilkunde in Bonn:

Sitzungsberichte. 1905, 2. Hälfte; 1906, 1. Hälfte.

Universität in Bonn:

Schriften aus dem Jahre 1905/06 in 4⁰ u. 8⁰.

Verein von Altertumsfreunden im Rheinlande in Bonn:

Bonner Jahrbücher. Heft 113. 1905. 4⁰.

Naturhistorischer Verein der preußischen Rheinlande in Bonn:

Verhandlungen. 62. Jahrg. 1905, 2. Hälfte; 63. Jahrg. 1906, 1. Hälfte.

Société des sciences physiques et naturelles in Bordeaux:

Procès-verbaux 1904/05. 1905.
Observations météorologiques 1904/05. 1905.
Table générale des matières 1850–1900. 1905.

Société de géographie commerciale in Bordeaux:

Bulletin. 1906, No. 1–6, 9–22.

American Academy of Arts and Sciences in Boston:

Proceedings. Vol. 41, No. 14—35; vol. 42, No. 1–12. 1906.
Memoirs. Vol. XIII, No. 3. 1906. 4⁰.

Massachusetts General Hospital in Boston:

Publications. Vol. 1, No. 2. 1906.

Boston Society of natural History in Boston:

Proceedings. Vol. 32, No. 3–12; vol. 33, No. 1, 2. 1905—06.
Occasional Papers. VII Fauna of New England. No. 4—7. 1905—06.

Geschichtsverein in Braunschweig:

Braunschweigisches Magazin. Jahrg. 1905. 4⁰.
Jahrbuch: 4. Jahrg. Wolfenbüttel 1905.

Verein für Naturwissenschaft in Braunschweig:

14. Jahresbericht über die Jahre 1903/04 und 1904/05. 1906.

Meteorologisches Observatorium in Bremen:

Deutsches Meteorologisches Jahrbuch 1905. Freie Hansastadt Bremen. 1906. 4⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein in Bremen:

Abhandlungen. Bd. XVIII, Heft 2. 1906.

Schlesische Gesellschaft für vaterländische Kultur in Breslau:

83. Jahresbericht im Jahre 1905. 1906.

Deutscher Verein für die Geschichte Mährens und Schlesiens in Brünn:

Zeitschrift. X. Jahrg., Heft 1—4. 1906.

Naturforschender Verein in Brünn:

Verhandlungen der meteorologischen Kommission im Jahre 1903. 1905.
Verhandlungen. Bd. 43, 1904. 1905.

Mährisches Landesmuseum in Brünn:

Časopis. Bd. VI, 1, 2. 1906.
Zeitschrift. Bd. VI, 1, 2. 1906.

Académie Royale de médecine in Brüssel:

Mémoires couronnés. Collection in 8⁰, tom. 18, fasc. 10; tom. 19, fasc. 1. 1906.
Bulletin. IVᵉ Série, tome 19, No. 9, 10; tome 20, No. 1–8. 1906.

Académie Royale des sciences in Brüssel:

La Chronique de Saint-Hubert publiée par Karl Hanquet. 1906.
Recueil de Documents rel. à l'histoire de l'Industrie drapière au Flandre. 1906. 4⁰.
Biographie nationale. Tome XVIII, fasc. 2. 1905.
Annuaire 1906.
Bulletin. a) Classe des lettres 1905, No. 9—12; 1906, No. 1—8.
b) Classe des sciences 1906, No. 9—12; 1907, No. 1—8.
Mémoires. Classe des lettres. Collection in 8⁰, tome I, fasc. 6.
Cartulaire de l'Abbaye du Val-Benoit publié par J. Cuvelier. 1906. 4⁰.
Biographie nationale. Tome 18, fasc. 2.
Inventaire analytique des chartes de la collégiale de Saint-Pierre à Liège par Ed. Poncelet. 1906.
Inventaire de la „Librairie" de Philippe le Bon (1420) par Georges Doutrepout. 1906.

Bibliothèque Royale in Brüssel:

Catalogue des manuscrits. Tome IV, V. 1904—05.

Observatoire Royale in Brüssel:

Annales. N. Série. Physique du globe. Tome 3, fasc. 1. 1905. 4⁰.
Résultats du Voyage de S. Y. Belgica au 1897—99. Rapports scientifiques. Zoologie 13 fasc. — Botanique 3 fasc. — Méteorologie 3 fasc. — Hydrographie 1 fasc. avec cartes, publ. par G. Lecointe, Directeur scientifique. Anvers 1903—05. 4⁰.

Société des Bollandistes in Brüssel:

Analecta Bollandiana. Tome 25, fasc. 1—4. 1906.

Société entomologique de Belgique in Brüssel:

Annales. Tome 49. 1905.
Mémoires. XII, XIII, partie 1 und 2. 1906.

Société géologique de Belgique in Brüssel:

Bulletin. Tome XIX, fasc. 3—5; tome XX, fasc. 1, 2. 1906.

K. Ungarische Akademie der Wissenschaften in Budapest:

Die im Jahre 1905/06 erschienenen Schriften der Akademie in 4⁰ und 8⁰.

K. Ungarische Geologische Anstalt in Budapest:

Mitteilungen. Bd. XIV, Heft 4 u. 5; Bd. XV, Heft 2. 1905—06.
Földtani Közlöny. Bd. 35, Heft 8—12; Bd. 36, Heft 1—5. 1905—06. 4⁰.
Jahresbericht für 1903 und 1904. 1905—06. 4⁰.
Erläuterungen zur agrogeologischen Karte. Sektionsblatt $\frac{\text{Zone 20}}{\text{Kol. XXII}}$. 1905. 4⁰.
A Magyar Kir. földtani intézet évkönyve. Bd. XIV, 5. 1905.

Statistisches Bureau der Haupt- und Residenzstadt Budapest:

Publikationen. Vol. XXXIV u. XXXVI. 1905—06. 4⁰.
Statistisches Jahrbuch. VII. Jahrg. 1904. 1906. 4⁰.

K. Ungarische Naturwissenschaftliche Gesellschaft in Budapest:

Természettudományi Könivkìadó-vállarat. No. LXXV, LXXVI. 1905.
Otto Herman, Recensio critica of the doctrine of Bird-migration. 1905. 4⁰.
Nuricsán József, Utmutató a chemiai Kisérletezésben. 1906.

Museo nacional in Buenos Aires:

Annales. Series III, tome 5. 1905. 4°.

Botanischer Garten in Buitenzorg (Java):

Bulletin de l'Institut botanique. No. 19, 22. 1904—05. 4.

Departement de l'agriculture in Buitenzorg (Java):

Bulletin. No. 1, 2. 1906. 4°.
Verslag 1905. 1906. 4°.
Tweede Verslag van de Selectie-Proeven met de Natal-Indigoplant, door G. Wilbrink. 1906.
Mededeelingen. No. 2. 1906. 4.

Academia Romana in Bukarest:

Analele. Parte a administrativa. Serie II. tome 27, 1904—05. 1905. 4°.
„ Memoriile sectiunii literare. Serie II, tome 27, 1904—05. 1905. 4°.
„ „ „ ştiinţifice. Ser. II, tom. 27, 1904—05. 1905. 4°.
„ „ „ istorice. Serie II, tome 27, 1904—05. 1905. 4°.
Bibliografia Româneasca. Tome 2, fasc. 1. 1905. 4°.
Discursuri de receptiune. XXVII. 1905. 4°.
Istoria romana de Titus Livius. Tome 3, fasc. 1. 1904.
Finatele Romaniei 1831—1905 de Th. C. Aslan. 1905.
Basme Aromâne de Per Papahagi. 1905.
L'activité de l'Académie Roumaine de 1884 à 1905. 1905.

Société Linnéenne de Normandie in Caen:

Bulletin. 5e Série, vol. 8, année 1904. 1905.

Institut Égyptien in Cairo:

Bulletin. IVe Série, No. 5, fasc. 3—6; No. 6, fasc. 1, 2. 1904—05.

Meteorological Department of the Government of India in Calcutta:

Memoirs. Vol. XX, part 1. 1906. 4.
Monthly Weather Review. May-Dec. 1905, Jan.-April 1906. 1905—06. fol.
India Weather Review. Annual Summary 1904. 1906. fol.
Rainfall Data of India for 1903 and for 1904. 1906. fol.
Report on the Administration in 1905—1906. 1906. fol.

Department of Agriculture in Calcutta:

Memoirs. Vol. 1, No. 1—4. 1906. 4°.

Royal Asiatic Society of Bengal in Calcutta:

Bibliotheca Indica. New Series, No. 1128—1138, 1140, 1141, 1144—1148. 1905—06.
Memoirs. Vol. I, No. 1—9. 1905—06. 4°.
Journal and Proceedings. Vol. I, No. 5—10 and Extra Number; vol. II, No. 1—5. 1905.

Office of Superintendent of Government Printing in Calcutta:

Annual Report of the Imperial Department of Agriculture for the year 1904/05. 1906. 4°.
Memorandum of the Age Tables and Rates of Mortality of the Indian Census of 1901. 1905. fol.

Geological Survey of India in Calcutta:

Records. Vol. XXXII, part 4; vol. XXXIII, part 1—4; vol. XXXIV, part 1, 2. 1905—06. 4⁰.

Paläontologica Indica. Serie XV, vol. V; Memoir No. 1. 1906. fol.

Board of scientific advice for India in Calcutta:

Annual Report for the year 1904/05. 1906. 4⁰.

Museum of comparative Zoology at Harvard College in Cambridge, Mass.:

Bulletin. Vol. 43, No. 4; vol. 46, No. 12—14; vol. 48, No. 2, 3; vol. 49, Nr. 3. 4; vol. 50, No. 1—5. 1906.

Memoirs. Vol. 30, No. 3; vol. 33. 1906. 4⁰.

Astronomical Observatory of Harvard College in Cambridge, Mass.:

60th annual Report 1904/05. 1905.

Annals. Vol. 39, part 2; vol. 53, No. 10; vol. 58, part 2; vol. 60, part 1, 2.

Edw. C. Pickering, Oration on the Aimes of an Astronomer. 1906.

An international Southern Telescope. By Edw. C. Pickering. 1906.

Circular. No. 105—118.

Telegraphic Cipher Code. 1906.

Harvard University in Cambridge, Mass.:

Harvard Oriental Series. Vol. VII, VIII. 1905. 4⁰.

Observatory in Cambridge:

Annual Report for 1905/06. 1906. 4⁰.

Philosophical Society in Cambridge:

Proceedings. Vol. 13, part 4—6. 1906.

Transactions. Vol. 22, No. 7—10. 4⁰.

Geological Commission in Capetown:

Map. Sheet I. 1906.

British South Africa Company in Capetown:

Geological Survey of South Africa. Vol. III. 1905. fol.

Report for 1905. 1906. 4⁰.

Accademia Gioenia di scienze naturali in Catania:

Atti. Serie IV, vol. 18. 1905. 4⁰.

Bollettino mensile. Nuova Serie, fasc. 87—91. 1906.

Società di storia patria per la Sicilia Orientale in Catania:

Archivio. Anno II, fasc. 3, 1905; anno III, fasc. 1—3. 1906.

Physikalisch-technische Reichsanstalt in Charlottenburg:

Die Tätigkeit der physikalisch-technischen Reichsanstalt im Jahre 1905. Berlin 1906. 4⁰.

K. Sächsisches Meteorologisches Institut in Chemnitz:

Dekaden-Monatsberichte 1904. Jahrg. VII. 1905. fol.

Deutsches Meteorologisches Jahrbuch für 1901. 1905. 4⁰.

Paul Schreiber, Studien über Erdbodenwärme. 1905. 4⁰.

John Crerar Library in Chicago:

11. annual Report for the year 1905. 1906.

Field Columbian Museum in Chicago:

Publications. No. 102, 104, 106—114, 116. 1905—06.

University in Chicago:

The Decennial Publications. G. B. Foster, The Finality of the christian religion. 1906.

Videnskabsselskabet in Christiania:

Forhandlinger. Aar 1905. 1906.
Skrifter. 1905, I. math.-naturwiss. Klasse; II. histor.-filos. Klasse. 1906. 4⁰.

The Norwegian North Polar Expedition in Christiania:

Scientific Results. Vol. 5. 1906. 4⁰.

Historisch-antiquarische Gesellschaft für Graubünden in Chur:

XXXV. Jahresbericht. Jahrg. 1905. 1906.

Naturforschende Gesellschaft für Graubünden in Chur:

Jahresbericht. N. F., Bd. 48, Jahrg. 1905—06. 1906.

Lloyd Library in Cincinnati:

Mycological Notes. No. 19—23.
Index of the Mycological Writings of C. G. Lloyd. Vol. I. 1898—1905.
C. G. Lloyd, The Tylostomeae. 1906.

University of Cincinnati:

Record. Series I, vol. 2, No. 4—16; Series II, vol. 2. No. 2. 1905—06.
University Studies. Series II, vol. 1, No. 4; vol. 2, No. 1. 1905.

University of Missouri in Columbia:

Bulletin of Laws Observatory. No. 7. 1905. 4⁰.

Société storica in Como:

Periodico. No. 61—64 und 2 Hefte. Indici 1904. gr. 8⁰.
„ Vol. 1—17. 1906. 4⁰.
Raccolta. Vol. 1—5. 1906. 4⁰.

Academia nacional de ciencias in Cordoba (Republik Argentinien):

Boletín. Tome 18, centr. 1, 2. Buenos Aires 1905.

Naturforschende Gesellschaft in Danzig:

Schriften. N. F., Bd. 11, Heft 4. 1906.

Westpreußischer Geschichtsverein in Danzig:

Quellen und Darstellungen zur Geschichte Westpreußens. Nr. 5. 1906.
Mitteilungen. 5. Jahrg. 1906, Nr. 1—4.

K. Gouvernement von Deutsch-Ostafrika in Dar-es-Salam:

Berichte über Land- und Forstwirtschaft in Deutsch-Ostafrika. Bd. 2, Heft 7 u. 8; Bd. 3, Heft 1. Heidelberg 1906.

Historischer Verein für das Großherzogtum Hessen in Darmstadt:

Archiv für hessische Geschichte. N. F., Bd. IV, Heft 2 u. Ergänzungsband II, 4; III, 1. 1906.
Quartalblätter. Bd. III, Nr. 17—20; Bd. IV, Nr. 1, 2. 1905—06.

Commission géodésique néerlandaise in Delft:

Détermination de longitude et d'azimut dans les Pays-Bas. 1904. 4⁰.
Détermination de la longitude de la latitude et d'un azimut à Ubagsberg en 1893. 1905. 4⁰.

Colorado Scientific Society in Denver, Colorado:

Proceedings. Vol. VIII, p. 71—182. 1906.

Verein für Anhaltische Geschichte in Dessau:

Mitteilungen. Bd. X, Heft 3. 1906.

Union géographique du Nord de la France in Douai:

Bulletin. Tome 31, trimestre 1, 2. 1905.

K. Sächsicher Altertumsverein in Dresden:

Neues Archiv für sächsische Geschichte. Bd. XXVII. 1906.

K. Sächsisches Meteorologisches Institut in Dresden:

Deutsches Meteorolog. Jahrbuch für 1902. Königreich Sachsen. 1906. 4⁰.
Dekaden-Monatsberichte. Jahrg. VIII, 1905. 1906. fol.

Verein für Erdkunde in Dresden:

Mitteilungen. 1905, Heft 2; 1906, Heft 1, 2.

Royal Irish Academy in Dublin:

Proceedings. Vol. XXVI, Section A, part 1; Section B, part 1—5; Section C, part 5—9. 1906.
Transactions. Vol. XXXIII, Section A, part 1; Section B, part 1, 2; Section C, part 1—4. 1906. 4⁰.

Royal Society in Dublin:

The economic Proceedings. Vol. I, part 7, 8. 1906.
The scientific Proceedings. Vol. XI, No. 6—12. 1906.
The scientific Transactions. Series II, vol. IX, part 2, 3. 1906. 4⁰.

Pollichia in Dürkheim:

Festschrift zum 80. Geburtstage des Geheimrats Georg von Neumayer. 1906.

American Chemical Society in Easton, Pa.:

The Journal. Vol. 28, No. 1—12.

Royal Society in Edinburgh:

Proceedings. Vol. 24; vol. 25, part 1, 2; vol. 26, part 1—5. 1903—06.
Transactions. Vol. 40, part 3, 4; vol. 41, part 1, 2; vol. 43. 1903—05. 4⁰.

Geological Society in Edinburgh:

Transactions. Vol. 8, part 3. 1905.

Scottish Microscopical Society in Edinburgh:

Proceedings. Vol. 4, No. 2, 3. 1906.

Royal Physical Society in Edinburgh:

Proceedings. Vol. 16, No. 4—7. 1906.

Verein für Geschichte der Grafschaft Mansfeld in Eisleben:

Mansfelder Blätter. 20. Jahrg. 1906.

Naturforschende Gesellschaft in Emden:
89. Jahresbericht für 1903/04. 1905.

K. Universitätsbibliothek in Erlangen:
Schriften aus dem Jahre 1905/06 in 4⁰ u. 8⁰.

Reale Accademia dei Georgofili in Florenz:
Atti. Serie V, vol. 2, disp. 3, 4; vol. 3, disp. 1—3. 1905—06.

Biblioteca Nazionale Centrale in Florenz:
Indici del Bollettino della Pubblicazioni italiane per il e 1905. 1905.

Società Asiatica Italiana in Florenz:
Giornale. Vol. 18. 1905.

Senckenbergische Naturforschende Gesellschaft in Frankfurt a. M.:
Abhandlungen. Bd. 30, Heft 1, 2. 1906. 4⁰.
Bericht. 1906.

Verein für Geschichte und Altertumskunde in Frankfurt a. M.:
Geschichte der Musik in Frankfurt a. M. Von Carolina Valentin. 1906.

Physikalischer Verein in Frankfurt a. M.:
Jahresbericht für 1904/05. 1906.

Naturwisssenschaftlicher Verein in Frankfurt a. O.:
Helios. Bd. 23. Berlin 1906.

Breisgau-Verein Schau-ins-Land in Freiburg i. Br.:
„Schau-ins-Land." 32. Jahrlauf 1905; 33. Jahrlauf 1906, I. u. II. Halbband. fol.

Kirchengeschichtlicher Verein in Freiburg i. Br.:
Freiburger Diözesan-Archiv. N. F., Bd. VII. 1906.

Universität in Freiburg i. Br.:
Schriften aus dem Jahre 1905/06 in 4⁰ u. 8⁰.

Observatoire in Genf:
L'éclipse totale de soleil du 30. Août 1905.
Résumé météorologique de l'année 1904. 1905.

Société d'histoire et d'archéologie in Genf:
Mémoires et Documents. IIᵉ Série, tome 9 et 10. 1906.
Mémoires et Documents. Série in 4⁰, tome 3. 1906. 4⁰.

Universität in Genf:
Schriften aus dem Jahre 1905/06 in 4⁰ u. 8⁰.

Société de physique et d'histoire naturelle in Genf:
Mémoires. Vol. 35, fasc. 2. 1906. 4⁰.

Società Ligure di storia patria in Genua:
Giornale storico. Anno VII, fasc. 1—12. La Spezia 1904.

Oberhessische Gesellschaft für Natur- und Heilkunde in Gießen:
Bericht. N. F. Medizinische Abteilung, Bd. 1. 1906.

Universität in Gießen:

Schriften aus dem Jahre 1905/06 in 4⁰ u. 8⁰.

Oberhessischer Geschichtsverein in Gießen:

Mitteilungen. N. F., Bd. 14. 1906.

Naturforschende Gesellschaft in Görlitz:

Abhandlungen. Bd. XXV, Heft 1. 1906.

Oberlausitzische Gesellschaft der Wissenschaften in Görlitz:

Neues Lausitzisches Magazin. Bd. 81 u. 82. 1905–06.
Codex diplomaticus Lusatiae superioris. III. Bd., 1. u. 2. Heft. 1906.
Fritz Rauda, Die mittelalterliche Baukunst Bautzens. 1905. 4⁰.
Felix Möschler, Gutsherrlich-bäuerliche Verhältnisse in der Oberlausitz. 1906.

K. Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen:

Göttingische Gelehrte Anzeigen. 1905, Nr. 12; 1906, Nr. 1—11. Berlin. gr. 8⁰.
Abhandlungen. N. F. a) Philol.-hist. Klasse. Bd. VI, Nr. 4.
b) Math.-phys. Klasse. Bd. IV, Nr. 5. Berl. 1906. 4⁰.
Nachrichten. a) Philol.-hist. Klasse. 1905, Heft 4 Beiheft; 1906, Heft 1—3.
b) Math.-phys. Klasse. 1905, Heft 4. 5; 1906, Heft 1—4. Berlin. 4⁰.
c) Geschäftliche Mitteilungen. 1905, Heft 2; 1906, Heft 1. Berlin. 4⁰.
Karl Friedrich Gauß-Werke. Bd. VII. 1906. 4⁰.

Göttinger Vereinigung zur Förderung der angewandten Physik in Göttingen:

Die physikalischen Institute der Universität Göttingen. Leipzig 1906. 4⁰.

Scientific Laboratories of Denison University in Granville, Ohio:

Bulletin. Vol. XIII, p. 35–130. 1905—06.

Historischer Verein für Steiermark in Graz:

Steirische Zeitschrift. 1. Jahrg., Heft 1—4, 1903; 3. Jahrg., Heft 1—4, 1905.
Urkundenbuch des Herzogtums Steiermark. Bd. III. 1903.
Beiträge zur Erforschung steirischer Geschichte. 33. u. 34. Jahrg. 1904—05.
Beiträge zur Kunde steiermärkischer Geschichtsquellen. 32. Jahrg. 1903.

Naturwissenschaftlicher Verein für Steiermark in Graz:

Mitteilungen. Jahrg. 1905, Heft 42. 1906.

Rügisch-Pommerscher Geschichtsverein in Greifswald:

Pommersche Jahrbücher. Bd. 7. 1906.

Naturwissenschaftlicher Verein für Neu-Vorpommern in Greifswald:

Mitteilungen. 37. Jahrg. 1905. Berlin 1906.

K. Instituut voor de Taal-, Land- en Volkenkunde van Nederlandsch-Indie im Haag:

Bijdragen. VII. Reeks, Deel 5, afl. 1—4. 1906.

Departement van Kolonien im Haag:

Description géologique de l'île d'Ambon par R. D. M. Verbeck. Text und Atlas. Batavia 1905. (Atlas in fol.)

Musée Teyler in Haarlem:

Archives. Serie II, vol. 10, partie 1 u. 2. 1905—06. 4⁰.

Teylers tweede Genootschap in Haarlem:

Verhandelingen. N. Reeks, Deel VI u. VII. 1905—06.

Société Hollandaise des Sciences in Haarlem:

Archives Néerlandaises des sciences exactes. Sér. II, tome 11, livr. 1—5. 1906.
Natuurkundige Verhandelingen. 3e Verzameling, Deel VI, 2de stuk. 1906. 4⁰.

Nova Scotian Institute of Science in Halifax:

The Proceedings and Transactions. Vol. XI, part 1 u. 2. 1901, 1906.

Historischer Verein für Württembergisch-Franken in Schwäbisch-Hall:

Württembergisch-Franken. N. F., IX. 1906.

K. Leopoldinisch-Karolinische Deutsche Akademie der Naturforscher in Halle:

Leopoldina. Heft 41, Nr. 12, 1905; Heft 42, Nr. 1—10, 1906.
Nova Acta. Bd. 82—84. 1904—05. 4⁰.
Katalog der Bibliothek. Bd. 3, Lief. 1. 1905.

Deutsche Morgenländische Gesellschaft in Halle:

Zeitschrift. Bd. 59, Heft 4; Bd. 60, Heft 1—3. Leipzig 1905—06.
Abhandlungen für die Kunde des Morgenlandes. Bd. XII, Nr. 2. Leipzig 1906.

Universität Halle:

Schriften aus dem Jahre 1905/06 in 4⁰ u. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein für Sachsen und Thüringen in Halle:

Zeitschrift für Naturwissenschaften. 78. Bd., Heft 1—3. Stuttgart 1906.

Thüringisch-Sächsischer Verein für Erforschung des vaterländischen Altertums in Halle:

Neue Mitteilungen. Bd. 22, Heft 3. 1906.

Mathematische Gesellschaft in Hamburg:

Mitteilungen. Bd. IV, Heft 6. Leipzig 1906.

Deutsche Seewarte in Hamburg:

27. u. 28. Jahresbericht für 1904 u. 1905. 1905—06. gr. 8⁰.

Sternwarte in Hamburg:

Mitteilungen. Nr. 8, 10. 1905.

Verein für hamburgische Geschichte in Hamburg:

Mitteilungen. 25. Jahrg. 1905. 1906.

Naturwissenschaftlicher Verein in Hamburg:

Verhandlungen. III. Folge, Bd. 13. 1906.

Historischer Verein für Niedersachsen in Hannover:

Zeitschrift. Jahrg. 1905, Heft 3, 4; Jahrg. 1906, Heft 1—4.

Großherzogliche Sternwarte in Heidelberg:

Mitteilungen. Nr. VII—IX. Leipzig 1906.

Universität Heidelberg:

Theodor Curtius, Robert Bunsen als Lehrer in Heidelberg. 1906. 4⁰.
Schriften der Universität aus dem Jahre 1905/06 in 4⁰ u. 8⁰.
Aus alter u. neuer Zeit der Heidelberger Bibliothek. Rede von J. Wille. 1906.

Historisch-philosophischer Verein in Heidelberg:

Neue Heidelberger Jahrbücher. Jahrg. XIV, Heft 2. 1906.

Naturhistorisch-medizinischer Verein in Heidelberg:

Verhandlungen. N. F., Bd. VIII, Heft 2. 1905. gr. 8⁰.

Reichslimeskommission in Heidelberg:

Der obergermanisch-rätische Limes des Römerreiches. Lief. 26 u. 27. 1906. 4⁰.

Astronomisches Institut in Heidelberg:

Bestimmung der Längendifferenz der Großherzoglichen Sternwarte bei Heidelberg und der Universitäts-Sternwarte in Straßburg i. E. Karlsruhe 1906. 4⁰.

Commission géologique de Finnlande in Helsingfors:

Bulletin. No. 16. 1905.

Finnländische Gesellschaft der Wissenschaften in Helsingfors:

Acta. Vol. 32. 1906. 4⁰.
Öfversigt 47. 1905.
Bidrag till kännedom af Finnlands Natur och Folk. Heft 63. 1905.

Institut météorologique central in Helsingfors:

Observations météorologiques 1895/96. 1906. fol.

Societas pro Fauna et Flora Fennica in Helsingfors:

Acta. Vol. 6 (1889), 21—23, 25, 27, 28. 1902—06.
Meddelanden. Vol. 28, 29, 31, 32. 1902—06.

Société de géographie de Finnlande in Helsingfors:

Fennia. Vol. 19—22. 1903—05.

Universität Helsingfors:

Schriften aus dem Jahre 1905/06 in 4⁰ u. 8⁰.

Verein für siebenbürgische Landeskunde in Hermannstadt:

Archiv. N. F., Bd. XXXIII, 1—4. 1905—06.

Siebenbürgischer Verein für Naturwissenschaften in Hermannstadt:

Verhandlungen und Mitteilungen. Bd. 54, Jahrg. 1904. 1906.

Verein für Sachsen-Meiningische Geschichte in Hildburghausen:

Schriften. Heft 52. 1906. gr. 8⁰.

Ungarischer Karpathen-Verein in Igló:

Jahrbuch. 33. Jahrg. 1906.

Historischer Verein in Ingolstadt:

Sammelblatt. Heft 29. 1905.

Naturwissenschaftlich-medizinischer Verein in Innsbruck:

Berichte. 29. Jahrg. 1903/04 u. 1904/05. 1906.

Journal of Physical Chemistry in Ithaca, N.Y.:

The Journal. Vol. 10, No. 1—8. 1906. gr. 8⁰.

Imperial Central Agricultural Experiment Station in Japan:

Bulletin. Vol. I, No. 1. Nishigahara, Tokio 1905.

Université de Jassy:

Annales scientifiques. Tome III, fasc. 4; tome IV, fasc. 1. 1906.

Medizinisch-naturwissenschaftliche Gesellschaft in Jena:

Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft. Bd. 41. Heft 1—4. 1906.

Verein für Thüringische Geschichte und Altertumskunde in Jena:

Zeitschrift. N. F., Bd. XVI, 2; XVII, 1. 1906.

Gelehrte Estnische Gesellschaft in Jurjew (Dorpat):

Sitzungsberichte 1905. 1906.

Naturforschende Gesellschaft bei der Universität Jurjew (Dorpat):

Archiv für Naturkunde. Serie II, Bd. XIII, 1. 1905.
Sitzungsberichte. Bd. XIV, 1, 2; XV, 1 u. Register zu Bd. 3—14. 1905—06.
Schriften. Bd. XVI u. XVII. 1905—06. 4⁰.

Universität Jurjew (Dorpat):

Schriften aus dem Jahre 1905/06 in 4⁰ u. 8⁰.

Badische Historische Kommission in Karlsruhe:

Oberrheinische Städterechte. I. Abt., Heft 7. 1906.
Zeitschrift für die Geschichte des Oberrheins. N. F., Bd. XXI, 1—4. Heidelberg 1906.
Neujahrsblätter 1906. Heidelberg.

Zentralbureau für Meteorologie und Hydrographie in Karlsruhe:

Ergebnisse der Untersuchung der Hochwasserverhältnisse im deutschen Rheingebiete. Berlin 1905. 4⁰.
Jahresbericht für das Jahr 1905. 1906. fol.

Großherzoglich Technische Hochschule in Karlsruhe:

Schriften aus dem Jahre 1906.

Naturwissenschaftlicher Verein in Karlsruhe:

Verhandlungen. Bd. 19, 1905—06. 1906.

Société physico-mathématique in Kasan:

Bulletin. II. Série, tome 15, No. 2. 1906.

Universität Kasan:

Utschenia Sapiski. Bd. 73, No. 1—10. 1906.

Verein für hessische Geschichte und Landeskunde in Kassel:

Zeitschrift. N. F., Bd. 29. 1905.

Verein für Naturkunde in Kassel:

Abhandlungen und Bericht L. 1906.

Université Impériale in Kharkow:

Annales. 1905, Heft 2; 1906, Heft 1, 2. 1906.

Gesellschaft für schleswig-holsteinische Geschichte in Kiel:

Zeitschrift. Bd. 36. 1906.

Kommission zur wissenschaftl. Untersuchung der deutschen Meere in Kiel:

Wissenschaftliche Meeresuntersuchungen. N. F., Bd. 7 (Abteilung Helgoland, Heft 2); Bd. 9 (Abteilung Kiel). Kiel u. Leipzig 1906. 4°.

K. Universität in Kiel:

Schriften aus dem Jahre 1905/06 in 4° u. 8°.

Universität in Kiew:

Iswestija. Bd. 45, Nr. 11; Bd. 46, Nr. 1—8. 1905—06.

Geschichtsverein für Kärnten in Klagenfurt:

Jahresbericht für 1904. 1905.
Carinthia I. 95. Jahrg., Nr. 1—6. 1905.

Naturhistorisches Landesmuseum in Klagenfurt:

Carinthia II. 95. Jahrg. 1905, Nr. 5, 6; 96. Jahrg. 1906, Nr. 1—4.

Siebenbürgisches Museum in Klausenburg:

Sitzungsberichte. I. Med. Abteilung, Bd. 26, Heft 2, 3; Bd. 27, Heft 1—3. II. Naturw. Abteilung, Bd. 27, Nr. 1—3. 1905—06.
Erdélyi Múzeum. Bd. XXIII, No. 1—4. 1906. 4°.
Az Erdélyi Múzeum Egyesület . . . Emlékkönyve. 1906. 4°.

Regierung des Kongostaates:

Annales du Musée du Congo. Botanique, vol. I, fasc. 3; Zoologie, Série V, tome I, fasc. 1. Bruxelles 1906. fol.
Notices sur les plantes utiles de la Flore du Congo. Vol. 2, fasc. 1. Bruxelles 1906.

Physikalisch-ökonomische Gesellschaft in Königsberg:

Schriften. 46. Jahrg. 1905. 1906.

Universität in Königsberg:

Schriften aus dem Jahre 1905/06 in 4° u. 8°.

K. Akademie der Wissenschaften in Kopenhagen:

Dansk Ordbog, udgiven under Videnskabernes Selskabs Bestyrelse. Ottende Tome V—Z. 1905. 4°.
Oversigt. 1905, No. 6; 1906, No. 1—6.
Mémoires. 1. Section des Lettres, 6e Série, tome 5, No. 3; 2. Section des Sciences, 7e Série, tome I, No. 5, 6, tome II, No. 5, 6, tome III, No. 1. 1906. 4°.

Conseil permanent international pour l'exploration de la mer in Kopenhagen:

Rapports et Procès-verbaux. Vol. IV—VI. 1905—06. 4°.
Bulletin trimestriel. Année 1904—05, No. 4; 1905—06, No. 1—3.
Publications de circonstance. No. 28—34 u. 13c. 1905—06.
Bulletin statistique des pêches maritimes. Vol. I. 1906. 4°.

Gesellschaft für nordische Altertumskunde in Kopenhagen:

Aarböger. II. Raekke, Bd. 20. 1905.
Mémoires. Nouv. Série 1904/06. 1905—06.

Genealogisk Institut in Kopenhagen:

Max Grohshennig, Legatfamilien Aagaard. 1905.

Akademie der Wissenschaften in Krakau:

Anzeiger. (Bulletin international) 1. Classe de philologie, 1905, No. 1—10. 2. Classe des sciences mathématiques, 1905, No. 8—10; 1906, No. 1—3.
Rocznik. Rok 1904/05. 1905.
Monumenta medii aevi historica. Tome 17. 1905. 4⁰.
Bibliografia historyi Polskiej. Bd. III, zesc. 3. 1906.
Sprawozdanie komisyi fizyograficzny. Tome 39 mit Tafeln. 1906. 8⁰ u. fol.
Atlas geologiczny Galicyi. Zeszyt 17, Karte u. Text. 1906. 8⁰ u. fol.
Katalog rekopisów. Akad. Um. 1906.
„ literatury. Tome 5, Heft 1—4. 1906.
Zapatowicz, Conspectus florae Galiciae. Tome 1. 1906.
Rozprawy filolog. Serie II, tome 26, 28; histor., Serie II, tome 23. 1906.
„ mathem. Tome 44, A. B. Spis rzeczy. 1904—05.
Uście solne. 1906.
Jan Czubek, Pisma polityczne. 1906.
Materyaly jezyk. Tome 3, zeszyt 1 i 2. 1905.
„ antropol. archeolog. Tome 8. 1906.
Wybrane pisma Lukiana. Tome 1. 1906.
Karlowicz, Slownik gwar. Tome 4. 1906.

Imperial University in Kyōto:

The Kyōto Imperial University Calendar 1905—06.

Historischer Verein in Landshut:

Verhandlungen. Bd. 42. 1906.

Société Vaudoise des sciences naturelles in Lausanne:

Bulletin. 5e Série, tome 41, No. 154; vol. 42, No. 155. 1905—06.

Société d'histoire de la Suisse romande in Lausanne:

Mémoires et Documents. IIe Série, tome 7. 1906.

Maatschappij van Nederlandsche Letterkunde in Leiden:

Tijdschrift. N. Serie, Deel XXIII, 3, 4; Deel XXIV, 1—3. 1904—05.

K. Gesellschaft der Wissenschaften in Leipzig:

Abhandlungen der philol.-hist. Klasse. Bd. XXIV, 4—6; Bd. XXV, 1. 1906. 4⁰.
Abhandlungen der math.-phys. Klasse. Bd. XXIX, 5—8. 1906. 4⁰.
Berichte der philol.-hist. Klasse. Bd. 57. 1905, Nr. 5, 6; Bd. 58, 1906, Nr. 1, 2.
Berichte der math.-phys. Klasse. Bd. 57, 1905, Nr. 5, 6; Bd. 58, 1906, Nr. 1—5.

Fürstlich Jablonowski'sche Gesellschaft in Leipzig:

Jahresbericht. 1905 u. 1906.

Verein für Erdkunde in Leipzig:

Mitteilungen 1905. 1906.
Katalog der Bibliothek. Heft II der Mitteilungen. 1905.

Cuerpo de ingenieros de minas del Perú in Lima:

Boletin. Nr. 26—35, 37—39, 40, 42, 43. 1905—06.
Segunda Memoria del Director del cuerpo. 1906.

University of Nebraska in Lincoln:

Bulletin of the agricultural Experiment Station. Nr. 76—80, 84. 1905.

Aeronautisches Observatorium bei Lindenberg:

Ergebnisse der Arbeiten im Jahre 1905. I. Bd. Braunschweig 1906. 4⁰.

Museum Francisco-Carolinum in Linz:

64. Jahresbericht. 1906.

Sociedade de geographia in Lissabon:

Boletim. 1905, No. 11, 12; 1906, No. 1—10.

Literary and philosophical Society in Liverpool:

Proceedings. 49th Session, No. 58, 1904—05. 1905.

Université Catholique in Loewen:

Publications académiques de l'année 1904/05.

Zeitschrift „La Cellule" in Loewen:

La Cellule. Tome XXII, fasc. 2. 1905. 4⁰.

Royal Institution of Great Britain in London:

Proceedings. Vol. 17, part 3; vol. 18, part 1. 1906.

The English Historical Review in London:

Historical Review. Vol. XXI, No. 81—84. 1906.

Royal Society in London:

Report on the Perl Oyster Fisheries of the Gulf of Manaar. Part III, IV. 1905. 4⁰.
Year-Book. 1906.
Proceedings. Series A, vol. 77, No. A 515—520; vol. 78, No. A 521—525, 1906; Series B, vol. 77, No. B 516—521; vol. 78, No. B 522—527, 1906.
Philosophical Transactions. Series A, vol. 205, 206; Series B, vol. 198. 1906. 4⁰.
Reports of the Commission for the investigation of Mediterranean Fever. Part IV. 1906.
Reports to the Evolution Committee. Report III. 1906.

R. Astronomical Society in London:

Monthly Notices. Vol. 66, No. 2—9. 1905—06.
Memoirs. Vol. 56. 1906. 4⁰.

Chemical Society in London:

Journal 1905. Supplementary number cont. Indexes, No. 519—530 (January—December). 1906.
Proceedings. Vol. 21, No. 301, 302; vol. 22, No. 303—317. 1905—06.

Geological Society in London:

The quarterly Journal. Vol. 61, part 1—4; vol. 62, part 1—4. 1905—06.
List. Nov. 15th 1905.
Geological Literature for the year ended Dec. 31st 1904. 1905.

Linnean Society in London:

Proceedings. 118th Session 1905/06. 1906.
The Journal. a) Botany, vol. 37, No. 260—262; b) Zoology, vol. 29, No. 193, 194. 1906.
List of the Linnean Society 1906/07. 1906.

Medical and chirurgical Society in London:

Medico-chirurgical Transactions. Vol. 88, 89. 1905—06.

R. Microscopical Society in London:

Journal. 1906, part 1—6.

Zoological Society in London:

Proceedings. 1905, vol. II, part 1, 2. 1906.
Transactions. Vol. XVII, part 3—5. 1904—05. 4⁰.

Zeitschrift „Nature" in London:

Nature. No. 1888—1940. 4⁰.

Secretary of State for India in Council in London:

G. A. Grierson, The Piśāca Languages of North-Western India. 1906.

India Office in London:

42 Bände und einige Faszikel sprachlichen, geographischen und technologischen Inhalts über Ostindien.
Agra, a Gazetteer. Vol. 8. Allahabad 1905.
Madras District Gazetteers. Guntúr, vol. 2; Gódávari, vol. 2. Appendix for Kistna District. Madras 1906.
District Gazetteers of the provinces of Agra and Oudh. Vol. 42—44. Allahabad 1905.
Technical Art Series. Plates I—XIII. Illustrations of Indian Industrial Art. Calcutta 1905. fol.

Museums-Verein für das Fürstentum Lüneburg in Lüneburg:

Lüneburger Museumsblätter. Heft 3. 1906.

Société géologique de Belgique in Lüttich:

Annales. Tome 30, livr. 3; tome 32, livr. 4; tome 33, livr. 1—3. 1902—06.

Société Royale des Sciences in Lüttich:

Mémoires. III[e] Série, tome 6. Bruxelles 1906.

Universität in Lund:

Acta Universitatis Lundensis. Tome XL. 1904, in 2 Teilen.
Acta. Nova Series II, Afdelninger I, 1905. 1905—06. 4⁰.
Sveriges offentliga Bibliotek. Accessions-Katalog 18—19, 1903—04, 2 Teile. Stockholm 1905—06.

Institut Grand Ducal in Luxemburg:

Archives trimestrielles de la section des sciences naturelles. Fasc. 1, 2. Janvier—Juin 1906. 4⁰.

Section historique de l'Institut Grand-Ducal in Luxemburg:

Publications. Vol. 50. 1905.

Historischer Verein der fünf Orte in Luzern:

Der Geschichtsfreund. Bd. 61. Stans 1906.

Université in Lyon:

Annales. Nouv. Série I, No. 14—16; Nouv. Série II, No. 15. 1905—06.

Wisconsin Geological and Natural History Survey in Madison:

Bulletin. No. 14, with an Atlas. 1906.

Government Museum in Madras:

Bulletin. Vol. V, No. 2. 1906.

Kodaikanal and Madras Observatories in Madras:

Annual Report for 1905. 1906. fol.
Bulletin. No. IV—VII. 1906. 4⁰.

R. Academia de ciencias exactas in Madrid:

Revista. Tomo 3, No. 3—6; tomo 4, No. 1—6. 1905—06.
Memorias. Tomo 23 u. 24. 1905—06. 4⁰.
Anuario. 1906.

R. Academia de la historia in Madrid:

Boletíu. Tomo 48, cuad. 1—6; Tomo 49, cuad. 1—6. 1906.

Museum für Natur- und Heimatkunde in Magdeburg:

Abhandluugen und Berichte. Bd I, Heft 2, 3. 1906.

R. Istituto Lombardo di scienze in Mailand:

Rendiconti. Serie II, vol. 38, fasc. 17—20; vol. 39, fasc. 1—16. 1906.
Memorie. Classe di scienze matematiche. Vol. XX, fasc. 7, 8. 1906. 4⁰.
Atti della fondazione Cagnola. Vol. 20. 1906.

Comitato per le onoranze a Francesco Brioschi in Mailand:

Opere matematiche di Francesco Brioschi. Tomo 4. 1906. 4⁰.

Società Italiana di scienze naturali in Mailand:

Elenco dei soci e Indice generale. 1906.
Museo mineralogico Borromeo. 1906.
Atti. Vol. 44, fasc. 3, 4; vol. 45, fasc. 1, 2. 1906.

Società Storica Lombarda in Mailand:

Archivio Storico Lombardo. Serie IV, anno 32, fasc. 8; anno 33, fasc. 9—11. 1905—06.

Altertumsverein in Mainz:

Mainzer Zeitschrift. Jahrg. I. 1906. 4⁰.

Literary and philosophical Society in Manchester:

Memoirs and Proceedings. Vol. 50, part 1—3. 1905—06.

Philippine Weather Bureau in Manila:

Bulletin for July—December 1905. 1905—06. 4⁰.
Annual Report for the year 1903. Part I—III. 1905. 4⁰.

Ethnological Survey for the Philippine Islands in Manila:

Publications. Vol. II, parts 2, 3; vol. IV, part 1. 1905.

Altertumsverein in Mannheim:

Mannheimer Geschichtsblätter. 1906, Nr. 2—11, VII. Jahrg. 4⁰.

Verein für Naturkunde in Mannheim:

71. u. 72. Jahresbericht für 1904/05. 1906.

Schwäbischer Schiller-Verein in Marbach:

X. Rechenschaftsbericht für das Jahr 1905/06. 1906.
Das Schiller-Museum in Marbach. Stuttgart 1906.

Universität in Marburg:

Schriften aus dem Jahre 1905/06 in 4⁰ u. 8⁰.

Abbaye de Maredsous:

Revue Bénédictine. Année 23, No. 2—4. 1906.

Faculté des sciences in Marseille:

Annales. Tome XV. Paris 1904. 4⁰.

Hennebergischer altertumsforschender Verein in Meiningen:

Neue Beiträge zur Geschichte deutschen Altertums. Lief. 20. 1906. 4⁰.

Verein für Geschichte der Stadt Meißen in Meißen:

Mitteilungen. Heft 25. 1906.

Royal Society of Victoria in Melbourne:

Proceedings. New Series, vol. 18, part 2; vol. 19, part 1. 1906.

Accademia Peloritana in Messina:

Atti. Vol. XX, fasc. 2; vol. XXI, fasc. 1. 1906.
Resoconti. April—Giugno 1906. 1906.

Gesellschaft für lothringische Geschichte in Metz:

Jahrbuch. XVII. Jahrg., 1. u. 2. Hälfte, 1905. 1906. 4⁰.

Instituto geológico in Mexico:

Parergones. Tomo I, No. 9, 10. 1905—06.
Boletín. No. 21. 1905. 4⁰.

Observatorio meteorológico-magnético central in México:

Boletín mensual. Octubre u. Noviembre 1902, Junio 1904. 4⁰.

Sociedad cientifica „Antonio Alzate" in Mexico:

Memorias y revista. Tomo 21, No. 9—12; tomo 22, No. 1—8; tomo 23, No. 1—4. 1904—05.

Regia Accademia di scienze lettere ed arti in Modena:

Memorie. Serie III, vol. 5. 1905. 4⁰.

Musée océanographique in Monaco:

Bulletin. No. 56—86. 1905—06.

Observatoire météorologique du Mont Blanc:

Annales. Tome VI. Paris 1905. 4⁰.

Bureau de Dépôt, Distribution et d'Échange de Publications in Montevideo:

Anuario estadistico de la República O. del Uruguay. Tomo II. 1906. 4⁰.

Museo nacional in Montevideo:

Annales. Serie II, entrega 2 und Seción historico-filosófica, tomo II, entrega 1. 1905. 4⁰.

Öffentliches Museum in Moskau:

Ottschet. Jahrg. 1905. 1906.

Lazarevsches Institut für Orientalische Sprachen in Moskau:

Trudy. Heft 13, 14. 1905.

Société Impériale des Naturalistes in Moskau:

Bulletin. Année 1905, No. 1—3. 1906.

Mathematische Gesellschaft in Moskau:
Matematitscheskij Sbornik. Bd. XXV, 3. 1905.

Lick Observatory in Mount Hamilton, California:
Bulletin. No. 88—97 u. 99—103. 1906.

Statistisches Amt der Stadt München:
Münchener Jahresübersichten für 1905. Teil I u. II. 4⁰.
Die Erhebung der Wohnverhältnisse in München 1904—07. I.—III. Teil. 4⁰.
Ergebnisse der Wohnungszählung vom 1. Dezember 1905. 4⁰.
Die Bevölkerung Münchens 1905. 1906. 4⁰.

Deutsche Gesellschaft für Anthropologie in Berlin und München:
Korrespondenzblatt. 37. Jahrg. 1906, Nr. 1—4, 6—12. Braunschweig 1906. 4⁰.

Hydrotechnisches Bureau in München:
Verzeichnis der Flächeninhalte der Bach- und Flußgebiete. Heft VII, Teil 1. 1906. 4⁰.
Jahrbuch. 1905, Heft 4, 5; 1906, Heft 1 u. 2. fol.

Generaldirektion der K. B. Posten und Telegraphen in München:
Verzeichnis der erscheinenden Zeitungen für 1907. I. Abt. 1906. fol.

K. Ludwigs-Kreisrealschule in München:
Geschichte der K. Ludwigs-Kreisrealschule in München v. G. Widenbauer. 1906.

K. Bayer. Technische Hochschule in München:
Darstellungen aus der Geschichte der Technik, der Industrie und Landwirtschaft in Bayern. 1906. 4⁰.
Schriften aus dem Jahre 1903—06.

Metropolitan-Kapitel München-Freising in München:
Schematismus der Geistlichkeit für das Jahr 1906.
Amtsblatt der Erzdiözese München und Freising. 1906, Nr. 1—31.

K. Oberbergamt in München:
Geognostische Jahreshefte. XVII. Jahrg. 1904. 1906. 4⁰.

Universität in München:
Schriften aus dem Jahre 1905/06 in 4⁰ u. 8⁰.

Ärztlicher Verein in München:
Sitzungsberichte. Bd. XV. 1905.

Historischer Verein in München:
Altbayerische Monatsschrift. Jahrg. 6, Nr. 3—5. 1906. 4⁰.

Verein für Luftschiffahrt in München:
16. Jahresbericht für 1905.

Ornithologische Gesellschaft in München:
Verhandlungen. 1904, Bd. V. 1905.

Verlag der Hochschul-Nachrichten in München:
Hochschul-Nachrichten. Nr. 184—195. 1906.

Verein für Geschichte und Altertumskunde Westfalens in Münster:
Zeitschrift. Bd. 63, Abt. 2 und Register zu Bd. 1—50. 1905.

Académie de Stanislas in Nancy:

Mémoires. 6e Série, tome 2. 1905.

Société des Sciences in Nancy:

Bulletin. Série III, tome 6, fasc. 4. 1906.

Reale Accademia di scienze morali et politiche in Neapel:

Atti. Vol. 36, 37. 1906.
Rendiconto. Anno 44. 1905.

Accademia delle scienze fisiche e matematiche in Neapel:

Rendiconto. Serie 3, vol. 11, fasc. 8—12; vol. 12, fasc. 1—8. 1905—06. 4⁰.

Zoologische Station in Neapel:

Mitteilungen. Bd. 17, Heft 4. Berlin 1906.

Historischer Verein in Neuburg a. D.:

Neuburger Kollektaneen-Blatt. 68. Jahrg. 1904. 1906.

Société des sciences naturelles in Neuchatel:

Bulletin. Tome 31, année 1902—03; tome 32, année 1903—04.

Institute of Engineers in New-Castle (upon-Tyne):

Transactions. Vol. 55, part 5, 6; vol. 56, part 1—3. 1906.
Annual Report for the year 1904/05 und 1905/06. 1905—06.
Report of the Committee upon mechanical Coalcutting. Part 2. 1905.

The American Journal of Science in New-Haven:

Journal. 4. Series, No. 121—126, 128—132. 1906.

Astronomical Observatory of the Yale University in New-Haven:

Transactions. Vol. 2, part 1.

American Oriental Society in New-Haven:

Journal. Vol. 26, second half; vol. 27, first half. 1906.

American Jewish Historical Society in New-York:

Publications. No. 13, 14. 1905—06.

American Museum of Natural History in New-York:

International Congress of Americanists. 13th Session, held in New-York in 1902. 1905.
Journal. Vol. VI, No. 1—4. 1906.
Annual Report for the year 1905. 1906.
Bulletin. Vol. XVII, part 4; vol. XXI. 1905.
Memoirs. Vol. IV, 5; vol. V, 3; VIII, 1; IX, 1—3; X, 1; XI, 1; XIV, 1. 1906. 4⁰.
Aboriginal Myths of Titicaca (Bolivia). By Adolph F. Bandelier. 1906.

American Geographical Society in New-York:

Bulletin. Vol. 38, No. 1—11. 1906.

Nederlandsche botanische Vereeniging in Nijmegen:

Recueil des travaux botaniques Neerlandais. Vol. II, livr. 3—4. 1906.

Archaeological Institut of America in Norwood, Mass.:

American Journal of Archaeology. Vol. 10, No. 1—3. 1906.

Naturhistorische Gesellschaft in Nürnberg:

Abhandlungen. XV. Bd., 3. Heft. 1905.
Jahresbericht für 1904. 1905.

Germanisches Nationalmuseum in Nürnberg:

Anzeiger. Jahrg. 1905 in 4 Heften. 1905. 4°.

Stadtmagistrat Nürnberg:

Katalog der historischen Ausstellung der Stadt Nürnberg. 1906.

Neurussische naturwissenschaftliche Gesellschaft in Odessa:

Sapiski. Bd. 28, 29. 1905—06.

Verein für Geschichte und Landeskunde in Osnabrück:

Mitteilungen. 30. Bd. und Beiheft zum 30. Bd., 1905. 1906.

Department of the Interior in Ottawa:

Mounted Police Polar Expedition Maps. 1906.

Geological Survey of Canada in Ottawa:

Palaeozoic Fossils. Vol. III, part IV. 1906.
Annual Report. New Series, vol. XIV, 1901 mit Maps; vol. XV (1902—03) mit Maps. 1905—06.

Royal Society of Canada in Ottawa:

Proceedings and Transactions. II. Seris, vol. 11. 1906.

Radcliffe Observatory in Oxford:

Catalogue of Stars for 1900. 1906. 4°.

Accademia scientifica Veneto-Trentino-Istriana in Padova:

Atti. N. Serie, anno II, fasc. 1, 2. 1905.

R. Accademia di scienze in Padua:

Atti e Memorie. Nuova Serie, anno 364, 1904—05; n. Serie, vol. 21. 1905.

Redaction der Zeitschrift „Rivista di storica antica“ in Padua:

Rivista. N. Serie, anno 10, fasc. 2—4. 1906.

Reale Accademia di scienze, lettere e belle arti in Palermo:

Bullettino. Anni 1899—1902. 1906. 4°.

Circolo matematico in Palermo:

Annuario 1905.
Rendiconti. Tomo XXI, fasc. 1—3; tomo XXI, fasc. 1, 2. 1906.
Supplemento ai Rendiconti. No. 1. 1906. 4°.

Collegio degli Ingegneri in Palermo:

Atti. 1905, Luglio—Dicembre; 1906, Gennaio—Giugno. 4°.

Académie de médecine in Paris:

Bulletin. 1906, No. 1—44.

Académie des Sciences in Paris:

Oeuvres d'Augustin Cauchy. Série II, tome 1. 1905. 4°.
Comptes rendus. Tome 142, No. 1—26; tome 143, No. 1—27.

Moniteur Scientifique in Paris:

Moniteur. Livr. 769—780 (Janvier—Décembre 1906). 4⁰.

Musée Guimet in Paris:

Annales. Bibliothèque d'études, tome 18 u. 20. 1905—06.
Revue de l'histoire des réligions. Tome 51, No. 3; tome 52, No. 1—3; tome 53, No. 1. 1905—06.

Muséum d'histoire naturelle in Paris:

Bulletin. Année 1904. No. 2—4; année 1905, No. 6; année 1906, No. 1—3.
Nouvelles Archives. Série IV, tome VII, 1, 2. 1905. 4⁰.

Société d'anthropologie in Paris:

Bulletins. Ve Série, tome 6, fasc. 3—6. 1905.

Société des études historiques in Paris:

Revue. 72e année, Janvier—Août 1906.

Société de géographie in Paris:

La Géographie. XII. année 1905, No. 3—6; XIII. année 1906, No. 1—4. 4⁰.

Société mathématique de France in Paris:

Bulletin. Tome 34, fasc. 1—3. 1906.

Western Australia Geological Survey in Perth:

Bulletin. No. 21, 22. 1906.

Académie Impériale des sciences in St. Petersburg:

Comptes rendus de la commission sismique. Tome II, livr. 2. 1906. 4⁰.
Mémoires. a) Classe historico-philologique. Série VIII, tome VII, No. 3—7; b) Classe physico-mathémat.. Série VIII, tome XVI, No. 11, 12, tome XVII, No. 1—6. 1905. 4⁰.
Annuaire du Musée zoologique. 1905, No. 1, 2, 1906; Beilage zum Annuaire, Bd. 11, 1906.

Kaiserl. Bibliothek in St. Petersburg:

Ottschet 1900/01. 1905.
Gallerie Peters des Großen in der K. öffentlichen Bibliothek. 1903. 4⁰.

Comité géologique in St. Petersburg:

Bulletins. XXIII, No. 7—10. 1904.
Mémoires. Nouv. Série, livr. 3, 18—20. 1905. 4⁰.

Kaiserl. Botanischer Garten in St. Petersburg:

Acta horti Petropolitani. Tome 24, fasc. 3; tome 25, fasc. 1; tome 26, fasc. 1. 1905—06. 4⁰.

Kaiserl. Russische Archäologische Gesellschaft in St. Petersburg:

Sapiski. Bd. 16, No. 2—4. 1905—06. 4⁰
„ Orientalische Abteilung, Bd. 17, No. 1—3. 1906. 4⁰.
„ Russische und slavische Abteilung, Bd. VII, 1. 1905. 4⁰.
„ Klassische Abteilung, Bd. II, 1, 2. 1904—06. 4⁰.
Materialien zur Geschichte der russischen geistlichen Mission in Peking. 1905. 4⁰.

Kaiserl. Mineralogische Gesellschaft in St. Petersburg:

Materialien. Bd. XXIII, Lief. 1. 1906.
Verhandlungen. II. Serie, Bd. 43, Lief. 1, 2. 1905.

Physikalisch-chemische Gesellschaft an der Kaiserl. Universität St. Petersburg:

Schurnal. Bd. 37, Heft 8, 9; Bd. 38, Heft 1. 1905—06.

Physikalischss Zentral-Observatorium Nicolas in St. Petersburg:

Publications. Série II, vol. III, vol. XIV, vol. XVII, No. II. 1905. fol.
Annales. Année 1903, partie I, II, fasc. 1, 2. 1905. 4⁰.

Kaiserl. Universität in St. Petersburg:

Schriften aus dem Jahre 1905/06 in 4⁰ u. 8⁰.

Academy of natural Sciences in Philadelphia:

Journal. Second Series, vol. XIII, part 2. 1905. 4⁰.
Proceedings. Vol. 57, part 3; vol. 58, part 1. 1906.

Historical Society of Pennsylvania in Philadelphia:

The Pennsylvania Magazine of History. Vol. XXX, No. 117—119. 1906.

American Philosophical Society in Philadelphia:

Proceedings. Vol 44, No. 181; vol. 45, No. 182. 1906.
Transactions. New Series, vol. XXI, part 2, 3. 1906. 4⁰.

R. Scuola normale superiore di Pisa:

Annali. Filosofia e filologia. Vol. 19, 20. 1906–07.

Società Toscana di scienze naturali in Pisa:

Atti. Processi verbali, vol. 14, No. 9, 10; vol. 15, No. 1—5. 1905—06. 4⁰.
Atti. Memorie, vol. XXI. 1905. gr. 8⁰.

Società Italiana di fisica in Pisa:

Il nuovo Cimento. Serie V, tomo 10, Ottobre—Dicembre 1905, tomo 11, Genajo—Giugno 1906, tomo 12, Luglio—Settembre 1906.

Altertumsverein in Plauen:

Mitteilungen. 17. Jahresschrift 1905—06. 1906.

Historische Gesellschaft in Posen:

Zeitschrift. 20. Jahg., 1. u. 2. Halbband. 1905.
Historische Monatsblätter. Jahrg. VI, 1905, Nr. 1—12.

K. Geodätisches Institut in Potsdam:

Veröffentlichung. N. F., Nr. 25—29. Berlin 1906. 4⁰.
F. R. Helmert, Die Größe der Erde. 1. Mitteilung. Berlin 1906. 4⁰.

Astrophysikalisches Observatorium in Potsdam:

Publikationen. Bd. XV, 3—6; Bd. XVI; Bd. XVIII, 1. 1905–06. 4⁰.

Landesarchiv in Prag:

Archiv Český. Bd. XXII. 1905. 4⁰.

Gesellschaft zur Förderung deutscher Wissenschaft, Kunst und Literatur in Prag:

Mitteilung. Nr. XVI. 1905.
Rechenschaftsbericht für das Jahr 1905. 1906.

K. Böhmische Gesellschaft der Wissenschaften in Prag:

Catalogus codicum manuscriptorum latinorum qui in bibliotheca publica et universitatis Pragensis asservantur, auctore Jos. Truhlář. Pars II. 1906. gr. 8⁰.
Jahresbericht für das Jahr 1905. 1906.
Sitzungsberichte 1905. a) Klasse für Philosophie.
b) Math.-naturw. Klasse, 1905, und Generalregister zu 1884 - 1904. 1905.
St. Kostlivy, Untersuchungen über die klimatischen Verhältnisse von Beirut. 1905.
Václav Müller, Svobodníci. 1905.

Mathematisch-physikalische Gesellschaft in Prag:

Časopis. Band XXXV, No. 1—3. 1905—06.

Lese- und Redehalle der deutschen Studenten in Prag:

57. Bericht über das Jahr 1905. 1906.

K. Böhmisches Museum in Prag:

Bericht für das Jahr 1905. 1906.
Časopis. Bd. 80, Heft 1—4. 1906.
Památky. Bd. XXI, Heft 5—8, Inhaltsverzeichnis zu Bd. 21; Bd. XXII, Heft 1, 2. 1905—06. 4⁰.
Starožitnosti země české. Del II, svazek 3. 1905. 4⁰.

K. K. Sternwarte in Prag:

Magnetische und meteorologische Beobachtungen. Jahrg. 1905. 66. Jahrg. 1906. fol.

Deutsche Karl Ferdinands-Universität in Prag:

Die feierliche Installation des Rektors für das Jahr 1905/06. 1906.

Verein böhmischer Mathematiker in Prag:

Časopis. Tome 35, No. 4, 5. 1906.

Verein für Geschichte der Deutschen in Böhmen in Prag:

Mitteilungen. 44. Jahrg., Nr. 1—4. 1905—06.

Deutscher naturwissenschaftlich-medizinischer Verein für Böhmen „Lotos" in Prag:

Sitzungsberichte. Jahrg. 1905, N. F., Bd. 25. 1905.

Verein für Natur- und Heilkunde in Preßburg:

Verhandlungen. Bd. 25, 26. 1905—06.

Meteorological Department of Transvaal in Pretoria:

Annual Reports for the year ended 30. June 1905. 1906. fol.

Historischer Verein in Regensburg:

Verhandlungen. Bd. 57. 1905.

Naturwissenschaftlicher Verein in Regensburg:

Berichte. 10. Heft, 1903 u. 1904 und Beilage dazu. 1905.

Naturforscher-Verein in Riga:

Korrespondenzblatt. Nr. 48. 1905.

Bibliothèque nationale in Rio de Janeiro:

Annaes da Bibliotheca nacional do Rio de Janeiro. Vol. 26, 1904. 1905. 4⁰.
A Bibliotheca Nacional em 1893. Relatorio. 1905.
A Conferencia Internacional de Copenhague sobre a Tuberculose. Paris 1904. 4⁰.
J. P. Calogeras, As minas do Brasil e sua legislação II, III. 1905.
Brazil at the Louisiana Purchase Exposition. St. Louis 1904.

Museu nacional in Rio de Janeiro:

Archivos. Vol. XII. 1903. 4⁰.

Observatorio in Rio de Janeiro:

Annuario. 1906, anno 32.
Boletim mensal. Jan.–Décembro de 1905. 4⁰.

Geological Society of America in Rochester:

Bulletin. Vol. 16. 1905.

Reale Accademia dei Lincei in Rom:

Annuario. 1906.
Memorie. Classe di scienze fisiche. Serie V, vol. 6, fasc. 1, 2. 1906. 4⁰.
Atti. Serie V. Notizie degli scavi di antichità. Vol. 2, fasc. 8—12. 1905. 4⁰.
Atti. Serie V, Rendiconti. Classe di scienze fisiche. Vol. 14, semestre 2, fasc. 12 e Indice; vol. XV, semestre 1, fasc. 1–12; vol. XV, semestre 2, fasc. 1—10. 1905–06. 4⁰.
Rendiconti. Classe di scienze morali. Serie V, vol. 14, fasc. 7—12; vol. 15, fasc. 1—4. 1905–06.
Atti. Rendiconto dell' adunanza solenne del 3 Giugno. 1906. 4⁰.

Biblioteca Apostolica Vaticana in Rom:

Studi e Testi 16. Initia patrum. Vol. I. 1906.

R. Comitato geologico d'Italia in Rom:

Bollettino. Anno 1905, No. 3, 4; anno 1906, No. 1, 2.

Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei in Rom:

Atti. Anno LVIII (1904—05), Sessione I—VII. 1905. 4⁰.

Kaiserl. Deutsches Archäologisches Institut (röm. Abt.) in Rom:

Mitteilungen. Bd. XX, Nr. 3, 4; Bd. XXI, Nr. 1, 2. 1906.

R. Ministero della Istruzione pubblica in Rom:

Le opere di Galileo Galilei. Vol. 17, 18. 1906. 4⁰.

R. Ufficio centrale meteorologico italiano in Rom:

Annali. Serie II, vol. XVI, parte 2 e 3. 1906. fol.

R. Società Romana di storia patria in Rom:

Archivio. Vol. 28, fasc. 3, 4; vol. 29, fasc. 1, 2. 1905—06.

Universität Rostock:

Schriften aus dem Jahre 1905/06 in 4⁰ u. 8⁰.

R. Accademia di scienze degli Agiati in Rovereto:

Atti. Serie III, vol. XI, fasc. 3, 4; vol. XII, fasc. 1, 2. 1905–06.

École française d'Extrême-Orient in Saigon:

Bulletin. Tome 5, No. 3, 4. Hanoi 1905. 4⁰.

Essex Institute in Salem:

J. H. Sears, The physical Geography, Geology etc. of Essex County, Mass. 1905. 4⁰.

Gesellschaft für Salzburger Landeskunde in Salzburg:

Mitteilungen. 46. Vereinsjahr. 1906.

Naturwissenschaftliche Gesellschaft in St. Gallen:

Jahrbuch 1904 und 1905.

Academy of science in St. Louis:

Transactions. Vol. XIV, No. 7, 8 und Register zu Vol. 1–14; vol. XV, No. 1–5. 1904–05.

Instituto y Observatorio de marina de San Fernando (Cadiz):

Annales. Seccion 2ª, año 1904 und 1905. 1905. fol.

Bosnisch-Herzegovinische Landesregierung in Sarajevo:

Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen im Jahre 1901. Wien 1905. fol.

Universität in Sassari (Sardinien):

Studi Sassaresi. Anno IV, sez. I, fasc. 2; sez. II, fasc. 1. Supplemento No. 2–5. 1905–06.

Verein für mecklenburgische Geschichte in Schwerin:

Jahrbücher und Jahresberichte. 71. Jahrg. 1906.

Nord-China Branch of the R. Asiatic Society in Shanghai:

Journal. Vol. 37. 1906.

R. Accademia dei fisiocritici in Siena:

Atti. Serie IV, vol. 17, fasc. 5–10; vol. 18, fasc. 1–5. 1905–06.

Universität in Sophia:

Annuaire I, 1904–05. 1905.

K. K. Archäologisches Museum in Spalato:

Bullettino di Archeologia. Anno 28, No. 9–12; anno 29, No. 1–7. 1905–06.

K. Vitterhets Historie och Antiquitets Akademie in Stockholm:

Oscar Almgren, „Kung Björns Hög". 1905. 4⁰.
Antiqvarisk Tidskrift. Bd. 9, No. 4; Bd, 11, No. 6; Bd. 13, No. 4; Bd. 15, No. 3; Bd. 17, No. 4, 5; Bd. 18, No. 1. 1905.

K. Akademie der Wissenschaften in Stockholm:

Årsbok. År 1905. Upsala 1905.
Meteorologiska Jakttagelser i Sverige. Bd. 46, 47. Upsala 1905–06. 4⁰.
Handlingar. N. F., Bd. 39, No. 6; Bd. 40, No. 1, 5; Bd. 41, No. 1–3, 5. 1904–06.
Arkiv för Zoologi. Bd. 2, Heft 4; Bd. 3, Heft 1, 2. 1906.
Arkiv för Kemi Bd. II, 2, 3. 1906.
Arkiv för Botanik. Bd. V, 1–4; Bd. VI, 1, 2. 1905–06.
Arkiv för Matematik. Bd. II, 3, 4; Bd. III, 1. 1905–06.
Les prix Nobel en 1903. 1906.
Nobelinstitut Meddelanden. Bd. I, 2–5. 1906.

Geologiska Förening in Stockholm:

Förhandlingar. Bd. 27, Heft 7; Bd. 28, Heft 1–6. 1905–06.

Institut Royal géologique in Stockholm:

Sveriges geologiska Undersökning. 12 Hefte mit Karten. 1906.

Commission Royale Suédoise pour la mesure d'un arc de méridien au Spitzberg in Stockholm:

Mesure d'un arc de méridien au Spitzberg. S II B, S V, S VII A, S VIII A, S VIII B, S VIII B¹, S VIII B², S VIII B³, S VIII B⁴, S VIII B⁵, S VIII C, S X. 1904–05. 4⁰.

Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften in Straßburg:

Monatsbericht. Bd. 40, Nr. 1–7. 1906.

Kaiserl. Universität Straßburg:

Schriften aus dem Jahre 1905/06 in 4⁰ u. 8⁰.

Württembergische Kommission für Landesgeschichte in Stuttgart:

Vierteljahreshefte für Landesgeschichte. N. F., XV. Jahrg. 1906, Heft 1–4.

K. Württemberg. Statistisches Landesamt in Stuttgart:

Württembergische Jahrbücher für Statistik. Jahrg. 1905, Heft 1, 2. 1905. 4⁰.
Statistisches Handbuch für das Königreich Württemberg. Jahrg. 1904 u. 1905. 1906. gr. 8⁰.

Department of Mines and Agriculture of New-South-Wales in Sydney:

Annual Report for the year 1905. 1906. fol.
Mineral Resources. No. 11. 1906.
Records of the Geological Survey. Vol. 8, part 2. Mit einer Karte. 1905. 4⁰.
Palaeontology. No. 5. 1906. 4⁰.

Linnean Society of New-South-Wales in Sydney:

Proceedings. Vol. 30, part 3, part 4 and Supplement; vol. 31, part 1, 2. 1905–06.

Observatorio astronómico nacional in Tacubaya:

Anuario. Año de 1906, año XXVI.

National Physical Laboratory in Teddington:

Report for the year 1905. 1906. 4⁰.

Earthquake Investigation Committee in Tokyo:

F. Omari, Note on the San Francisco Earthquake of April 18. 1906. 4⁰.

Deutsche Gesellschaft für Natur- und Völkerkunde Ostasiens in Tokyo:

Mitteilungen. Bd. 10, Heft 3. 1906.

Kaiserl. Universität Tokyo (Japan):

Calendar 1905/06.
The Journal of the College of Science. Vol. 20, article 8—12; vol. 21, article 1. 1905—06. 4⁰.
Mitteilungen aus der medizinischen Fakultät. Bd. VI, No. 4. 1905. 4⁰.
The Bulletin of the College of Agriculture. Vol. VII, No. 1, 2. 1906. 4⁰.

Université in Toulouse:

L'oeuvre antialcoolique par Doumergue. 1906.
Bulletin de la station de pisciculture. No. 2 1905.
Annales du Midi. No. 68, 69. 1905—06.
Annales de la faculté des sciences. IIe Série, tome VII, fasc. 3, 4; tome VIII, fasc. 1. 1905 - 06. 4⁰.

Biblioteca e Museo comunale in Trient:

Archivio Trentino. Anno XX, fasc. 2; anno XXI, fasc. 1—3. 1905—06.

Kaiser Franz Joseph-Museum für Kunst und Gewerbe in Troppau:

Jahresbericht für die Jahre 1904 und 1905. 1906.

Tufts College Mass.:

Studies. Vol. 2, No. 1. 1905.

R. Accademia delle scienze in Turin:

Osservazioni meteorologische. Anno 1905. 1906.
Atti. Vol. 41, disp. 1—15 und Indici generali zu Vol. 31—40. 1905—06.
Memorie. Serie II, tomo 55. 1905. 4⁰.

R. Accademia d'agricoltura in Turin:

Annali. Vol. 48, 1905. 1906.

Humanisk. Vetenskaps Samfund in Upsala:

Skrifter. Bd. IX. 1906.

Meteorolog. Observatorium der Universität Upsala:

Bulletin mensuel. Vol. 37. 1905—06. fol.

K. Universität in Upsala:

Results of the Swedish Zoological Expedition to Egypt 1901, part II. 1905.
Schriften aus dem Jahre 1905/06 in 4⁰ u. 8⁰.
Botaniska Studier tillägnade F. R. Kjellman den 4. Nov. 1906. 1906. gr. 8⁰.

Historisch Genootschap in Utrecht:

Bijdragen en Mededeelingen. Bd. XXVI (1905). Amsterdam 1905.

Provincial Utrechtsch Genootschap in Utrecht:

Naamlijst en Registers.
Aanteekeningen. 5. Juni 1906.
Verslag. 6. Juni 1906.

Institut Royal Météorologique des Pays-Bas in Utrecht:

Annuaire 1904. 1906. 4⁰.
Mededeelingen en Verhandelingen Ia, b, II—IV. 1906.

Ateneo Veneto in Venedig:

Atti. Vol. 27, No. 1, 2; vol. 28, No. 1, 2. 1904—05.

R. Istituto Veneto di scienze in Venedig:

Atti. Vol. 63, No. 1—10; vol. 64, No. 1—10. 1904—05.
Memorie. Vol. XXVII, No. 3—5. 1904—05. 4⁰.

Mathematisch-physikalische Gesellschaft in Warschau:

Prace. Tomo 17. 1906.

National Academy of Sciences in Washington:

Memoirs. Vol. IX. 1905. 4⁰.

Bureau of American Ethnology in Washington:

Bulletin. No. 28, 29, Haida Texts 32. 1904—06.
23d annual Report. 1904. 4⁰.

Commissioner of Education in Washington:

Report for the year ending June 30, 1904. Vol. 1. 1906.

U. S. Department of Agriculture in Washington:

Yearbook 1905. 1906.

Smithsonian Institution in Washington:

Smithsonian Contributions to knowledge. Vol. 34.
Carl Barus, A continuous Record of Atmospheric Nurleation 1905. 4⁰.
Annual Report for the year ending June 30, 1904. 1905.
Miscellaneous Collections. No. 1585. 1905.
Contributions from the U. S. National Herbarium. Vol. 10, part 1, 2; vol. 11. 1906.

U. S. National-Museum in Washington:

Annual Report for the year 1904. 1906.
Proceedings. Vol. 28—30. 1905—06.
Bulletin. No. 54. 55. 1905.

U. S. Naval Observatory in Washington:

Publications. II. Series, vol. IV, part I—IV. 1906. 4⁰.

Philosophical Society in Washington:

Bulletin. Vol. XIV, p. 317—336, 339—450. 1906.

U. S. Coast and Geodetic Survey in Washington:

Annual Report for the year 1905. 4⁰.

United States Geological Survey in Washington:

Bulletins. No. 247, 251, 256, 263, 265, 266, 268, 274—278, 280—282, 288, 291. 1905—06.
Monograph. No. XXXII. Atlas. Yellowstone National Park XLV, XLVII, XLIX, 45, 47, 49. XLVIII. 2 parts. 1904—06. 4⁰.
Annual Report XXVI, 1904—05. 1905. 4⁰.
Professional Paper. No. 34, 36—38, 40—44, 48, 50. 1904—05. 4⁰.
Mineral Resources, 1904. 1905.
Water-Supply Paper. No. 123, 125, 127, 129—131, 133—158, 163, 165 bis 171, 176, 178. 1905—06.

Harzverein für Geschichte in Wernigerode:

Zeitschrift. 38. Jahrg., 2. Heft, 1905; 39. Jahrg., 1. u. 2. Heft, 1906, und Register zu Jahrg. 25—30, Bd. II. 1906.

Kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien:

Sitzungsberichte. Philos.-hist. Klasse, Bd. 150, 151, 153 und Register zu 141—150. 1905.
Mathem.-naturwissenschaftl. Klasse.
Abt. I, Bd. 114, Heft 6—10; Bd. 115, Heft 1—5.
„ IIa, Bd. 114, Heft 8—10; Bd. 115, Heft 1—5.
„ IIb, „ 114, „ 7—10; „ 115, „ 1—6.
„ III, Bd. 114, Heft 5—10; Bd. 115, Heft 1—5.
Denkschriften. Philos.-hist. Klasse, Bd. 51, 52. 1906. 4⁰.
Mathem.-naturwissenschaftl. Klasse, Bd. 78. 1906. 4⁰.
Anzeiger der mathem.-naturwissenschaftl. Klasse. 1906, Nr. I—XXVII.
Archiv für österreichische Geschichte. Bd. 94, 1. Hälfte. 1906.
Fontes rerum Austriacarum. II. Abt., Bd. 58 u. II. Abt., Bd. 59. 1906.
Almanach. Jahrg. 1906, Bd. 56, Heft 1 u. 2. 1906. 4⁰.
Mitteilungen der Erdbebenkommission. N. F., Heft 30. 1906.

K. K. Geologische Reichsanstalt in Wien:

Verhandlungen. 1905, Nr. 13—18; 1906, No. 1—10. 4⁰.
Abhandlungen. Bd. XX, Heft 2. 1906. fol.

K. K. Zentralanstalt für Meteorologie in Wien:

Jahrbücher. Bd. 49, I u. II. 1906. 4⁰.

K. K. Gesellschaft der Ärzte in Wien:

Wiener klinische Wochenschrift. 1906, Nr. 1—52. 4⁰.

Zoologisch-botanische Gesellschaft in Wien:

Verhandlungen. Bd. 55, Heft 9, 10; Bd. 56, Heft 1—7. 1905—06.
Abhandlungen. Bd. III, Heft 3, 4. 1906. 4⁰.

Comité für die Lieben-Feier in Wien:

Festschrift Adolf Lieben zum 50jährigen Doktorjubiläum und zum 70. Geburtstage gewidmet. Leipzig 1906.

Österr. Kommission für die internationale Erdmessung in Wien:

Verhandlungen. Protokoll über die am 29. Dez. 1904 abgehaltene Sitzung.

K. K. Naturhistorisches Hofmuseum in Wien:

Annalen. Bd. XX, Nr. 1—3. 1905. 4⁰.

Geologisches und paläontologisches Institut der Universität Wien:

Beiträge zur Paläontologie und Geologie Österreich-Ungarns. Bd. XIX, Heft 2 u. 3. 1906. 4⁰.

K. K. Universität in Wien:

Schriften aus dem Jahre 1906.

Verein zur Verbreitung naturwissenschaftlicher Kenntnisse in Wien:

Schriften. Bd. 46, Jahrg. 1905/06. 1906.

Verein für Nassauische Altertumskunde etc. in Wiesbaden:

Annalen. 35. Bd., 1905. 1906. 4⁰.

Nassauischer Verein für Naturkunde in Wiesbaden:

Jahrbücher. Jahrg. 59. 1906.

Physikalisch-medizinische Gesellschaft in Würzburg:

Verhandlungen. N. F., Bd. 38, Nr. 2—12. 1905—06.
Sitzungsberichte. 1905, Nr. 3—9.

Historischer Verein von Unterfranken in Würzburg:

Archiv. Bd. 47. 1905.
Jahresbericht für 1904. 1905.

Polytechnisches Zentralbureau in Würzburg:

Festgabe zur Jahrhundertfeier. 1906. 4°.

Schweizerische Meteorologische Zentralanstalt in Zürich:

Annalen 1904. 41. Jahrg. 1906. 4°.

Allgemeine geschichtsforschende Gesellschaft der Schweiz in Zürich:

Jahrbuch für Schweizerische Geschichte. 31. Bd. 1906.

Antiquarische Gesellschaft in Zürich:

Mitteilungen. Bd. 26, Heft 4. 1906. 4°.

Naturforschende Gesellschaft in Zürich:

Neujahrsblatt auf das Jahr 1906. 1906. 4°.
Vierteljahrsschrift. Jahrg. 50, Heft 3, 4; Jahrg. 51, Heft 1. 1905—06. 4°.

Schweizerisches Landesmuseum in Zürich:

Anzeiger für Schweizerische Altertumskunde. N. F., Bd. VII, Nr. 4; Bd. VIII, Nr. 1, 2. 1906. 4°.
14. Jahresbericht 1905. 1906.

Sternwarte in Zürich:

Astronomische Mitteilungen. Nr. 97. 1906.

Universität in Zürich:

Schriften aus dem Jahre 1905/06 in 4° u. 8°.

Nachtrag:

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik und Physik in Berlin:

Jahrbuch. Bd. 35, Heft 2.

American Academy of Arts and Sciences in Boston:

Proceedings. Vol. 41, No. 14, 15. 1905.

Australasian Association for the advancement of science in Dunedin:

Report of the 10th Meeting held at Dunedin 1904.

Von folgenden Privatpersonen:

Prince Albert I. von Monaco:

Resultats des Campagnes scientifiques. Fasc. 32. 1906. fol.

V. Avramoff in Sofia:

Description Résumée des Monnaies de la collection de Avramoff. 1906.

Concetto Barreca in Syrakus:

Le Catacombe di S. Giovanni in Siracusa. 1906.
Sopra un giudizio del Prof. Paolo Orsi a proposito delle Catacombe di S. Giovanni. 1906.

Verlagsbuchhandlung Johann Ambrosius Barth in Leipzig:

Beiblätter zu den Annalen der Physik. 1906, Nr. 1—23 u. Bd. 30, Heft 13.
Journal für praktische Chemie. N. F., Bd. 71, Heft 5—7; Bd. 72, Heft 6, 11, 12; Bd. 73, Heft 1—9; Bd. 74, Heft 1—4, 10. 1905—06.

Buchhandlung Böhlaus Nachfolger in Weimar:

Die Gesetze der Angelsachsen. Herausgegeben im Auftrage der Savigny-Stiftung von F. Liebermann. Bd. II, 1. Hälfte. Halle 1906. 4⁰.
Zeitschrift der Savigny-Stiftung für Rechtsgeschichte. 27. Bd. der romanist. und der germanist. Abteilung. Weimar 1906.

Ludwig Curtius in Athen:

Samiaca I. (Sep.-Abdr.) 1906.

H. Diels in Berlin:

Die Handschriften der antiken Ärzte. Berlin 1906. 4⁰.

Franz Doflein in München:

Ostasienfahrt. Leipzig 1906.

Erich von Drygalski in München:

Ferdinand Freiherr von Richthofen. Leipzig 1906.

Leopold Engel in Blasewitz bei Dresden:

Geschichte des Illuminaten-Ordens. Berlin 1906

Joh. Ev. Engl in Salzburg:

Hyrtls Mozart-Schädel. I. Die geschichtliche Schilderung. 1906.

Artur J. Evans in Oxford:

The Palace of Knossos. Athen 1904—05. 4⁰.

R. Fick in Prag:

Betrachtungen über die Chromosomen, ihre Individualität, Reduktion und Vererbung. 1905.

Emil Fischer in Berlin:

Untersuchungen über Aminosäuren. 1906.

Verlagsbuchhandlung von Gustav Fischer in Jena:

Naturwissenschaftliche Wochenschrift. 1906, Nr. 1—52.
Zoologische Forschungsreisen in Australien von R. Semon. Bd. IV, Lief. 4 = Lief. 26. 1905. fol.

Henri Fischer in Paris:

3 opuscules d'Édouard Piette, et un nécrologe d'Éd. Piette par Henri Fischer. 1906.

Hermann Fischer in Tübingen:

Schwäbisches Wörterbuch. Lief. 13—16. 1906. 4⁰.

R. Forrer in Straßburg i. E.

Die Schwerter und Dolche in ihrer Formenentwicklung. Leipzig 1905. fol.
Keltische Numismatik der Rhein- und Donaulande. (5. Fortsetzung.)

Henri Gaidoz in Paris:

Pour le centenaire de Gaspar Zeuss. 1906.

Mme Vve J. B. André Godin in Guise (Aisne):

Le Devoir. Tome 29, Décembre 1905; tome 30, Janvier-Décembre 1906.
Documents pour une biographie complète de Jean-Baptiste-André Godin. Vol. I. 1897—1901.

Lucien Graux in Paris:

Proportionnalité direct entre le point cryoscopique d'une eau minérale et la composition de cette eau. 1906. 4⁰.

S. Gundelfinger in Darmstadt:

O. Hesse, Vorlesungen aus der analytischen Geometrie. 4. Aufl., revidiert und ergänzt. Leipzig 1906.

Ernst Haeckel in Jena:

Prinzipien der generellen Morphologie der Organismen. Berlin 1906.

B. Hagen in Frankfurt:

Kopf- und Gesichtstypen ostasiatischer und melanesischer Völker. Stuttgart 1906. fol.

Hermine Hartleben in Berlin:

Champollion. Sein Leben und sein Werk. 2 Bde. 1906.

F. R. Helmert in Potsdam:

Generalleutnant Dr. Oskar Schreiber. Leipzig 1905.

Hermann von Ihering in São Paulo:

The Anthropology of the State of S. Paulo, Brazil. 1906.

Wilhelm Knapp in Halle:

Chemische Zeitschrift. 1906, Nr. 1, 2, 4—18.

A. Köllikers Relikten in Würzburg:

Die Entwicklung der Elemente des Nervensystems. Leipzig 1905.

P. Kokowzoff in Petersburg:

Nouveaux fragments Syropalert. 1906. fol.

Karl Krumbacher in München:

Byzantinische Zeitschrift. Bd. XV, Heft 1—4. Leipzig 1906.

J. V. Kull in München:

Repertorium zur Münzkunde Bayerns. 3. Fortsetzung. 1906.

Henry Charles Lea in Philadelphia:

A. History of the Inquisition of Spain. Vol. I u. II. New-York 1906.

Joseph Levy in Grussenheim (Oberelsaß):

Geschichte des Dorfs Zimmerbach. Rixhenn 1906.

F. und L. Lindemann in München:

Henri Poincaré, Wissenschaft und Hypothese. Leipzig 1906.
Vorlesungen über Geometrie. Bd. I, Teil I, Lief. 1. Leipzig 1906.

C. G. Lloyd in Cincinnati:

Mycological Notes. No. 19, 20. 1905.

Wilhelm Ludowici in Jockgrim:

Stempel-Bilder römischer Töpfer. 1899. 4⁰.

Basile Modestov in Rom:

Introduction à l'Histoire Romaine. Paris 1907. 4⁰.

Ernesto Monaci in Rom:

Archivio paleografico italiano. Fasc. 21—23. 1905—06. fol.

Gabriel Monod in Versailles:

Revue historique. Tome 90, No. II, Mars. Avril 1906; tome 91, No. I, II, Mai—Août 1906; tome 92, No. I, II, Sept.—Déc. 1906. Paris.

W. Moriellsche Buchdruckerei und Verlagshandlung in Radolfzell:

„Vom Bodensee". Vergangenheit und Gegenwart mit besonderer Berücksichtigung von Reichenau, Mainau, Wollmatingen und Konstanz. Von B. Bauer. 1906.

Eugen Oberhummer in Wien:

Wolfgang Lazius, Karten der österreichischen Lande, herausgegeben von E. Oberhummer und Franz R. von Wieser. Innsbruck 1906. fol.

Michele Rajna in Bologna:

Sulle condizioni dell' osservatorio della R. Università di Bologna. 1906.

S. Riefler in München:

Zeitübertragung durch das Telephon.
Elektrische Ferneinstellung von Uhren.

H. Rosenbusch in Heidelberg:

Studien im Gneisgebirge des Schwarzwaldes. 1906.

Heinrich Rudolf in Coblenz:

Erdmagnetismus und Luftelektrizität. 1906.

Giovanni Scardovelli in Sermide:

L'Ultimo Conquistatore. 1906.

Verlag von Seitz & Schauer in München:

Deutsche Praxis. 1906, Nr. 1—24.

Stephan Kekule von Stradonitz in Berlin:

Ahnentafel-Atlas. 1898—1904. quer fol.

Philipp Straßer in Salzburg:

Fürst Otto von Bismarck, † 31. Juli 1898. 1906. fol.

Julius Tafel in Würzburg:

22 Separat-Abdrücke aus dem Gebiete der Chemie.

Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner in Leipzig:

Thesaurus linguae Latinae. Vol. 2, fasc. 8—10; vol. 4, fasc. 1. 1905—06. fol.

Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften. Bd. II, 1, Heft 6; Bd. III, 2, Heft 3; Bd. IV, 2, Heft 3; Bd. V, 1. Heft 3; Bd. VI, 1, Heft 1, und französische Ausgabe, tome 1, vol. 3, fasc. 1; vol. 4, fasc. 1. 1906.

Archiv der Mathematik und Physik. III. Reihe. Bd. 10, Heft 2—4; Bd. 11, Heft 1. 2. 1906.

A. Thieullen in Paris:

Les préjugés et les faits en industrie préhistorique. 1906. fol.

J. F. Thoene in Cöln:

Läßt sich unsere Zeitrechnung vereinfachen? 1906.

Heinrich Welzhofer in Rohrbach:

Das Büchlein vom Höchsten. Stuttgart 1906.

Vinzenz Wießner in Freiwaldau:

Die Leitung der mechanischen Energie. Dresden 1906.

Ludwig Wilser in Heidelberg:

Die Burgunder im Wonnegau. Worms 1906.

J. Cook Wilson in Oxford:

On the Traversing of Geometrical Figures. 1905.

Veit Brecher Wittrock in Bergen:

Acta Horti Bergiani. Vol. I, II, III, 1. Stockholm 1891—1903. 4⁰.

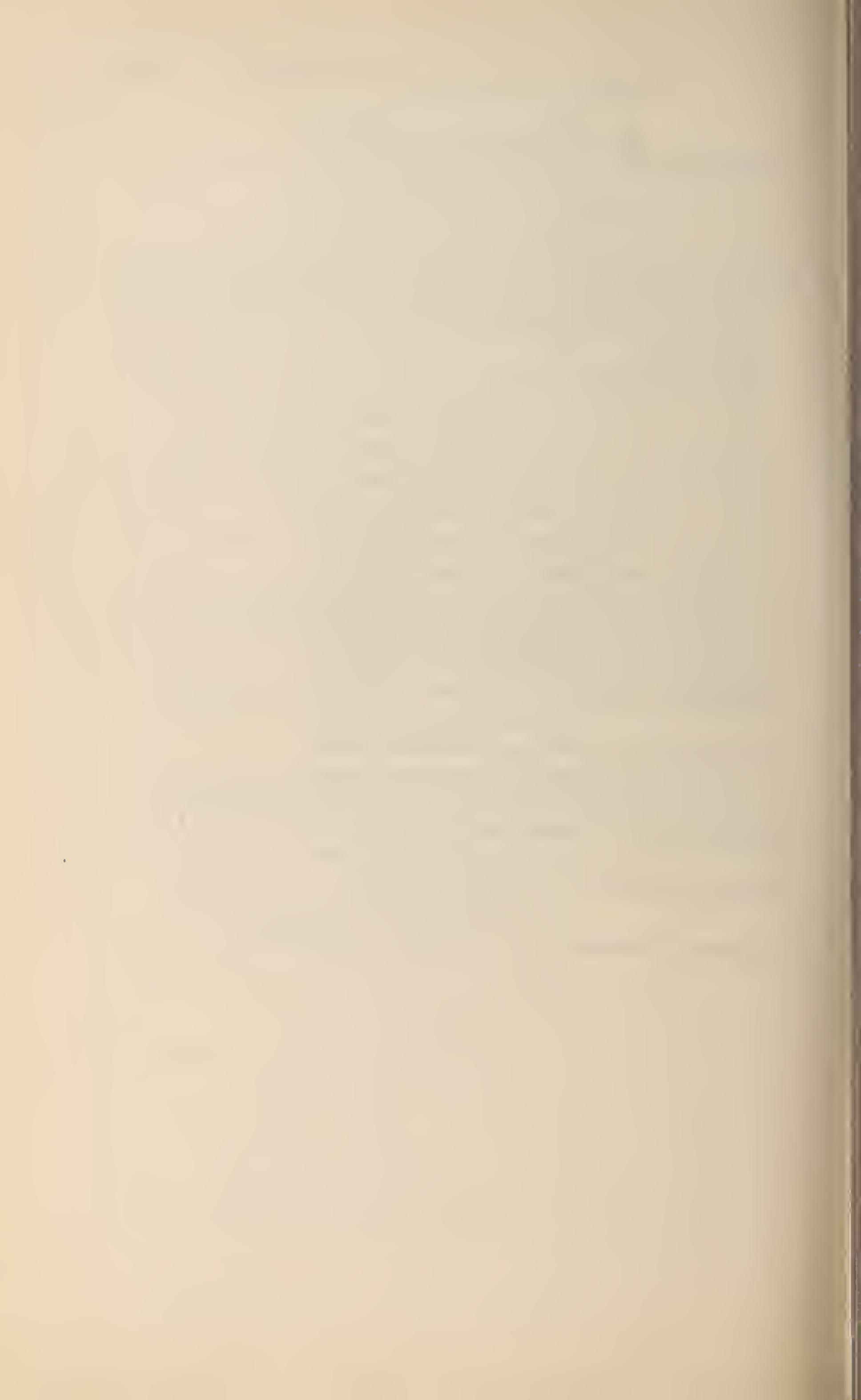
Catalogus illustratus Iconothecae botanicae. Pars II. Stockholm 1905. 4⁰.

Ed. v. Wölfflin in München:

Archiv für lateinische Lexikographie. Bd. XIV, 4. Leipzig 1906.

Firma Karl Zeiß in Jena:

Gesammelte Abhandlungen von Ernst Abbe. Bd. 3. 1906.



Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München.

1906. Heft I.

München
Verlag der K. B. Akademie der Wissenschaften
1906.

In Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).





Inhalt.

Die mit * bezeichneten Abhandlungen werden in den Sitzungsberichten nicht abgedruckt.

Akademische Buchdruckerei von F. Straub in München.

Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München.

1906. Heft II.

München
Verlag der K. B. Akademie der Wissenschaften
1906.

In Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).



Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

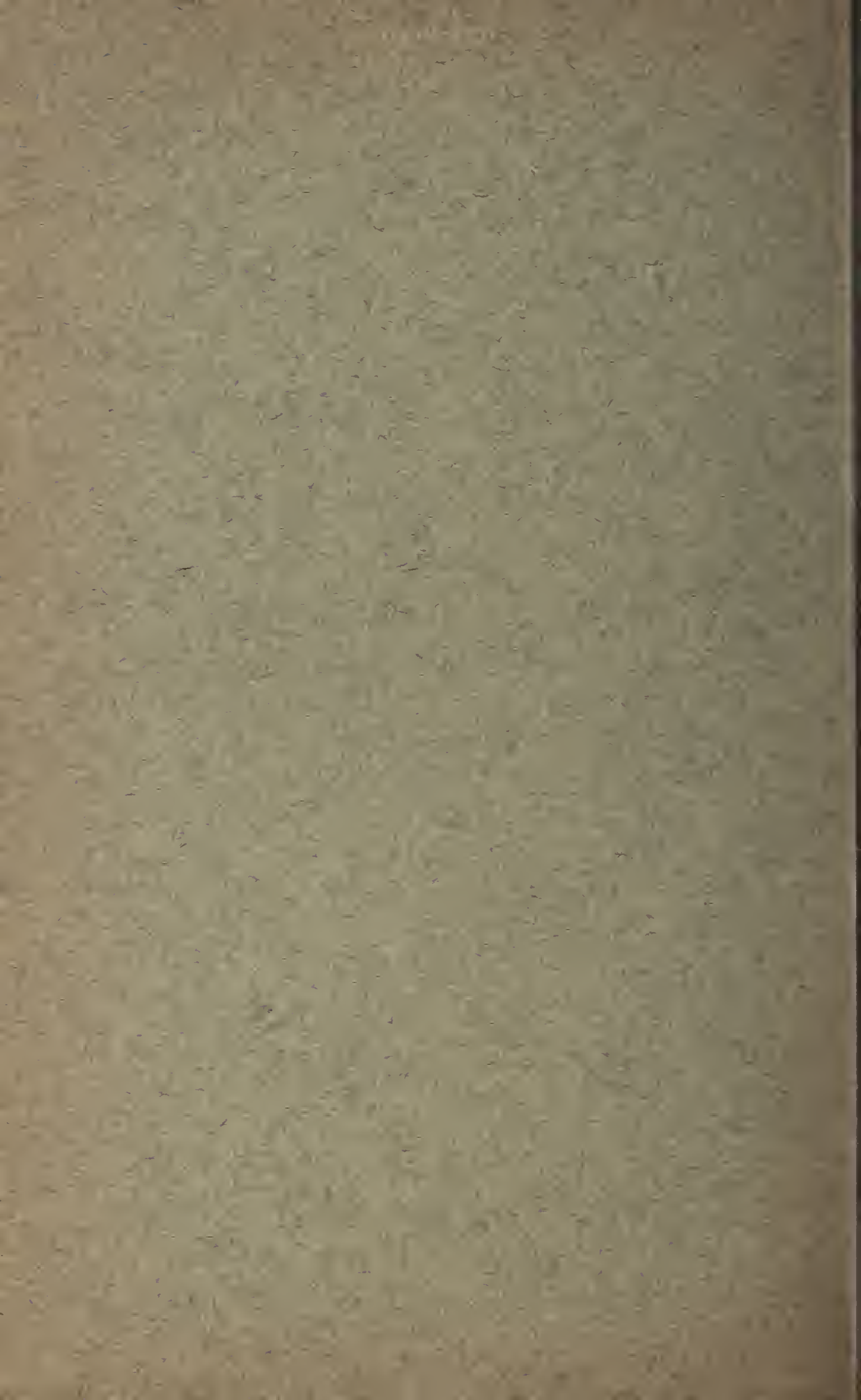
K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München.

1906. Heft III.

München
Verlag der K. B. Akademie der Wissenschaften
1907.

In Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).





Inhalt.

Die mit * bezeichneten Abhandlungen werden in den Sitzungsberichten nicht abgedruckt.

Akademische Buchdruckerei von F. Straub in München.



Inhalt.

Die mit * bezeichneten Abhandlungen werden in den Sitzungsberichten nicht abgedruckt.

Sitzung vom 5. Mai 1906.

Sitzung vom 9. Juni 1906.

Sitzung vom 7. Juli 1906.

Öffentliche Sitzung zur Feier des 147. Stiftungstages am 14. März 1906.

Akademische Buchdruckerei von F. Straub in München.

